I

力学

岩波書店

坪井忠二訳

ファインマン, レイトン, サンズ

ファインマン物理学

The Feynman LECTURES ON

PHYSICS

RICHARD P. FEYNMAN

ROBERT B. LEIGHTON

MATTHEW SANDS

力学 I

岩波書店

坪井忠二訳

ファインマン, レイトン, サンズ

ファインマン物理学

The Feynman LECTURES ON PHYSICS

THE FEYNMAN LECTURES ON PHYSICS

Vols. I, II, III

by

Richard P. Feynman
Robert B. Leighton
Matthew L. Sands

1965

訳者の序

最近のアメリカでは，理工系の大学における物理学の基礎教育に関して，いろいろと目覚ましい試みがなされているようである．たとえばマサチューセッツ理工科大学(MIT)やバークレーのカリフォルニア大学などでは，新しい教科書を編纂する計画があり，いずれも著名な物理学者が直接それに参画している．このような試みのうちでも，本書すなわちカリフォルニア理工科大学(カルテク)のファインマンの教科書は，その創意にみちた内容によって，とくに有名である．

著者ファインマンの名を知る人はすくなくあるまい．彼は1965年度に，わが国の朝永振一郎博士，ハーバード大学のシュウィンガー博士とともに，量子電磁力学に関する画期的な研究によってノーベル賞をうけている．受賞の対象となった問題は3人に共通であるが，ファインマンの研究方法はほかの人たちのものとは，かなりちがっている．電磁場のはたらきを，粒子間の要素的な相互作用に分解し，それらの要素の組合せとして，場の理論を構成するという独特の方法である．しかも粒子間の相互作用が時間をかけて空間を伝わることを考えると，相互作用の因果性についても考え直すことが必要になる．この意味で，彼は物理学全体を彼独自の方法で組み直した新しい理論をつくり上げたのである．もちろん，本書の内容は彼の研究領域と離れているので，本書の中で彼の方法が充分展開されることは期待できないが，ところどころにその片鱗がうかがわれるのは興味あることである．

彼の方法が特異であるように，彼の人柄もまた変わっている．およそ学者とか研究者とかいう言葉から連想されるものとはかけちがった，なにものにもとらわれない，自由な，型やぶりの人物らしいのである．かつて彼がわが国に来たときにも，いまだに語り草となっている数々の話題を残していった．ボンゴというアフリカの太鼓をたたいている彼の写真が，“ファインマン序”についている．これは物理の本に似合わしくないと思われるかも知れないが，彼の場合，むしろその人柄にふさわしいといえそうである．

さて本書の内容であるが，彼の人柄におとらずまことに個性的である．昔から今に至るまで，名著といわれる教科書は，整然とした物理学の体系を静かに展開するといった型のものが多い．しかし本書を手にする人は，それと大分様子がちがうことに気付かれるであろう．そこには絶えず読者に対する話しかけがある．講義を録音し後で編集したという事情も，ある程度反映しているのはたしかであろうが，ここにはこの種の本に見られないリズムと流れとがある．ときには意外とも思われる題材を含めて，ボンゴのリズムのような躍動する大きな流れをつくっていく．彼の話は力学とか電気とかの既成の枠にとらわれない．それによって読者も絶えず新しい考え方への刺激をうけ，歩一歩とこの内

容をたどる間に，いつのまにか非常な高みに持ちあげられてしまう．

ここで本書の文章にも一言ふれておく必要があるかも知れない．ファインマンの文章の表現もまことに自由奔放で，この点では訳者たちを楽しませると同時に，悩ませたこともすくなくなかった．彼の口調はイングリッシュではなく，ファイマニーズだという人さえある．われわれは，その味が失われることがないようにできるだけ努力はしたつもりであるが，日本語という制約の中で，忠実さを多少犠牲にせざるをえなかった面もあったことをお断りしておく．

本書にでてくる数式は，わが国の教科書にくらべて多いわけではないが，だからといって決して易しい本ということはできない．著者の序文にもあるように，この講義は初めカルテクの最も優秀な学生を目標としてなされたものだそうである．それだけにこれを読み通すにはそうとうの努力が必要である．しかし幸いにして読者は，これを理解するために，必要なだけの充分な時間をかけることができる．このような取り組み方をすれば物理学の本格的な面白さを知ることができるであろう．ファインマンが実際にこの講義をしたのは一度だけであったが，カルテクでは現在でも，本書をテキストとして講義がつづけられているとのことである．これは物理学教育における本書の意義が高く評価されていることを示すものであろう．

わが国でも，最近理工系大学における基礎学科の教育のあり方について，いろいろと問題がでている．一般教育と専門教育との制度上の分離が，物理学などの教育を不徹底なものとし，不当にゆがめていることは，多くの人の斉しく認めているところである．われわれが本書を訳そうとしたのは，この問題に答えるための貴重な試料を提供しようと考えたためでもある．もちろんいろいろな行き方はあろうが，この問題の検討に本書の存在を忘れることはできないであろう．

なおこのテキストは原書で3冊になっているが，訳書では都合上5冊にした．その内容とわれわれの分担とはつぎのとおりである：

原書	訳書	内容	訳者
I	第I巻	力学	坪井忠二
	第II巻	光，熱，波動	富山小太郎
II	第III巻	電磁気学	宮島龍興
	第IV巻	電磁波と物性	戸田盛和
III	第V巻	量子力学	砂川重信

第I巻を翻訳するにあたっては，たまたま来日中であったカルテクの物理学教室のDr. Dolen，またかつて同学科の学生であった川島協君などの助力を得た．ここに謝意を表する．

坪井忠二



ファインマン序

本書は，昨年と一昨年，私がカルテク*で1年生と2年生に対して行なった物理の講義である．もちろん，講義のときと一言一句同じではない——すっかり書きなおしたところもあるし，またそれほど手を加えなかったところもある．教室の講義は，全課程の一部分をなすに過ぎない．全体で180人の学生が大講義室に集まって，1週間に2回この講義をきく．講義がすむと学生は15人ないし20人の小グループにわかれて，助手の指導の演習がある．このほかに1週間に1回実験がある．

この講義で私が特に意を用いたのは，高校を出てカルテクに入って来た非常に熱心で頭のよい学生達の興味を失わさせないのには，どうすればよいかということである．カルテクに入る前に，彼らはすでに物理学というものがどんなに面白く，またどんなに素晴らしいものであるかということをたっぷり聞かされてきている——相対性理論，量子力学，その他近代的の考え方など．ところがこれまでの講義のやり方だと，これらの素晴らしい新しい近代的の考え方などはほとんど出て来ないので，2年たつうちに，すっかり失望してしまうという学生が多かったのである．斜面，静電気などを勉強させられて，2年たつと，全くばかばかしいことになってしまうという有様であった．そこで，よくできて心をはずませている学生の熱意を失わさせることなく，こういう人達を救済するような講義はできるものか，できないものか，これが問題であった．

これから述べる講義は決してただの概論ではない．それ自身として非常に真剣なものである．私はクラスの中でいちばんよくできる学生を相手にして話すつもりで講義した．そして，講義の本筋以外のいろいろな方面に物理的の考え方や概念を応用するというようなことにふれてみたりして，いちばんできる学生といえども，講義に出てくることをすべて完全に把むことはたしかにできないというような程度にした．こういうつもりだったので，私は大いに努力して話をできるだけ正確なものにし，かつどの場合でも，どこで方程式というものと考え方というものとがうまくいっしょになって物理学の枠にはまるのか，また——学生がもっと先を勉強した後には——話はどのように変わるかというようなことをていねいに説明したつもりである．そして，そのような学生に対しては，前に述べたことからの演繹によって理解すべき——学生がよくできるなら——点は何か，また新たに導入された点は何かということをはっきり指摘することが大切であると思った．新しい考えが出て来ると，私は，それが演繹できるものなら演繹した．あるいはまたこれは新しい考えであって，これまで覚

* California Institute of Technology の略

えたことから出発して出て来るものではないこと，証明することはできないこと，——したがってここにはじめて出て来たものであることを説明するようにつとめた．

この講義を始めたとき，私は，高校から来た学生は，幾何光学だとか，化学の簡単な考えだとかというものについては，すでに知識があるものと仮定した．そして，この講義をきちんと整理して，あることをくわしく論ずる準備ができるまでは，それについては何も述べないことにするというようなやり方をする必要はないと考えた．やがて出て来ることはちょっと述べただけにしておいて，くわしくは論じなかったという例がたくさんある．そのようなくわしい話は，後になって準備がもっとよくできたときにゆずった．例えば，インダクタンスの話，エネルギー準位の話などがそれであって，最初は極めて定性的にしておいて，あとでもう少し完全に述べることにした．

また私は中以上の学生も目標においた．そればかりでなく，余分の気焔や他方面への応用などとなるとお手あげで，講義に出てくる話はまずたいていわからないといった連中にも気を配った．この連中に対しては，講義の中に，少なくとも彼らでもわかる**はず**の大切な点，大切なところがちゃんと入っているようにつとめた．講義に出てくる話がみなわからなかったとしても，この連中は悲観することのないようにした．みなわかるなどということは期待しなかった．しかしせめて，大切な，最も本筋的なことがらはわかってもらいたかった．もちろん，何が大切な定理で何が大切な考えであるか，あるいは，何が高級な副産物や応用であって，それはあと何年かたたなければ理解できないことであるのか，こういうことをみきわめるのにも，やはり彼らなりのある程度の頭のはたらきが必要であるのはもちろんのことである．

この講義をしている間に，一つの深刻な困難にぶつかった：それは，こういうふうに講義だけしていると，学生の方から私の方に何もはね返って来るものがないので，講義がどのくらいうまくいっているかを判断することができないということであった．これはまったく深刻な困難であって，講義がじっさいどのくらい満足すべきものであったのか，私にはわからない．全部が要するに実験なのである．もしも私がもう一遍やるということになったら，同じやり方はしないだろう——もう一遍やるのは御免だが．しかし私はこのやり方は——この物理学に関する限り——第１年目はかなりよくいったと思っている．

２年目についてはそれほど満足していない．その前半で電磁気を取り扱ったところでは，これに限るというようなやり方もなく，あるいは別のやり方——ふつうの方法にくらべて特に素晴らしいというやり方などは，何も思い付かなかったのである．だから，電磁気では，私の講義で大したことはできなかったと思っている．２年目の終りには，電磁気がすんだあとで物性論について更に数回講義するつもりであった．そして“物理学における数学的方法”といわれているものの序論を取り扱って主として基本振動，拡散方程式の解，振動系，直交座標等々にふれるつもりであった．いまふりかえって考えるのだが，もう一遍講義をするということになったら，やはりこの考えになるだろうと思う．しかし，私がもう一遍講義するという計画はなかったので，量子力学の序論を講義に含めるのもよいではないかという意見もあった——これは第Ｖ巻に出て

いる．

物理学を専攻する学生は，3年生のときになって量子力学をやるので，それまで待てばいいのはもちろんである．しかし，この物理学の講義に出ている学生の多数は，元来，他の分野に興味をもっているのだが，その基礎として物理学を勉強しているのだという見方もあった．そして，量子力学をふつうのやり方で取り扱うとなると，勉強するのに時間が長くかかりすぎて，大多数の学生は量子力学にふれることができないということになってしまう．しかし，量子力学が実際に応用されている面では——特に電気工学や化学などにおける複雑な応用面では——正面から微分方程式を取り扱うというやり方が行なわれているわけではない．そこで私は，まず偏微分方程式に関する数学的知識を必要としないような方法で，量子力学の原理を述べることにした．物理屋にとっても，こうやってみる——量子力学をこの逆のやり方で取り扱ってみることも面白いと思う．その理由は，そこの講義を読んでもらえばわかると思う．しかし，量子力学に関するこのこころみは，完全な成功だったとは思われない——その原因は主として終りの方で時間が充分になかったことにある(例えばエネルギーバンドや振幅の空間分布などのようなことについて，もう少しちゃんとやるためには，あと3, 4回講義しなければいけなかった.) また私がこういうやり方をしたのははじめてのことだったので，学生の方から何もはね返って来ないということが，特に困った点であった．いまでは，量子力学はもう少しあとにした方がいいと思っている．いつかもう一遍やってみる機会もあるかも知れない．そのときはうまくやるつもりである．

いろいろの問題をどうやって解くかということに関する講義はしなかったが，これは，演習の時間があるからである．1年目に，どうやって問題を解くかという講義を3回したのだけれども，それはこの本に入っていない．また慣性航法についても講義が1回あって，これは回転系の講義のあとにつづくものであるが，しかしこれは残念ながら省いた．第5章と第6章とは，私が留守だったので，実はマシュー・サンズによったものである．

さていうまでもなく，このこころみがどのくらい成功であったかということが問題である．学生の面倒をみた人達の大多数は私に賛成してくれそうにもないが，私自身の意見は悲観的である．私は学生のために大いに役に立ったとは思わない．試験のときに大半の学生が問題を取り扱う様子から察すると，このやり方は失敗だったと思う．もちろん私の友人達によれば，十数人ないし二十数人の学生は，講義の全部にわたって驚くべきほどよい理解を示しているという．そして内容についてよく勉強し，いろいろの点について心をはずませ夢中になって考えているという．そういう学生は，物理学の最上級の基礎を身につけたのだと思う——そしてそういう人達をこそ私は育てたかったのである．しかし，“教育というものは，教育などしないでもいいという幸福な事態でない限り大した効果のないものなのである”(ギボンス).

そうはいうものの，私は学生を1人でも完全におき去りにしようとは思わなかった——ことによると実際はおき去りにしたかも知れないが．学生のためになるのは，一つには，もっと努力して，講義に出てくる考えの真髄がよくわかるような問題をたくさんつくることだと思う．演習問題というものは，講義の

内容を補って，話に出た考えをより現実的に，より完全に，よりちゃんと頭に入れるのによい機会を与えるものである．

しかし，この教育上の問題については，私はこう考えている．最善の教育というものは，いい学生といい教師との間に，直接の特別のつながりがある場合——学生が考え方を論じ，ものごとについて考え，ものごとについて語る——そういう場合にのみ可能だということを認識するよりほかはないと考えている．講義に出たり，また出された問題をやったりするだけでは大した勉強はできはしない．しかし，現代は教えるべき学生の数があまりにも多く，この理想に代わるものを求めなければならない．その意味で，この講義も若干の貢献をするところがあるかも知れない．どこか，目立たないところに独特な個性的な教師と学生がいて，この講義から若干の刺激や考え方などを吸収しているのかも知れない．彼らはそれを考え考え——さらにそれを発展させることに夢中になるのではあるまいか．

1963年6月

リチャード・P・ファインマン

まえがき

この本は，1961-62年の学年に，カリフォルニア理工科大学でファインマン教授によって講ぜられた物理学入門の講義に基づくものである．カリフォルニア理工科大学の1年生と2年生は，2年課程の物理学序論を聴講するが，これはその第1年目の分である．そして1962年には同じような第2年目の分がこれに続いた．序論講義を根本的に改訂しようということは4年間も考えられてきたのであるが，このファインマン講義はその中核をなすものである．

根本的改訂が必要になったのには，二つの理由がある．その一つは，この数十年間に物理学が急速に発展したことである．もう一つの理由は，高等学校の数学の内容が改善されたために，新入生の数学の力がだんだんと向上してきたことである．我々は，このことをうまくとり入れようと考えた．そしてまた，近代的の問題にもふれて，この課程がいきいきとして興味のあるものであるようにし，今日の物理学の姿をよりよくあらわすものにしたいと考えた．

どんな問題を取り上げるか，またそれをどういうふうに講義するかということについては，いろいろの考え方があるだろう．そこで，物理学科の教官に頼んで，おのおのの考えを改訂課程の概要というような形にまとめて提出してもらった．そのようなものがいくつか提出され，そして充分に検討された．ほとんどすぐに皆の意見の一致したことは，単に別の教科書を採用するだけでは根本的の改訂はできない，あるいは，はじめから教科書を書いても，だめである．そして週に2,3回の割で新しい改訂講義をするというのが先決問題だということであった．そしてその課程をだんだんやっていけば，適当な内容もできてくるから改訂の第2段に進めるし，また講義内容にあうように適当な実験も用意できるだろうということであった．このようにして講義のあらすじができ上がったが，もちろんこれは不完全かつ試案的なもので，実際に講義の任にあたる人によって少なからず変更されるものと了解された．

この講義を実際にどうやって行なうかというやり方についても，いろいろの案が考えられた．これらの案は，大部分似たりよったりで，N人の教官が協力して全体の仕事を公平に分担するというのであった：各人は内容の $\frac{1}{N}$ に責任をもち，講義をし，自分の分の原稿を作るというのである．しかし，教官の数が充分でないし，また各人それぞれに個性も考えもちがうから，統一的な立場をとることはむずかしく，このようなやり方はうまくいきそうにない．

単にこれまでとは違った物理学課程を新たに作るというだけではなく，独特のものを作るのにひとつうまい方法があるということがわかったのは，サンズ教授の思い付きによるのである．サンズ教授の案によれば，ファインマン教授に用意して講義をしてもらい，それをテープに録音するというのである．これを文字に直して編集すれば，そのまま改訂課程の教科書になるというのであっ

た．これがほぼ実際に採用された方法であった．

編集の仕事は，図を入れたり，句読点や文章を直すくらいのことで，大したことはあるまい；それは大学院の学生が1人か2人ですむことだろうと考えられた．ところが残念ながらこの期待は間もなく外れてしまった．話し口調のものを目で読むかたちに直すということは，編集のたいへんな仕事であった．内容を並びかえたり直したりすることもときには必要であったが，そういうことがなかったとしてもたいへんであった．そのうえ，この仕事は単なる編集者とか，大学院学生などのできうることではなく，講義一つについて物理教官が10～12時間くらい細心の注意を払ってはじめてできることなのである！

こういう編集の仕事がむずかしいのと，この内容をできるだけ早く学生の手に入るようにすることが必要であったのと，この二つの理由で，内容に“磨きをかける”量には自ら限度があるのは，やむをえないことであった．したがって，終局的のものというよりは予備的ではあるが内容は正しくてすぐ使えるようなものを作ることに我々の目標を限らざるをえなかった．カルテクの学生用のものをたくさん作ることも必要であったし，また他の学校の教師や学生の強い希望もあったので，まず予備版として本書を出版することにした．将来すっかり書き直すのもよいだろうが，これはちょっと実現しそうにない．我々はこの版が完全であり，平明であり，内容の配列もうまくいっているとは，夢にも考えていない，すぐにでも若干の小改訂を加えることを計画している．そして形式も内容も固定的にならないことを目指している．

講義は課程全体の中核部分であるが，それに加えて，適当な演習を課して学生の経験と能力を向上させ，また適当な実験を課して，講義に出てくることに実験室で直接ふれてみさせるということも必要であった．どちらも講義内容ほどではないが，かなり進歩している．講義の進行につれて演習問題もいろいろつくり上げ，それをふやして次年度に使えるようにした．しかしこれらの演習問題の種類は充分でなく，また内容も浅く，学生がこれによっていかようにも有効に力を養うことができると悟るほど満足すべきものになっているとは思っていないから，演習問題は別にいわば仮の形で出版して，度々改訂しやすいようにした．

この新課程に対して，ネーア教授は新しい実験をたくさん考案した．そのなかには，気体ベアリングの摩擦が非常に低いことを利用したものがいくつかある；すなわち，空気溝の新考案で，1次元運動，衝突，調和運動の量的測定ができるもの，あるいは空気で浮かして空気でまわすマクスウェル独楽で，回転加速度運動やジャイロスコープの歳差運動や章動運動を調べることができるものなどがある．新しい実験はこれからもずっと工夫をつづけるつもりである．

課程改訂の仕事は，レイトン，ネーア，サンズ各教授の担当の下に行なわれた．この改訂に公式に参加したのは，物理数学天文学教室からファインマン，ノイゲバウアー，サトン，スタブラー*，ストロング，フォグトの各教授が，工学教室からカウヒイ，プレセット，ウィルツ各教授である．この改訂の仕事に関与された方々の有益な助力に対して厚く御礼を申述べる　またフォード財団

* 1961–62　ウイリアムス・カレッジ(マサチューセッツ州ウィリアムスタウン)からの休暇中．

には特に負うところが大きい．その財政的援助がなかったら，この仕事はできなかったのである．

1963年7月

ロバート・B・レイトン

目　次

第10章 運動量の保存

第11章 ベクトル

第12章 力の性質

第13章 仕事と位置のエネルギー

第14章 仕事と位置のエネルギー（結び）

第20章　3次元空間における回転

第21章　調和振動子

第22章　代　数

第23章　共　鳴

第24章　過渡現象

第25章　線型の系とまとめ

第1章
躍るアトム

1-1 はじめに

これから述べる講義は，2年課程の物理学であるが，学生諸君(読者諸君)が将来物理学者になるものとして，話を進めることにする．もちろん，実際は，必ずしもそうではない．しかし，これは，あらゆる学科のあらゆる教授が仮定することなのだ！ もしも諸君が将来物理学者になろうというのならば，これから実にたくさんのことを勉強しなければならない．そこにあるのは，この200年間に非常ないきおいで発展してきた知識の世界である．そんなに厖大な知識は，とても4年の間に知りつくせるものではない，と諸君は思うだろう．まさにそのとおりである．そして諸君は将来更に大学院へも行かなければならないのだ．

この永い間に行なわれた仕事の量は実におびただしいものである．しかし，驚くべきことには，その厖大な結果をずっと圧縮してしまうことができるのである．——すなわち，いくつかの**法則**をみつけだして，我々のすべての知識をそれに要約してしまうことができるのである．しかしそうはいっても，それらの法則の真意を把握するということは非常にむずかしい．そこで，ここにまず述べようと思うのは，科学上の問題において，一つの部分と他の部分とはどういう関連をもっているか，というようなことに関する，案内図とも，手引きともいうべきことがらである．こういうものなしに，いきなり広汎な物理学の問題に取り組もうとしても，それは諸君にとって適切な進み方であるとはいえない．このようなわけで，はじめの3章では，物理学とその他の科学との関係，諸科学相互の間の関係，科学の意義，などについて，そのあらましを述べることにする．これは，これからの問題に対して我々が“親しみ”をもつ一助とするためである．

ここで諸君はこういう疑問をもつかも知れない．ユークリッドの幾何学では，まず公理を述べて，それからあらゆる演繹を行なっている．物理学でも，それと同じように，第1ページには基本的な法則を列記するだけにしておいて，次に，それらの法則があらゆる場合にいかにうまくあてはまるかを説明していくというやり方はできないものか．なぜこのやり方では，物理学は教えられないのだろうか．(4年かかって，物理学を勉強するのがいやで，4分間ですませたいとでもいうのだろうか？) しかしこれは不可能である．それには二つの理由がある．第一の理由は，その基本的な法則なるものを我々がすべて**知りつくし**

ているわけではないということである．我々の知らないこと，我々にわかっていないことは，ますます増加しつつある．第二の理由は，物理学のいろいろな法則を厳密に述べようとすると，これまでにであったこともないような新奇な概念が出てきて，それを記述するのに高級な数学が必要になるからである．それらの**ことば**がそもそも何を意味するのかということを学ぶためにさえも，諸君はたくさんの準備訓練を経なければならない．ユークリッド幾何学的のやり方が不可能だといったのはこのためである．そういうわけで，一つ一つやっていくというのが，残された唯一の方法なのである．

自然全体のなかの一齣，あるいは一部分というものは，完全な真理——といっても我々の知る限りにおける真理——に対する一つの**近似**に過ぎないのが常である．じっさい，我々の知っていることは，すべてなんらかの近似である．というのは，**我々はまだすべての法則を知りつくしているのではない**ということを承知しているからである．だから，これからいろいろのことを勉強しても，それはやがて忘れてしまわなければならず，そうでないにしても，多くの場合，修正を加えなければならないのである．

科学の原理——あるいは定義といってもほとんど同じことなのだが——は，**知識はすべて実験によって検討される**ということである．科学上で一つのことが“真理”であるかどうかを判定するものは，実験の**他にはない**．しかし，そういう知識のもととなるものは何なのだろうか．正否を検討しようとする法則なるものは，いったい，どこから出てくるのだろうか．実験自身からヒントが与えられて，法則が生まれるということもある．しかし，そのようなヒントからさらに大きく前進して，普遍的なものが樹立されるためには——それらの背後にある見事な，簡潔な，それでいていままで考えもしなかったような理法を推測し，更に，その推測が正しかったかどうかをためすに足る実験をしてみるというように，ことを運ぶためには——**洞察力**がまた必要なのである．ところがこの洞察の過程というのが決して容易なわざではない．それで，物理学では，仕事が分業になっている．**理論**物理学者は洞察し，演繹し，新しい法則を推測する．けれども，実験はしない．**実験**物理学者は，実験し，洞察し，演繹し，そして推測する．

我々は，自然の法則は近似的であるといった．まずはじめに“正しくない”法則を見出し，そして次に“正しい”法則を見出すといった．しかし，一つの実験の結果が“正しくない”ものであるなどというのは，いったいどんな場合であろうか．それはまず，諸君の気が付かないところで何か装置が狂っているというようなつまらないことから起こる．しかしこのようなところなら，それを直して又やってみるのはわけないことである．このようなつまらぬことは問題外として，一つの実験の結果というものがどういうときに正しくないもので**ありうる**のだろうか．その唯一の原因は不精密ということに尽きる．例えば，一つの物体の質量は，変化するものだとは決して考えられない．まわ

っているコマと止まっているコマとは同じ目方である．そこで，一つの“法則”が設定される：質量はその速さに関係なく一定である，というのである．ところがこの“法則”は今では正しくないことがわかっている．速度が大きくなればなるほど，質量は大きくなるのである．もっとも，めだった質量増加が生ずるためには，速度が光の速度に近いものでなければならない．法則は**正しくは**こうなのである：一つの物体の動いている速さが1秒に100マイル以下であるならば，その質量は100万分の1以下の程度で一定である．この近似の程度においては，質量不変というのは正しい法則だといってよい．だから，実際問題としては，この新しい法則はこれまでとくらべて，べつだん大した差をもたらすものではないと考えられるだろう．これは，そうだともいえるし，またそうでないともいえる．ふつうの速さに対しては，我々は上のことを忘れて，一つのよい近似として，質量不変という単純な法則を使っても差支えない．しかし，速さが大きくなると，我々は間違いをおかすことになり，速さが大きくなればなるほど，その間違いはさらに大きくなるのである．

結論的にいって，そして最も重大なことには，この近似法則は**根本的に全然正しくない**のである．質量の変化がたとえ小さいものであるに過ぎなくても，なおかつ我々の世界像は書きかえられなければならないのである．こういう点が，法則の背後にある哲理とか，考え方というものの非常に特異なところなのである．非常に小さなことがらであっても，我々は考え方をすっかり改めなければならないということが，時々あるものなのである．

さて，まず何から話をはじめたらよいだろうか．例えば相対性理論，4次元の時空等々のように，**正しいことは正しいが**，しかし，新奇でむずかしい概念を含んでいてとりつきにくい法則の話をしたらいいのだろうか．それともまず，“質量不変”の法則のように，近似的にすぎないけれども，上のようなむずかしい概念が入ってこない，単純なものからはじめたらよいのだろうか．第一のやり方の方が刺激的であり，見事であり，そして面白いだろう．しかし最初にとりつきやすいのは，むしろ第二のやり方の方である．そしてそれはまた，第一のやり方の真意を理解するための第一歩ともなる．こういうことは物理学の講義でよく出てくる．ときにはそれをいろいろにほごしてやってみなければならない場合もあるだろう．しかし，今どんなことがわかっているか，それはどのくらい正確であるか，それは他のあらゆるものにどのように適合するか，そして我々の知識がもっとふえたらそれはどういうふうに変更されるだろうか，というようなことを，それぞれの段階において知っておくのは有意義なことである．

では，今日，我々は科学(特に物理学，またその周辺にある諸科学)というものをいかに理解するのか．このことについての手引き，案内を更につづけることにしよう．こうしておけば，後になって我々がある特定の問題について深入りするときにも，何故その問題が大切なの

か，それが学問の大構造とどういう関連をもっているのか，というような背景について，幾分の理解をもつようになると思う．では，我々の世界観は一口にいって，どのようなものなのだろうか．

1-2　物質は原子からできている

もしもいま何か大異変が起こって，科学的知識が全部なくなってしまい，たった一つの文章だけしか次の時代の生物に伝えられないということになったとしたら，最小の語数で最大の情報を与えるのはどんなことだろうか．私の考えでは，それは**原子仮説**(原子**事実**，その他，好きな名前でよんでよい)だろうと思う．すなわち，**すべてのものはアトム——永久に動きまわっている小さな粒で，近い距離では互いに引きあうが，あまり近付くと互いに反撥する——からできている**，というのである．これに少し洞察と思考とを加えるならば，この文の中に，我々の自然界に関して実に**厖大な**情報量が含まれていることがわかる．

アトムという考えがいかに有力なものであるかを示す例として，ここに大きさ $\frac{1}{4}$ インチの水滴があるとしよう．どんなによくみつめても，水——なめらかな連続した水——しか見えない．今日最高級の光学顕微鏡——およそ2000倍——でそれを拡大してみれば，この水滴はさしわたしおよそ40フィート，つまり大きな部屋ぐらいの大きさになるが，それをよくみても，みえるものは**相変わらず**比較的なめらかな水である．しかしそのところどころにフットボールのような形をした小さなものが前後に泳いでいるのがみえる．これは面白い．ゾウリムシである．ここで足ぶみするのもよかろう．ゾウリムシが繊毛を動かしからだをひねっているのがあまり面白いから，ゾウリムシをもっと拡大してみてその内部をしらべるということにし，もうその先へは進まないというのもよかろう．これはもちろん生物学の問題である．しかしここでは先へ進んで，更に2000倍の倍率をかけ，水という物質自体をもっとよくみることにしよう．こうすると，この水滴のさしわたしはおよそ15マイルになる．それをよくみると，何かがゴチャゴチャしていて，もはやなめらかな外見をもっていない．ちょうどフットボール見物の群集を非常に遠くから眺めているのと似ている．このゴチャゴチャはいったい何なのであろうか．それを検べるために，更に250倍の倍率をかけると，図1-1に示したようなものがみえるはずである．これは水を10億倍してみたものだが，この図はいくつかの点で簡単化されている．まず第一に，粒にはっきりした境があるように簡単にかいてあるが，これは正確ではない．第二に，簡単化のために，粒は2次元にならんでいるように，いわば模式的に描いてあるが，もちろん粒は3次元に動きまわっているのである．酸素の原子と水素の原子とをあらわすために，それぞれ黒と白との2種類の“マル粒”が使ってあって，一つの酸素には二つの水素が結び付いているのに注意してほしい．(一つの酸素と二つの水素からなるおのおのの小

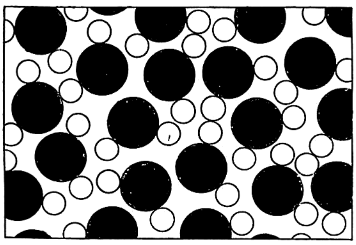


図1-1　水を10億倍したところ

集団を分子と名付ける.）ほんものの粒は，たえずふるえたり，はずんだり，互いのまわりをまわったり，ひねれたりしているのだが，こういう点でもこの図は簡単化されている．この図は静的なものではなく，動的なものと思ってみなければならない．もう一つ，この図でかき表わせなかった点は，粒と粒とが“関係しあっている”ということ——この粒はあの粒にというように，互いに引きあっているということである．全体がいわば，“くっついて”いるのである．また，これらの粒は，互いにとおりぬけるということもない．二つの粒をあまり近くにおしつけると，それは互いに斥けあうのである．

原子の半径は $1\sim2\times10^{-8}$ cm である．10^{-8} cm のことを（別名）**オングストローム**と名付ける．だから，原子の半径は1ないし2オングストローム（Å）であるといえる．原子の大きさを記憶するのにもう一つ，こういううまい覚え方がある．一つの林檎を地球の大きさに引きのばしたとすると，林檎の中にあった原子の大きさは，だいたいもとの林檎の大きさくらいになる．

さて，さきほどの大きな水滴で，粒々がみんなふるえたり，くっつきあったりしているところを考えてみよう．この水は一定の体積を保っていて，バラバラになることはない．これは分子の間に引力がはたらいているからである．水滴が斜面の上にあって，動くことができるようになっている場合には，水は流れる．けれども，消滅することはない——飛び散ってしまうことはない．これは分子引力があるからである．分子のふるえ運動を，我々は**熱**という言葉でいいあらわす．水の温度を上げると，この運動ははげしくなる．水を熱すると，ふるえが大きくなって，アトムとアトムとの間のすき間が大きくなる．どんどん熱しつづけていくと，ついに分子間の引力ではそれらをいっしょにひきつけておくことができなくなり，分子は**飛び散って**互いにはなればなれになってしまう．我々が水から蒸気を作るのに，この方法——温度を上げる——によっていることはいうまでもない．運動がはげしくなって粒は飛び散ってしまうのである．

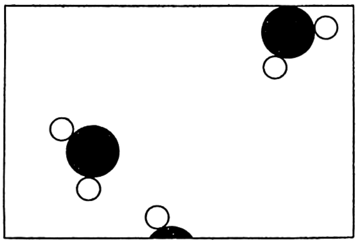


図 1-2 蒸 気

図1-2は蒸気の画である．この蒸気の画には，よくないところが一つある．それは，ふつうの大気圧の下では，このかこみに相当する大きさの中にある蒸気分子の数はほんの僅かで，この図のように中に三つもあるということはない．これくらいの大きさの四角なら，その中に分子が一つも入っていないのがふつうである．しかし，この図では，たまたま二つ半か三つ入っているのである．（そうでなかったら，何もない真白な図になってしまう．）さてこの蒸気の場合には，水の場合よりも，水分子の特性がよくみえる．簡単化のために，この図では 120° という角がめだつようにかいてある．この角は実際には 105°3′ であって，一つの水素の中心と酸素の中心との間の距離は 0.957 Å である．このように，この分子のことは実によくわかっているのである．

次に蒸気や他の気体の二，三の性質について調べてみよう．分子は互いにバラバラになっていて，壁にぶつかっては，はねかえっている．

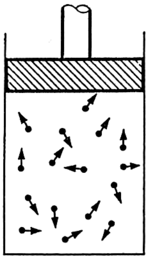


図 1-3

いま一つの部屋を想像する．そして，その中にたくさん(100個ぐらい)のテニスボールがあり，それがたえずぶつかりあい，はずみあっているとしよう．ボールは壁にあたって，それをおしている．(もちろん我々は壁をおしかえしてやらなければならない.) これによって気体は衝突のたびごとにピクピクした力を壁に及ぼすことになるのであるが，我々のあらっぽい感覚では(我々は100億倍に拡大されていないから)，**平均して一つの押しの力**を感ずるだけである．ある気体を一定の体積に閉じこめておくのには，これに圧力を加えておかなければならない．図1-3は気体をとじこめておく例の容器(どんな教科書にも出てくる)であって，筒とそれにはまるピストンとからできている．水の分子がどんな形をしていても，この際問題にならないから，簡単のために，テニスのタマのような小さなマルにかいておこう．それが，あらゆる方向にたえず運動をつづけているのである．天井のピストンには，たくさんのタマが絶えず衝突する．そのため，ピストンはジリジリとタンクからはずれようとするわけだが，それを防ぐためには，ある力によってそれを下の方におしつけておかなければならない．この力を**圧力**と名付ける．(実は，圧力かける面積が力である.) この力の大きさは，面積に比例することは明らかである．何故ならば，1 cc あたりの分子の数を同じにしたままピストンの面積を増すと，それと同じ割合でピストンに衝突する回数がふえるからである．

次に，このタンクに入れる分子の数を2倍にして，密度を2倍にする．しかし，分子の速さは同じ，すなわち温度は同じにしておく．こうすると，衝突の回数はほとんど2倍になる．しかも，一つ一つの衝突の“いきおい”は前と同じだから，圧力は密度に比例することになる．アトムとアトムとの間にはたらく力の性質を考えに入れると，それによって，圧力はいまいったのよりも少し小さいことになり，またアトムの占める体積が有限であることを考えに入れると，圧力はこれよりも少し大きいことになる．しかし密度が小さくて，アトムの数がそんなに多くない場合には，**圧力は密度に比例する**として，ほとんど間違いはない．

まだまだ他のこともわかる．こんどは気体の密度はそのままにしておいて温度を上げる，すなわちアトムの速さを大きくしてやるのである．そうすれば，圧力はどうなるであろうか．アトムの速さが大きくなったのだから，衝突のいきおいは強くなり，回数もふえる．したがって温度を上げれば圧力は大きくなる．原子説の考えはこのように明快である．

もっと別の面を考えよう．ピストンを中の方へおし下げていって，アトムがだんだんせまいところにおしこめられるようになるとしよう．このピストンの動いてくるところに，一つのアトムが衝突したらどんなことが起こるだろうか．衝突によって速さをもらうことは明らかである．例えばラケットが前進してくるところにピンポンのタマをあてて，はずませてみるとよい．ピンポンのタマはラケットにあたる前よ

りも速さが速くなってもどってくる．(特別な場合：たまたまアトムが止まっているところにピストンがあたれば，アトムが動き出すことは明らかである.) だから，ピストンにあたってもどってくるときには，それにあたる前にくらべて，アトムは“熱く”なっているのである．こうして容器の中にあるアトムはすべて速さをもらってくる．これは，**気体をだんだん圧縮するとその温度が上がる**ということを意味する．すなわち，気体はだんだん**圧縮**するとその温度は**上がり**，**膨張**すると温度は**下がる**のである．

さきほどの水滴の話に立ち戻って，また別の面から眺めてみよう．こんどはこの水滴の温度を下げたとする．そして，水の中でアトムのあつまりがふるえているのが，だんだん衰えてくるとする．アトムの間には引力がはたらいているので，しばらくたつうちに，アトムはそんなに活潑にふるえられなくなる．温度が非常に低くなったらどんなことになるかということを示したのが，図1-4である．アトムのあつまりがからみあって新しい模様に並ぶようになる．これが**氷**である．この氷の模型図は2次元に書いてあるので，ほんとは正しくはないのだが，定性的にはまず正しいといってよい．大切なことは，この氷のなかでは，**あらゆるアトムの位置がちゃんときまってしまっている**ということである．氷滴の一端にあるすべてのアトムを何かの方法でおさえつけて，このアトムはここに，次のアトムはそこにというように，ある配列にとめてしまったとすると，網目のつながりがしっかり固くなっているので，(拡大した尺度で)何マイルも遠くにある他の端のアトムの場所もきっちり定まってしまうということになる．だから氷の針をつくってその一端をもち，他の端を横にまげようとすると，それに抵抗する．これが水の場合とちがうところである．水の場合には，アトムはみな四方八方に活潑に動きまわっているので，構造はこわれてしまう．つまり，固体と液体とのちがいは，固体では，アトムが**結晶配列**とよばれるある配列をとっていて，ずいぶん遠くのことを考えても勝手な位置を占めるわけにいかないというところにある．結晶の一端におけるアトムの位置は，何百万アトムとはなれている他端のアトムの位置によってきまってしまっているのである．図1-4は氷のなかの配列として求められたものである．この図は氷の有様を正しく伝えているところも多いが，そのままほんとの配列というわけではない．正しいことの一例は，六方対称の一部があらわれているということである．この図を軸のまわりに120°まわすと，もとにもどる．雪華は六角形だが，これを説明しうる**対称性**が氷の中にあるのである．図1-4からわかるもう一つのことは，氷がとけると体積が減る理由である．ここに示してある氷の結晶模様には“穴”がたくさんあいているが，ほんものの氷の構造もこれと同じである．この組織がこわれると，これらの穴に分子が入り込んでくることができる．水と活字金とは例外であるが，たいていの簡単な物質は，とけると体積が**膨張**する．それは，固体のときにはアトムがぎっしりつまっているが，とけるとアト

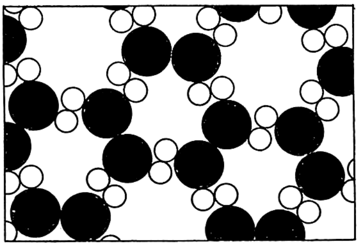


図1-4 氷

ムがふるえまわるのにひろい場所を必要とするからである．しかし水のような場合には，穴のある構造がこわれてしまうのである．

さて氷は"堅固な"結晶形をもっているけれども，その温度は変化しうる——氷は熱をもっている．我々がその熱の量を変化させようと思えば，変化させることができるのである．といっても，氷の場合に熱とは何であろうか、アトムは静止しているのではなく，ふるえつづけ，振動しつづけているのである．氷の結晶にきまった秩序——きまった構造——があるとはいっても，アトムはみな"その場所"で振動しているのである．温度を上げると，振動の振幅がだんだん大きくなって，その場所からふりとばされてしまう．これを**融解**という．温度を下げると，振動の振幅はだんだん小さくなって，遂に絶対零度では，とりうる最小——**ゼロではない**——になる．アトムがとりうるこの最小の運動の量は，物質をとかすのには足りない：ヘリウムはたった一つの例外である．ヘリウムでは，アトム運動を極端にへらして，絶対零度にしたとしても，まだかなりの運動が残っていて，こおることはない．大きな圧力をかけてアトムをおさえつけない限り，ヘリウムは絶対零度でもこおらない．しかし圧力をませば，こおらせることが**できる**．

1-3　原子的現象

固体や液体や気体などが，原子仮説からみてどういうものであるのかというような話はこれで終りにする．しかし，この原子仮説によると，いろいろな**原子的現象**もうまく説明されるので，次にいくつかの例をとりあげて，この立場から考えてみることにしよう．まず第一に調べようとする現象は，水の表面に関するものである．さて，水の表面では，どんなことが起こっているか．水の表面が空気にふれているところをえがこうとすると，その画はより複雑な——より現実的なものになる．図1-5がそれである．液体の部分をつくっているのは水の分子であることは前と同じであるが，こんどはそれに表面がある．表面よりも上の方に，いろいろのものがかいてある：まず，蒸気の場合と同じように水の分子がかいてある：これは**水蒸気**であって，水の上には，いつもこの水蒸気がある．(水蒸気と水との間には一種の平衡があるのだが，そのことについては後に述べる.) また，他の分子も図にみえる．——二つの酸素原子が仲間同士結び付いて**酸素分子**になっている．また二つのチッ素原子がいっしょになってチッ素分子になっている．空気の成分は，ほとんどチッ素，酸素，それと少量の水蒸気であって，あとは更に少量の二酸化炭素，アルゴン，その他である．このように，水の表面よりも上にあるのは，空気という気体であって，その中に水蒸気が含まれているのである．さて，この画の中で，何事が起こっているのか？ 水の分子はたえずふるえまわっている．表面のところにある分子は，ときおりふつうよりも少しばかり強い衝撃を受けて，外にたたき出される．この画は実は，**静止画**なのだから，こ

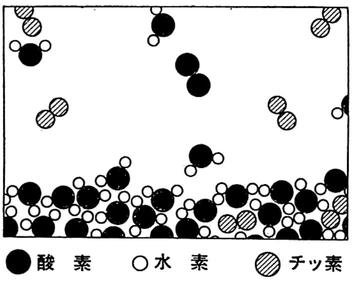


図1-5　水が空中へ蒸発していくところ

のようなことが起こっているということを読みとることはむずかしい．しかし，表面の近くにかいてある分子はいまたたき出されているところであり，また他の分子も恐らく同じだろうと想像することはできる．このようにして，水は分子一つずつ，減っていく．——つまり蒸発するのである．水のいれものの上に**ふたをして**しばらくおいておくと，空気の分子の間に水の分子がたくさんまじっていくようになる．また，一方，これらの蒸気の分子のどれかが水の方へおりてきて，また水といっしょになってしまうということもある．だから，コップに入れてふたをして 20 年もそこにおいてあった一杯の水——こんな動きのないつまらないものにも，そこには，はげしい面白い現象が絶えず起こっているのである．我々の目，あらっぽい我々の目でみれば，何の変化も起こっているようには見えない．しかし，もしもこれを十億倍に拡大してみることができたとすれば，それがたえず変化をくりかえしているのがわかるはずである．分子は，表面から出て行ったり戻ってきたりしているのである．

どうしてそれが**我々には変化がないように見える**のだろうか．それは出ていく分子の数と戻ってくる分子の数とが等しいからである！だから長い間をとってみれば，“異状なし”なのである．いれもののふたをとってしめった空気をふきはらい，乾燥した空気と入れかえたとしても，出ていく分子の数は前と全く同じである．それは，出ていく分子の数は水のふるえ運動に関係するだけだからである．しかし，水の上にある水分子の数は減るのだから，戻ってくる分子の数がそれだけ減る．つまり，戻ってくるのよりも，出ていく方が多くなり，水は蒸発する．よって，水を蒸発させたいなら扇風機をまわせ，である！

ここに問題がある：ではどういう分子が飛び出していくのか．一つの分子が飛び出していくのは，平均よりも大きいエネルギーが偶然に余分にそれに与えられて，それがそばにある分子の引力をふりきるのに必要な量に達するからである．出ていく分子は平均にくらべてエネルギーをよけいにもっているのだから，残された分子の運動は，平均として，前よりも**小さくなる**．だから蒸発すれば液体は**冷える**．空気中にあった蒸気の分子が水の方へ下りてきて，その表面に近付くと，急に大きな引力を受けることはもちろんである．入ってくる分子の速さは，このために大きくなり，その結果として熱を発生する．すなわち，飛び出すときには熱をもち去り，戻ってくるときには熱を発生する．全体としてさしひき蒸発がないときには，何事も起こらない——水の温度は一定である．水に息をふきつけて，蒸発する方の数がいつも大きくなっているようにしておけば，水は冷える．よって，スープをさますにはそれを吹け，である！

いま述べた現象は，実際は，もっとずっと複雑なものであるということを忘れてはならない．水の分子が空気の中へ飛び出して行くばかりでない．ときには酸素やチッ素の分子もやってきて，たくさんの水分子の中に“迷いこみ”，何とかもぐりこんでしまうのである．このよ

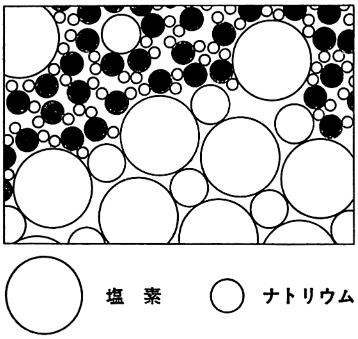


図 1-6　食塩が水に溶けていくところ

結　晶	●	○	a(Å)
食　塩	Na	Cl	5.64
カリ岩塩	K	Cl	6.28
	Ag	Cl	5.54
	Mg	O	4.20
方 鉛 鉱	Pb	S	5.97
	Pb	Se	6.14
	Pb	Te	6.34

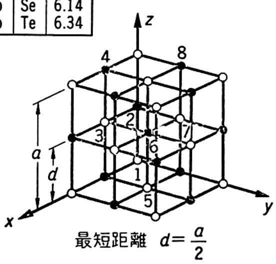


図 1-7

うにして，空気は水にとける：酸素やチッ素の分子も水にもぐりこみ，こうして水は空気を含むようになる．容器から空気を急に抜き去ってしまうと，入ってくる空気分子よりも飛び出していくものの方が多く，そのため泡ができはじめる．諸君も知っているとおり，これはダイバーにとって非常に危険なことである．

更にもう一つ別の現象を考えよう．図 1-6 に示したのは，固体が水にとけているところを，原子説的にみたものである．食塩の結晶を水に入れると，どんなことが起こるか．食塩は固体であり，結晶であり，“食塩アトム”が秩序よくならんだものである．図 1-7 は，食塩——塩化ナトリウム——の 3 次元的構造を示したものである．厳密にいうと，この結晶は原子からできているのではなくて，**イオン**と称せられるものからできている．イオンというのは，原子が余分の電子をいくつかもっているもの，あるいは電子をいくつか失ったものである．食塩の結晶には，塩素のイオン(電子 1 個を余分にもった塩素原子)とナトリウムイオン(電子 1 個を失ったナトリウム原子)とがある．食塩ではこれらのイオンがみな電気的な引力によって結び付いているのだが，これを水に入れると，その中にあるマイナスの酸素とプラスの水素とがこれらのイオンに引力を及ぼすので，そのあるものはふるえだして，ゆるんでくる．図 1-6 では，一つの塩素イオンがゆるみかかっており，他の原子はイオンとして水の中にういているのが表わされてある．この図は，かなりの注意を払って描いてある．例えば，水分子の水素側の端が塩素イオンの近くになっていることが多いようにかいてあるし，またナトリウムイオンのそばには酸素側の端がくることが多いようにかいてあることに注意してほしい．これは，ナトリウムは正，水の酸素側は負で，電気的にひきあっているからである．ところで，この図は，食塩がいま**水にとけつつある**ところを示しているものなのか，それとも**水から晶出しつつある**ところを示しているものなのか，それがわかるだろうか．もちろんそれは**わからない**．それは，ある原子が結晶から出ていく一方で，他の原子は戻ってきているからである．このような現象は，ちょうど蒸発の場合と同じように**動的**であって，水の中にある食塩の量が平衡に相当する量にくらべて，多いか少ないかによって話がきまるのである．平衡というのは，原子が出ていく割合と，戻ってくる割合とがちょうど同じになっているという状態である．もしも水の中に食塩がないならば，出ていく原子の方が戻ってくるのよりも数が多く，食塩は溶解する．逆に“塩のアトム”が多すぎると，出ていく方よりも戻る方が数が多くて，食塩は結晶しつつあるわけである．

最後に述べておきたいことがある．それは物質が**分子**からできているという考えは，実は近似的なものであって，これはある種の物質にしかあてはまらないということである．なるほど水の場合には，実際三つの原子がくっつきあって一つの分子になっていることはたしかである．しかし固体の塩化ナトリウムの場合には，このことはそれほど

明瞭ではない．ナトリウムイオンと塩素イオンとの，立方的な配列があるだけであって，どれとどれとをいっしょにして，これが“塩の分子”であるということにする理由は別段ないのである．

また溶解と沈澱の話に戻るが，食塩の溶液の温度を上げると，原子が出ていく割合も戻る割合も大きくなる．だから，食塩が溶解するのが多くなるか，少なくなるか，全体としてどっちへ向かって進行するかということを予測するのは一般に非常にむずかしい．温度が上がると，とけやすくなる物質もあり，とけにくくなる物質もあるのである．

1-4 化学反応

いままでに述べてきた現象では，すべて，原子やイオンがその相手を変えるということはなかった．しかし，もちろん，場合によっては，原子が組合せの相手を変えて新しい分子をつくるということもある．その例は図 1-8 に示してある．組合せの相手の原子が変わるような現象は，**化学反応**と名付けられているものである．そして，今まで述べてきたような相手の変わらないできごとを，物理的現象という．しかし，この二つの間にそうはっきりした区別があるわけではない．(我々が何という名前をつけようとも，自然はその営みをつづける．) さてこの図は，酸素の中で炭素が燃えているところを表わしているつもりである．酸素では，**二つの**酸素原子が非常に強くくっつきあっている．(**三つ**，あるいは**四つ**は，何故くっつかないのだろうか．これがこのような原子的現象の非常に特異な点の一つである．原子には非常に強い好みがある：ある特別な相手，ある特別な方向などを強く好むのである．原子がそれぞれ好きな相手や好きな方向をもっているのは何故か．この問題を調べるのは，物理学者の仕事である．しかしともかく，酸素二つで一つの分子をつくり，それ以上の相手を必要とせず，けっこうそれで満足しているのである.)

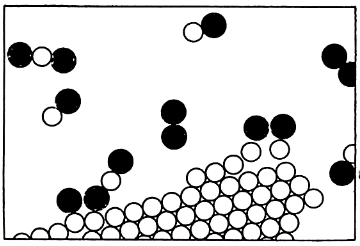


図 1-8 酸素のなかで炭素が燃えているところ

炭素の原子は，固体結晶(石墨でもダイヤモンド*でもよい)の中に存在している．そこで，例えば酸素分子の一つがこの炭素のところにやってきたとすると，二つある酸素原子のそれぞれが，炭素原子一つずつをひっぱり出し，新しい組合せ——“炭素—酸素”——となって飛び出していく．これが一酸化炭素という気体の分子である．その化学名は CO である．この表現はたいへん簡単である：“CO” と字を書けば，それがそのままこの分子の図になっている．ところで，炭素が酸素を引く力は，酸素が酸素を引く力よりも，また炭素が炭素を引く力よりもずっと大きい．だから，この現象において，やってくる酸素のエネルギーが小さいものであっても，酸素と炭素とは猛烈ないきおいで結び付き，その近所にあるものがそのエネルギーをもらい受ける．その結果，大量の運動エネルギーが発生することになる．これがすなわち**燃焼**である．酸素と炭素とが結び付くことによって，熱が得られ

* ダイヤモンドは空気中で燃やすことができる．

るのである．熱は，温度の高い気体の分子運動という形になっているのが普通であるが，ときにはその運動が非常に猛烈で，光が出る場合もある．これが焔のできるわけである．

しかし，一酸化炭素はこれでもう満足しているわけではない．酸素をもう一つくっつけることもできるので，さらに複雑な反応が起こる．酸素は，炭素と結びつくこともあるが，また同時に一酸化炭素の分子と衝突することもある．そして酸素原子一つが，CO と結びついて，結局，炭素一つと酸素二つからなる分子となる．これはCO_2と書き，二酸化炭素とよばれるものである．酸素が非常に少ないところで，炭素を急にもやすと(例えば自動車のエンジンの中で爆発が非常に速く起こって，二酸化炭素をつくるひまがないような場合)，一酸化炭素が多量にできる．このように原子の組合せが変わるときには，非常に多量のエネルギーが出る場合が多く，反応によっては爆発となったり，焔となったりする．化学者はこのような原子の組合せを研究して，あらゆる物質は，それぞれ原子が**一定の様式で組み合わさった**ものであるということを見出したのである．

この考えを説明するために，もう一つ他の例を考えよう．我々がスミレの咲いているところに行ってみたとすると，匂いがするが，我々は“この匂い”が何であるかを知っている．これはある種の**分子**，すなわち，原子が組み合わさったものであって，それが我々の鼻にやってきたものである．どんなふうにしてやってきたのだろうか．これはいわば簡単である．匂いというものが，空気中にある一種の分子であって，それがふるえまわり，あらゆる方向にたたかれているので，それが**偶然に**我々の鼻のところにやってきたのである．匂いにいわせれば，我々の鼻のところにきたいという特別の目的をもっていたわけではないことはもちろんである．それは分子がひしめきあっているものの中のあわれな存在であって，目的もなくさまよっているうちに，たまたま我々の鼻の中にやってきたというだけのことなのである．

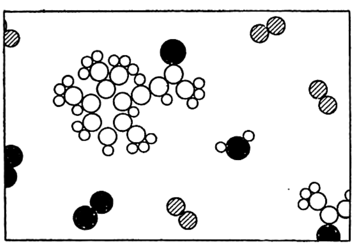


図 1-9　スミレの匂い

化学者は，このスミレの匂いというような特定の分子をとりあげて，それをよく調べ，原子が立体的に**どういうふうに組み合わさってできているか**を教えてくれる．例えば二酸化炭素の分子は，まっすぐで対称的であることがわかっている：O—C—O(このことは物理的方法によっても容易に決定される)．化学には，もっとずっと複雑な原子組合せがあるが，そういうものについても，探偵眼を辛抱づよくみごとにはたらかせて，原子の配列を求めることができる．図 1-9 は，スミレの近所の空気のようすをかいた画である．ここでも，空気の中にチッ素があり，酸素があり，水蒸気がある．(水蒸気があるのは何故か．それはスミレが**しめっている**からである．植物からは，みな，蒸散が起こっている.) その他に，“化物(ばけもの)分子”があって，炭素原子，水素原子，酸素原子がある特定の配列をとっている．この配列は，一酸化炭素よりもずっと複雑である：実におそろしく複雑な配列である．我々の図というものは2次元的にすぎないのだが，すべての原子の配列は3次

元的に精細にわかっている．このように化学的にわかっていることはたくさんあるのだが，そのすべてを図にあらわすことができないのは残念なことである．化物分子には，6個の炭素が輪になっているが，これは，平らな輪ではなくて，“ひだ”のある輪である．また，角度はいくらか，距離はいくらかということもすべてわかっている．だから，**化学式**は，このような分子の模式であるにすぎない．化学者がこのようなものを黒板にかくときには，だいたい2次元的にえがこうとする．例えば，この化物分子には，六つの炭素からなる“輪”もあるし，末端に炭素があり，二番目に酸素が一つあったり，水素が三つそれに結びついていたり，あるいは炭素二つと水素三つがくっついたりしている“鎖”などもある．

化学者はどんな方法によってこのような配列を見出すのであろうか．物質がいっぱい入っているビンをまぜて，もしもそれが赤くなるなら，水素一つと炭素二つとがこれこれの場所に結びついているということがわかり，また青くなるなら，そうではないということがわかるといったふうである．これは，これまでにある探偵物語の中でいちばんすばらしいものの一つ――有機化学である．これらのおそろしく複雑な組合せの中で，原子がどう並んでいるかを見出すために，化学者は二つの物質をいっしょにまぜてみて，どんなことが起こるかをしらべたりする．化学者が原子の配列を説明している話を，物理学者がきくと，どうしてそんなことまでわかっていたのか，ほとんど信ずることができなかった．この20年間に，そのような分子(いま話に出たようなものほど複雑ではないが，それの一部分を含んでいるような)を，物理的の方法によってしらべ，すべての原子の位置をきめるということも，場合によってはできるようになった．それは色をみるなどという簡単なことではなく，色がスペクトルの上で**どの位置を占めているかを測定する**のである．ところが，これはいかに，化学者のいうことはほとんどの場合正しかったのである．

実はこのようにしてスミレの匂いのなかには3種類の分子があって，水素原子の配列の点からみて，それらは互いに少し違ったものであることがわかってきた．

化学の課題の一つは，物質に名前をつけて，それが何であるかがわかるようにすることである．このものに名前をつけよ！ 名前というものは，それによってものの有様がわかるというばかりでなく，ここに酸素原子が一つ，そこに水素原子が一つあるというように，――それぞれの原子が何であるか，どこの位置にあるかを示すものでなければならない．だから，完璧な名前であるためには，化学名はこみいったものにならざるをえない．このスミレの匂いに，こみいった名前をつけて，その構造がわかるようにしろというなら，それは，4-(2,2,3,6テトラメチル-5シクロヘキサニル)-3ブテン-2オンということになるのであって，この名前だけでこういう配列だということがわかるはずなのである．我々は化学者がどんな困難にであっているかを理解で

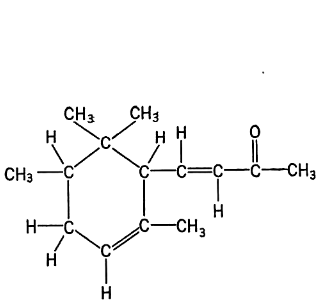


図1-10 この物質はα-イローンである

きるし，またなぜこんな長い名前が必要かというわけも理解できる．化学者は，何も，わけのわからぬ名前にしようとしているわけではない．言葉によって分子をいいあらわそうとして，非常にむずかしい課題ととりくんでいるのである！

そもそも原子というものが存在するということは，どうして**わかっている**のだろうか？ これは前に述べたやり方の一つによるのである：すなわち，まず原子があるという仮説をつくる．もしも物質が**ほんとに**原子からできているならば，こうなるはずだと予想をたてることができるが，予想したとおりの物事が次々に起こってくる．その他，もっと直接の証拠もある．例えば次に述べるようなことがある：原子は非常に小さいので光学顕微鏡では見えない——それどころではなく電子顕微鏡でも見えない．（光学顕微鏡ではもっとずっと大きいものしか見えない．）もしも，例えば水の中で原子が絶えず運動しているものであるならば，その中に何か大きなタマ，原子よりもずっと大きいタマを入れたとすると，そのタマはピクピク動きまわる．ちょうど大勢の人で非常に大きいタマを押しあって遊ぶタマコロガシによく似ている．人がいろいろな方向からおすものだから，タマは運動場を不規則に動きまわる．これと同じように，水の中に入れた“大きなタマ”も，それにあたる衝突の方向がそろっていないので，次々とあちこちへ動く．だから，我々がいい顕微鏡を使って非常に小さなもの（コロイド）が水の中にあるのをみると，その粒がたえずピクピク動いているのが見えるのである．これは原子がそれに衝突する結果であって，これが**ブラウン運動**である．

更に原子というものがあるということは，結晶の構造からもわかる．X線解析によって結晶構造を求めると，その立体的な“形”は，その結晶が自然に産するときに実際に示すような外形と一致する場合が多い．一つの結晶のいろいろな“面”の間の角度は，結晶がたくさんの原子“層”からなっているという仮定から計算した角度と，数秒の程度で一致する．

あらゆるものは原子からできている．これが根本的の仮説である．例えば，生物学すべてをくるめて，その中でいちばん重要な仮説は何かといえば，**生物がするあらゆることは原子がするのだ**ということである．いいかえれば，**生物のすることで，生物は原子からなり，それが物理の法則に従って行動しているという見地から理解できないものはない**ということである．このことは，はじめから自明だったわけではない：この仮説に至るまでには，実験と理論とが必要であった．しかし今ではこれは承認されており，生物学の分野で新しい考えを生み出すのに，一番有用な理論となっている．

鋼の一かけら，食塩の一粒など，原子が次々にならんでいるものが，あのような面白い性質をもっているなら：水——水滴が何マイルも何マイルも一つづきに地球の上をおおっているだけにすぎない水——その水が波をつくり，泡をつくり，海騒をたて，セメントの上を流れる

ときには面白い模様をえがくなら：もしもすべてこれらの水の流れの生態が原子の集積にすぎないというのなら，**まだまだどんなことでもできそうではないか**．もしも原子を，あるきまった方式で次々とくりかえして配列する代りに，また，スミレの匂いの場合のように，ところどころにこみいったところを作ってもいいが，ともかく，くりかえして配列する代りに，いろいろの種類の原子をいろいろに並べて，その場所その場所で，**みんな違った配列で**，くりかえしはないようにしたとしたら，このものはどんなすばらしい行動をすることだろう．諸君の目の前をあっちへ行ったり，こっちへ来たりしたり，また諸君に話しかけているこの“もの”さえ，これらの原子が非常に複雑に——あまり複雑なのでそれがどんなことをするのかちょっと想像できないのだが——集まっているかたまりではないか．我々自身が原子のかたまりであるというとき，我々は原子の**単なる**ひとかたまりだといっているのではない．一人一人違ったこのかたまりは，いろいろの可能性をもっているのであって，それは鏡の中に諸君がみる自分の姿に蔵されているのである．

第2章
物理学の原理

2-1 はじめに

これからこの章で論ずるのは，物理というものに関して我々がもっている一番根本的な考え方――つまりものごとの本性を現在我々はどうみるのか――といったことである．このような考えがすべて正しいということがわかるまでには，どんな歴史を辿ってきたのかというようなことについては，いまは触れない：それは諸君にだんだんとわかってくると思う．

科学において，我々の関心をひくものは，千差万別であり，またその性質もいろいろである．例えば，海岸に立って海を眺めているとしよう．そこには水がある，くずれる波がある，泡がある，水がボチャボチャ動いている，音，空気，風と雲，太陽と青い空，光がある．砂があり，また，いろいろな岩石がある．それには固いのもやわらかいのも，永もちするのもしないのもあり，色も構成もさまざまである．動物もいるし，海藻もある．腹のすいたのも，病気のもいる．そしてその波うちぎわには，これらに見入っている人がいる．そこには幸福や思索さえあるかも知れない．他の場所へ行ってみても同じことだ．そこにはいろいろなもの，さまざまの環境がある．どこへ行ったとしても，自然はこのように複雑きわまりない．そこで我々の探究心から，次のような疑問が湧いてくる．すなわち，これらのものごとは実に千差万別であるが，それを全体としてまとめてみて，そしてその千差万別の面というものは，比較的少数の基本的なことがらの作用，あるいは力がいろいろに組み合わさったものの結果として生じたものであるとして，理解することはできないのだろうか．

例えば：砂というのは岩石とは違うのだろうか．つまり，砂というのは非常に小さい岩石にすぎないのではなかろうか．月も大きな岩石なのだろうか．岩石というものを理解しさえすれば，砂をも月をも理解することができるのではなかろうか．風というのは，空気の動きであって，海で水が動くのに似たものなのではないか？いろいろな運動についていえば，どんな共通の面があるのか？いろいろな種類の音に共通なところは何か？色には何種類あるのか？等々．このように我々はすべてのことをだんだんと分析していく．あるいは，初めは別もののように見えたことをいっしょにしていく．そして，**違う**ことがらの数を**減らし**，それによってことがらを更によく理解することができるようになるということを目指しているのである．

上に述べたような疑問に対して，一部分の解答を与えうる方法が考え出されたのは，今から二，三百年前のことである．すなわち，それは**科学的方法**といわれるものであって，それは**観察と推理と実験と**が相まって形成されるものである．ここでは話を限って，**物理的原論**などといわれるものの根本的の立場，あるいは上の科学的方法を適用することによって生まれてきた基本的概念の意味といったものを述べるに止めよう．

いったい，我々が何かを“理解”するというのは，どういう意味なのであろうか．複雑な森羅万象が“世界”をなしている有様は，いわば，神々がチェスの大手合せをしているのに似ていて，我々はその見物人なのだと考えることができる．しかし，我々はその勝負の規則を知らないのである．我々にできるのは，それを**見物**するということだけだとする．永く見物しているうちには，若干の規則が我々にわかってくるということも，もちろん，あるだろう．この**勝負の規則**が，我々が**物理学原論**といったものにあたる．しかし，たとえ規則がすっかりわかったとしても，駒の一つ一つの動きがどういう意味をもっているかを理解することはできまい．それはあまりにこみ入ったものであり，我々の視野はあまりに浅く狭いものだからである．諸君がチェスができるなら知っているだろうが，規則をみんな覚えるのは大したことではない．しかし，一番いい手を選択すること，あるいはある対局者が何故その手を指すのかということを理解することは，非常に難しい．これにもまして，自然はそうなのである：とはいっても，その規則をすべて見つけ出すぐらいのことは可能であるかもしれない．しかし，現在ではすべての規則がわかっているわけではないというのが実情である．(チェスのキャスリング*に似たようなことが，自然にも時々起こって，我々はまだそれを理解することができないのである.)規則がまだすっかり解っていないということをしばらくおくとしても，規則に基づいてはっきり説明できるということがらは，むしろ非常に限られているのである．というのは，あらゆる状態というものは，ほとんどみなおそろしくこみ入っているのであって，規則にたよっているだけでは，勝負の進行についていけないし，いわんや次に何がはじまるかなどということは，到底，想像もつかないからである．だから我々は，勝負の規則は何かという，より根本的な問題だけに話を限らざるをえない．そしてその規則がわかったとき，我々は世界を“理解”したと考えるのである．

勝負をみても，その内容があまりよく解らないといったが，もしもそうであるならば，我々が“推量”した規則がほんとに正しいかどうか，それをどうやって知ることができるだろうか．大ざっぱにいって，それには三つの方法がある．第一は，自然がしつらえ，あるいは我々が自然をしつらえるとき，それが単純なものであって，関与する要素

---

* チェスの手の一種.

が少なく，これから何事が起こるかをはっきりと予測でき，我々の見出した規則がうまくあてはまるかどうかを検べることができるというような場合である．（将棋盤のすみに少ししか駒が残っていないような場合には，我々ははっきり見とおしをつけることができる.）

第二のいい方法は，たくさんの規則からやや一般的な規則を導き出して，それによって，もとの規則を験してみるというやり方である．例えば，ビショップは将棋盤の上で対角線の方向にだけしか動けないというのが規則である．したがって，一つのビショップに着目すれば，何手動かしても，いつも赤なら赤の目にいるということになる．だから，一つ一つの細かい動きに立ち入ることができなくても，ビショップがいつも赤なら赤の目にいるかどうかをしらべさえすれば，その動き方について，我々の推定したところが正しかったかどうかをためしてみることができるはずである．もちろん，しばらくやっていると，このビショップが突如として**黒い目**にいるのを発見することがある．（これは，ビショップが敵にとられたときに，歩がなりこんで王手をかけ，黒の目の上のビショップになったのであることはいうまでもない.）物理学でも，このようなことがある．細かいところに立ち入ることができなくても，やがて我々は，全般にうまくあてはまる一つの法則を見出すことができ，そしてまたいつかは**新しい法則**を発見するかも知れない．物理学原論の立場からいって，最も興味のある現象は，**新しい分野**，規則があてはまらない分野——**あてはまる分野ではない**——にあるのはもちろんのことである．こうして，我々は新しい規則を見出していくのである．

我々の考えが正しいかどうかを知るための第三の方法というのは，三つのうちでは荒っぽいのだが，おそらく一番有力だと思う．それは大まかな**近似**によるというのである．将棋の名人が，何故，特にこの駒を動かすのかということはわからなくても，キングを守るためにそのそばにコマをよせているのだ，局面によってそうするのがいいらしいということは，**大まかに**理解することができる．これと同じように，**小さいところ**がどうなっているかはわからなくても，将棋を理解しうるというのに似た意味で，自然を多少なりとも理解しうるということがしばしばあるのである．

以前は，自然現象は大きくいくつかに類別されていた．例えば，熱，電気，力学，磁気，物性，化学現象，光(あるいは光学)，X線，核物理，引力，中間子現象等々．しかし，我々の目指しているのは，これら**一連の**現象は，実は**全自然**がその相異なるいろいろの面を見せているのだという立場からこれを眺めようということなのである．**実験の背後にある法則を見出して，上のような類別を統合**しようというのが，今日の基礎理論物理学の課題である．歴史的にいっても，これまでもこの統合ということは絶えず行なわれてきた．しかし，時がたつにつれて，新しいことがらがいくつか見出された．かつては，いろいろのことがらがうまく統合されたと思われていたが，突如として，X線が

発見された．それから更にいくつかのものが統合されたところへ，中間子が発見された．だから，このような進み方は，あらゆる段階において，キチンと割り切れているというものでもないのである．大多数のものは統合されているとしても，いつも，それからは針金や糸があらゆる方向にたくさんのびているというのが現状である．このことについて次に説明しよう．

この統合の歴史の例として，次のようなことがある．まず**熱**と**運動論**とをとりあげよう．原子が運動しているとすると，その運動が大きいほどこの系は熱をたくさんもっているのだから，熱や温度の現象はすべて，運動の法則によってあらわされる．もう一つの著しい例は，電気と磁気と光との関係が発見されたことである．今日ではこれら三つのものは，電磁場とよばれている一つのものを，別々の面からみたものであるということがわかっている．更に，化学現象，いろいろな物質が有するいろいろの性質，化学量子力学にあらわれる原子粒子の行動などが，みな一つのものとして考えられるというのも，統合の一つである．

ここで当然問題となるのは，**あらゆるもの**が一つに統合され，そしてこの世界というものは，その**ただ一つ**のものが，別々の面をあらわしているのだというようなことになるのだろうか，そのことは，はたして可能なのだろうか，ということである．それは誰にもわからない．我々にわかっているのは，だんだんやっていると，いろいろなことを統合することができるということであり，そしてまた，それにうまく合わないものもみつかる．ちょうど，はめ絵をうまくあわせていこうとしているのだということである．はめ絵の数は有限なのか，そもそもはめ絵に境があるのかどうかということは，もちろんわかってはいない．はめ絵が有限個数で完了するものだとしても，そのことははめ絵が完成するまではわからない．しかし，これから述べようとするのは，できるだけ少数の原理によって，基礎的の現象を統合的に理解するというその立場からいって，この統合がどのくらいまでいっているか，現在ではどんな状態になっているかということである．簡単にいうなら，**物は何からできていて，いくつの要素で話がすむか**ということである．

2-2 1920年以前の物理学

ここでいきなり現在の自然観からはじめるのは，少し難しいから，まず1920年ころにはどうであったか，その様子を考えてみて，その中から二，三の点を取り上げてみることにしよう．森羅万象が演じている“舞台”は，ユークリッド幾何学の3次元の**空間**であって，**時**と称する流れにそって，物事が変化している．舞台の上にあるのは，例えば原子といったような**粒**であって，それぞれ**特性**をもっている．特性というのは，第一に慣性である：一つの粒が運動しているとすると，**力**がそれにはたらかない限り，同じ方向に運動しつづける．第二は力

である．当時，力には2種類あると考えられていた．第一の種類の力というのは，非常にこみ入った，また精細な相互作用力であって，それによっていろいろなアトムの複雑なくみあわせが作られているものである．例えば，温度を上げると食塩のとけるのが早くなるか，おそくなるかということをきめるのは，この力である．もう一つの種類の力というのは，遠隔相互作用――変化の激しくない静穏な引力――として知られているものであって，距離の自乗に反比例し，**万有引力**といわれている力である．この引力の法則はよくわかっていて，非常に簡単なものであった．しかし，物体が運動しているとき，運動をつづけるのは**何故か**，あるいは，万有引力の法則があるのは**何故か**，というようなことは，もちろん，わかってはいなかった．

自然を記述するというのが，いま我々の問題である．この立場からするならば，気体に限らず，**すべての**物質は，運動している粒子が無数に集まったものである．我々は，海辺に立ってたくさんのものを見たが，それらを互いに関連づけることはわけない．まず圧力：これはアトムが壁や何かに衝突することによって生ずる；すべての空気のアトムが全体として，一方向に動くなら，その移動が風である；内部の**不規則**な運動が**熱**である．また粒がたくさん集まって，密度過剰の波になり，おしあいへしあいしているところもある．この密度過剰の波は**音**である．こんなたくさんのことを理解することができるというのは，大した成果である．これらのうち，あるものについては，前章でもすでに述べておいた．

粒にはどんな**種類**があるか．当時は92種類だと思われていた：結局において92種類の原子が発見された．その化学的性質に応じて，それぞれ違った名前がつけられていた．

次の問題は，**近距離力**とは何か？ということである．炭素は，酸素一つ，あるいはときに酸素二つを引張ることがあるが，それは何故か？　酸素三つを引張らないのは何故か？　原子の間の相互作用のからくりは何なのか？　それは万有引力であるか？　答はノーである．万有引力は弱くて問題にならない．いま一つの力を想像し，それは引力のように距離の自乗に反比例するが，もっとずっと強く，しかも引力とくらべて次に述べるような違いをもっているものとしよう．引力では，あらゆるものが他のあらゆるものを引張る．しかしいま，この“もの”に**2種類**あると考えよう．そして，この新しい力(もちろん電気力である)は，“同”は**反撥し**，“異”は**引く**という性質をもっているとする．この強い相互作用をもっている“もの”を**電荷**という．

こうだとすれば，どういうことになるだろうか．いま“異”が二つ，すなわちプラスとマイナスとがあって，互いに引合って，非常にしっかりいっしょになっているとしよう．そしてまた，それからある距離のところに，別の電荷があるとしよう．このとき，この電荷は，何程の引力を感ずるであろうかといえば，それは**ほとんどゼロ**であろう．そのわけは，はじめの二つの電荷の大きさが等しいとすると，第一の

ものによる引力と第二のものによる斥力とが，ちょうどつりあってしまうからである．それ故，ちょっと離れれば力はほとんどない．しかし，もしもこの第三の電荷が**非常に近付いた**とすると，**引力**があらわれる．それは，“同”の間の斥力と“異”の間の引力とによって，“異”同士を近よせ，“同”をおしはなすからである．こうして斥力は引力よりも小さくなる．原子はプラスとマイナスの電荷から成り立っているが，原子がかなり離れていれば(万有引力は別として)その力をほとんど感じないのは，このためである．原子がもっと近くなると，“互いに内部をみぬいて”，その電荷の分布をかえ，その結果として非常に強い相互作用があらわれるのである．原子間の相互作用の根本は，要するに，**電気的**なものである．この力の大きさは莫大なものであって，プラスとマイナスとはすべてできるだけ強く結び付いているのが普通である．我々自身さえも例外ではないが，すべてのものは非常に強く作用しあうプラスとマイナスのこまかい粒からできているのであって，それがうまくバランスしているのである．ときにはたまたま，マイナスあるいはプラスがうばい去られる(マイナスをうばい去る方がやさしいのが普通である)こともある．そんな場合には，**バランスがくずれて**，電気的引力の影響があらわれてくる．

万有引力にくらべて，電気力ははるかに強い．その見当をつけるために，ここにさしわたし1 mmの砂が2粒あって，それが30 mの距離にあるとしよう．この二つの間の力が釣り合っていないとし，また“同”が斥けあうということもなくて，あらゆるものが相手のあらゆるものを引いているとする．そうしたら，力はどのくらいの大きさになるか？　驚くなかれ，この二つの間には**300万トン**の力がはたらくことになる！　電気的効果がわかるくらいにあらわれるには，負あるいは正の電荷の数に，**ほんの**少しの過不足があればよいのである．帯電しているものと帯電していないものとの間に，一見，差があるようにはみえないが，それはまさにこのためなのである．帯電というようなことに関与する粒の数は非常に少なく，一つの物体の目方や大きさにはなんらの差を生じないのである．

このように考えてくると，原子というものはだいぶ理解しやすいものになった．原子には，中心に“原子核”があって，正の電気をもち，非常に重い．この原子核のまわりを，非常に軽くて負の電気をもっているいくつかの“電子”がとり囲んでいる．これまではこのように考えられていたのである．しかし，今では話はもうちょっと前進している．原子核自身の中に，陽子と中性子という2種類の粒子があって，それはほとんど同じ重さであり，共に非常に重いというのである．陽子は帯電しているが，中性子は帯電していない．いま，一つの原子の核の中に陽子が六つあるとすると，そのまわりには電子が六つある．(普通の物質の世界では，負の粒子はすべて電子であって，それは原子核を構成している陽子や中性子とくらべると非常に軽い．) これは化学元素表で6番の原子であって，炭素と呼ばれる．8番の原子は酸素と

呼ばれる等々，化学的性質は，原子の**外側**にある電子によってきまり，その電子が**いくつ**あるかということだけによってきまるのである．このように，ある物質の**化学的性質**は，電子の数という一つの数のみによってきまる．(化学者の元素の表は，1, 2, 3, 4, 5 等でもよいのである．“炭素”という代りに，電子を六つもっているという意味で“元素6番”といってもよい．もちろん元素というものがはじめて発見されたときには，このように番号がつけられるということはわかっていなかった．また番号だけにすると，かえってものごとが複雑になるかも知れない．あらゆるものを番号で呼ぶよりは，やはり名前と符号をつけておく方がよさそうである.)

電気力については，更にいくつかのことがわかってきた．電気的の相互作用を文字どおり解釈するなら，二つのものが，正対負で互いに引きあうというだけのことになる．しかし，この考えは相互作用をあらわすのには，やや不適当であることがわかった．それで，正の電気があると，空間をいわば変形させ，そこに一つの“条件”をつくり，そのため，そこに負の電荷をもってくるとそれが力を感ずる，といった方がより適切なのである．この力を生ずる潜在能力を**電場**という．そして一つの電子をある電場におくと，それが“引かれる”というのである．

こうすると，ここに二つの規則があることになる．(a) 電荷が場をつくる．そして，(b) 場の中の電荷は力をうけて動く．こう考えるわけは，次の現象を取り扱ってみると明らかになる：例えば，櫛なら櫛を帯電させ，帯電した紙を，それからある距離のところにおく．そして櫛を前後に動かしてみる．そうすると，紙はいつでも櫛の方に向かって反応する．櫛の動きを速くすると，紙は少し取り残され，反応に**おくれが出る**．(はじめ櫛の動きがそれほど速くないときには，めんどうなことが起こる．これは**磁気**のためである．磁気の影響は**相対的に運動する電荷**によって生ずるのであって，磁力と電気力とは一つの場に帰せられ，全く同一のものの違った二つの面とみることができる．変化する電場には，必ず磁気が伴う.) 紙をもっと遠くにすると，反応のおくれは更に大きくなり，そして面白いことが起こってくる．二つの帯電体の間の力は，距離の**自乗**に逆比例するのであるが，これに対して，電荷を振動させると，その影響ははじめに想像するよりも**ずっと遠く**までに及ぶのである．すなわち，影響の小さくなり方は逆自乗よりもずっとゆるやかである．

ここで一つのアナロジーをあげよう：我々が水泳プールの中にいるとして，すぐそばにコルクが浮んでいるとする．そこでもう一つ別のコルクを手にもって水をおしてやれば，それによってはじめのコルクを“直接”に動かすことができる．いま，この二つの**コルク**だけに目をつけてみたとすると，一方のコルクは，他方のコルクの運動に応じて，直ちに運動をはじめたということになる――この二つのコルクの間には一種の“**相互作用**”があるといえる．我々が動かしたのは実は

水なのである；そして次にその**水**が他方のコルクを動かしたのである．すなわち，水をちょっとおせば，その近くにあるものは動き出すという“法則”をたてることができる．もしも，第二のコルクがもっと遠くにあるならば，もちろん，それはほとんど動かない．我々は水を**局部的に**動かしただけだからである．ところが，コルクをボチャボチャふるわせていると水の運動が水を動かし，その水の運動が次の水を動かすという新しい現象が起こりはじめて，波が遠くに伝わっていく．このように，ものをふるわせると，**ずっと遠くまで**振動的影響が及ぶのであるが，これは直接の相互作用として理解することはできない．だから，直接の相互作用という考えは，水の存在ということにおきかえねばならず，電気の場合には，**電磁場**と呼ぶものにおきかえねばならないのである．

電磁場は，波をはこぶ．例えば，**光**もそれであり，**放送**に使われる波もそれであるが，**電磁波**というのがその一般的な名称である．これらの振動波の**周波数**はいろいろである．一つの波と他の波との違いは，**振動の速さ**にある．電荷を振動させるのをおそいところからだんだん速くしていって様子をみると，その全域にわたって，それぞれいろいろ違った現象があらわれるが，1秒間の振動数という一つの数を指定するだけで，それらをまとめて整理することができる．部屋の壁についている電流回路から得られる普通の“電源”の振動数は，1秒におよそ100である．振動数を500ないし1000キロサイクル(1キロサイクル＝1000サイクル)に上げると，空中に“放送中”ということになる．ラジオ放送に使われる振動数は，このあたりである．(この空中は，**空気**に関係がないことはもちろんである．空気がなくても，ラジオ放送はできる.）更に周波数を上げると，FM放送やテレビ放送に使われる範囲になる．まだもっと先のことをいうと，例えば**レーダー**などには極超短波が使われる．もっともっといくと，これらのものを“見る”ための道具はいらなくなり，人間の目で直接に見ることができるようになる．周波数が1秒に 5×10^{14}～5×10^{15} の範囲となって，さっきの電気を帯びた櫛をその速さでふるうことができたとしたら，この櫛が，周波数によって，赤や青や紫に見えることになる．周波数がこれよりも下ならば赤外線，上ならば紫外線である．周波数がある範囲内にあると，我々の目に見えるが，そういっても，物理学者の立場からいえば，他の部分にくらべて，ここの部分の方が特に面白いというわけでもない．しかし，人間の立場からみれば，これは，より関心のあることで**ある**のはもちろんである．更にこれ以上の周波数にいくと，X線になる．X線は，周波数の非常に高い光にほかならない．もっといくと，ガンマ線になる．X線といい，ガンマ線といっても，この二つの言葉はほとんど同じ意味である．原子核からくる電磁波をガンマ線，原子からくる高エネルギーの電磁波をX線というのが普通であるが，周波数が同じなら，その源は何であっても，物理的にこれを区別することは不可能である．更に周波数の高いところへいって，1秒に 10^{24}

回くらいとなると，それは例えばこのCaltech*にあるシンクロトロンで人工的に発生させることができることがわかっている．**宇宙線**の中にある波動のうちには，びっくりするくらい周波数の高い電磁波——上のよりも1000倍も速い周波数の——がみつかる．この種の波は，人為的にはつくれない．

表2-1　電磁波のスペクトル

周波数/秒	名　称	およその性質
10^2	電気的攪乱	場
$5\times10^5\sim10^6$	ラジオ放送	波　動
10^8	FM～TV	波　動
10^{10}	レーダー	波　動
$5\times10^{14}\sim10^{15}$	光	波　動
10^{18}	X線	
10^{21}	γ線(原子核の)	粒　子
10^{24}	γ線("人工的の")	粒　子
10^{27}	γ線(宇宙線のなかの)	粒　子

2-3　量子物理学

電磁場という考え方，そしてまたこの場に波がつたわるということを述べてきたのだが，これから説明するように，これらの波の様子というものは，実に波らしくない奇妙なものなのである．周波数が高いと，波としてよりも，**粒**として行動するといった方がずっと事実に近い！　この奇妙な行動を説明するのが，1920年直後に発展した**量子力学**である．3次元空間としての空間観があり，そしてそれと別のものとしての時間観があるという考えは，アインシュタインによって変更され，時空間という一つのものに統合された．そして次に，引力をあらわすために，**曲率のある**時空間に統合されたのであった．これは1920年のすこし前のころであった．かくて"舞台"は時空間にかわり，引力はその時空間のある変形であるらしい．そのうちに，粒子の運動の法則が正しくないことが発見された．原子の世界では，"慣性"や"力"の力学法則は，**正しくない**——ニュートンの法則は**間違っている**．そして，微視的なスケールにおけるものの行動は，巨視的なスケールにおけるものの行動と**全然**違ったものであるということが発見されたのである．この辺のことが，物理学を困難にし——かつ非常に面白くするところなのである．困難だというのは，微視的なスケールにおけるものの行動がたいへん"不自然"だからである．我々は，そういうことについての直接の経験を一つももっていない．微視的のところにおけるものの行動は，既知のものとは全く違っている．だから，その行動は，数式であらわすより他にない．しかし，これは困難なことであり，大いに洞察力を発揮しなければならない．

量子力学には，いろいろな特色がある．まず第一に，一つの粒子が，きまった位置ときまった速さをもっているという従来の考えは，もは

*　California Institute of Technology の略称．

やここでは許されないのである；その考えは間違っているのである．昔流の物理学がどう間違っていたかということを示す一例をあげるならば，量子力学には，あるものがどこに存在し，またそれがどんな速さで運動しているか，ということの両方を知ることはできないという法則があるのである．運動量の不確定と位置の不確定とは相補的であって，両者の積は一定である．この法則は，次のように書ける：$\Delta x \cdot \Delta p \geqq \frac{h}{2\pi}$．このことについては後にくわしく述べる．ところで，次に述べるような非常に不思議なパラドックスがあるが，上の法則によってこれを説明することができる：もしも原子がプラスとマイナスの電荷から成り立っているのならば，マイナスの電荷がプラスの電荷の上にのっかって(マイナスとプラスとは互いに引きあっている)，電荷を完全に帳消しするくらいに近くくっついてしまいそうだが，そうならないのは何故だろうか？ **何故原子はこんなに大きいのか？** 原子核が中心にあって，電子がそのまわりにあるというのは何故か？ 昔は，それは原子核がそれだけ大きいからだと思っていた；しかしノーである．原子核は**非常に小さい**のである．一つの原子の直径はだいたい 10^{-8} cm であるのに対して，原子核の直径はだいたい 10^{-13} cm である．もしここに一つの原子があって，それの原子核を目に見える大きさにしようとするなら，原子全体を大きな部屋くらいの大きさに拡大しなければならない．そうすれば，原子核はほんのごみつぶくらいになって肉眼でやっと見えるようになる．ところが原子の目方は**ほとんど全部**この小さい小さい**原子核**が占めているのである．しかしそれにしても，電子が原子核の方へ落ち込んでこないのは，何のはたらきによるのだろうか？ それはこうである：もしも電子が原子核の中にあるというなら，我々にはその位置が正確にわかっていることになるが，不確定性原理によれば，そのときは電子は非常に**大きな**(しかし不確定の)運動量，したがって非常に大きな**運動エネルギー**をもっていなければならないということになる．エネルギーがそんなに大きいならば，電子は原子核から飛び去ってしまう．そこで，電子はある妥協をするのである：電子はこの不確定の入る余地を残して，この原理にあうように小さな振動運動を行なうのである．(ここで思い出してほしいのは，一つの結晶でも，それを冷やして絶対0度にしたときに，原子は運動をやめないで，振動しつづけているということである．これは何故か？ もしも運動をやめたなら，原子の位置がはっきりわかり，運動はゼロだということになるが，これは不確定性原理に反する．我々は原子がどこにあり，またどんな速さで運動しているかを知ることができないのだから，原子はそこでぶるぶる振動をつづけているよりほか仕方がないのである！)

量子力学は，科学の考え方，哲理といったものに，非常に重大な変革をもたらしたのであるが，その一つは，ある条件の下で，次に何が起こるかということを**正確に**予報することはできないということである．例えば，一つの原子を考えると，それが光を発するような状態に

おくこともできるし，また，それが光を出したなら，光子――後に述べる――を捉えて測定することもできる．しかし，原子が**いつ**光を出すかということを予報することはできない．また原子がいくつかあるときに，**どの原子**が光を出すかを予報することもできないのである．これは，内部の“しかけ”がまだ充分よくわかっていないからだと，諸君はいうかも知れない．ところが，そうではないのである．そういう内部のしかけというものは**ない**のである；今日，我々が理解するところによると，自然というものは，一つの実験をしたときに，**何が起こるかをはっきり**予報することは，**原則的に不可能**であるという性格をもっているのである．これはたいへんなことである；かつて哲学者は，科学の根本的の要請は，条件を同じにすれば，同じことが起こるということであるといった．しかし，これは**正しくない**；これは科学の根本的要請では**ない**のである．じっさいは，同じことは**起こらず**，我々が知りうるのは，何が起こるかということの統計的の平均であるに過ぎない．こういっても，科学が全然崩壊してしまったのではもちろんない．さて，哲学者は，科学として**絶対に必要**なものは何かということについて，いろいろな意見を述べている．しかし，これまでのところでは，それらはみなむしろ素朴であり，おそらく間違っているのである．例えば，ストックホルムで一つの実験を行ない，そして同じ実験をキトーで行なったとすれば，**同じ結果**にならなければならないというのが，科学研究にとって根本的のことであると，ある哲学者はいう．しかし，これは完全にあやまりである．**科学**がそのようなものであるということは必要ではない．これは**経験的事実**であるかも知れないが，必要ではない．例えば，この実験というのがストックホルムで北極光をみるということであれば，キトーではそれは見えない；これは違った現象である．“しかし”と諸君はこういうだろう．“これは外界の問題である；ストックホルムで自分のからだを箱に閉じこめて，幕をおろしたとしたら，その中で何か違いが起こるだろうか？”起こるのである．どの方向へも自由にふれる振子があったとして，それを一方に引張ってから放したとすると，振子の振動はほとんど一平面に限られているが，完全にそうではない．その面は，ストックホルムではゆっくり回転していくが，キトーでは回転しない．幕はおろしてあるのだ．このようなことが起こっても，別段科学が崩壊するわけではない．科学の根本仮説，根本哲理とは，**何か？　一つの考えの正否を検す唯一のものは実験である**ということを第1章で述べた．もしもストックホルムで行なった実験とキトーで行なった実験の大部分が同じようになったとすれば，その“大部分の実験”は，何か一般的の法則をたてるのに役立つであろう．そして同じようにならなかった実験は，ストックホルム附近の環境のせいであったといえるだろう．いずれにしろ我々は実験の結果をまとめる方法を考え出すのであって，その方法がどんなものであるかを予め知らされる必要はない．同じ実験をすれば同じ結果が生じるということがわかったとすれば，それは

それで結構である．しかし我々が実験をしてみて，そう**いかない**なら，そう**いかない**のである．我々はみるとおりのものを取り上げ，現実の経験にてらして他の考えをみなまとめていかなければならない．

再び，量子力学と基礎物理学に戻るのであるが，ここで量子力学的原理のくわしいところに立ち入ることはできない．それは，なかなか理解しにくいからである．ここでは，そういう原理があることとして，その結果がどんなことになるか，二，三の例を述べることにしようと思う．量子力学の一つの結果によると，我々がこれまで波動として考えてきたものが粒子のようなふるまいを示したり，また逆に，粒子が波動のようなふるまいを示すことがあるのである．一つの波動というものと，一つの粒子というものとの間に区別はないのである．このように，量子力学は，場とその波動というものと，粒子というものとを一つに**まとめる**のである．周波数が低いと，現象には場としての面の方がよくあらわれて，近似的には普通のことばで記述するのに都合がよい．しかし周波数が高くなると，我々が普通に使っているような測定装置に対しては，現象には粒子としての面の方がよくあらわれる．周波数にもいろいろあるといったけれども，周波数がだいたい1秒に10^{12}以上になると，その周波数が直接的に関係してくるというような現象はまだ見付かっていない．我々は，量子力学の粒子-波動の考えが成り立つとして，それから出てくる法則を使って，粒子のエネルギーからそのような高い周波数を**算出する**だけのことなのである．

かくて，我々は電磁的相互作用について，新しい見方をするようになったのである．電子，陽子，中性子に加えて新しい**粒子**を考える．この新しい粒子は**光子**である．電子と陽子との相互作用は電磁理論であるが，量子力学的にみて，あらゆる点で正しいこの新しい見方は，**電磁量子力学**と呼ばれる．光と物質，あるいは電場と電荷の相互作用に関するこの基本的理論は，これまでの物理学における最大の成果である．引力と原子核現象とを除いて，あらゆる普通の現象の基本的法則が，この一つの理論の中に含まれているのである．例えば，この電磁量子力学から，既知の電気的，機械的，化学的の法則はすべて出てくる．撞球のタマの衝突，磁界における針金の運動，一酸化炭素の比熱，ネオンサインの色，食塩の密度，水素と酸素が反応して水になる——これらの現象はみなこの一つの法則から出てくることがらなのである．ことがらが簡単で，近似がゆるされるなら，これらの現象のくわしいところまで立ち入ることもできるが，そんなことはまずほとんどない．しかし，どんなことが起こっているかを或る程度まで理解することができる場合は多い．現在のところ，原子核よりも外側で起こっていることについては，電磁量子力学に例外は一つもない．原子核の内部については，そこで何が起こっているかはわかっていないので，例外があるかどうかもわからない．

原理的にいって，電磁量子力学は化学のすべてと生命の理論である．というのは，生命というものが最終的には化学に帰し，そしてまた化

学はすでに物理学に帰しているからである.（物理学の中で，化学に関係のあるところは，すでによくわかっている.）更に，この電磁量子力学という大したものによると，新しいことがいくつも予言されるのである．まず第一に，非常に高エネルギーの光子やガンマ線等の性質が予言される．また次のような著しいことも予言された：電子のほかに，質量はそれと同じで，電荷は反対の粒子，**陽電子**とよばれるものがあるはずであり，それが電子に近付いていっしょになると，光，すなわちガンマ線が出るというのである.（光とガンマ線とは，要するに全く同じものである．周波数の目盛で別のところにあるだけのことである.）これを更に一般化して，おのおのの粒子には，それぞれ反粒子があるということも正しい．電子の場合には，その反粒子は陽電子という別の名前をもっているが，他のたいていの粒子の場合には，反何々，例えば反陽子とか反中性子とかいう．電磁量子力学では，二つの数を指定しさえすれば，他のいろいろの数はたいていそれから出てくると考えられている．指定するその二つの数というのは，電子の質量といわれるものと，電子の電荷といわれるものである．実をいえば，これは全く正しいとはいえない．というのは，化学においては，それぞれの原子核の重さをあらわす1列の数があるから，である．このことについては次に述べる．

2-4　原子核と粒子

原子核は何からできているのか，そしてそれはどんなふうになっていっしょにかたまっているのか？　それは莫大な力によっていっしょにかたまっていることがわかっている．それが解放されるときにでるエネルギーは，化学エネルギーとはくらべものにならないくらい厖大なもので，その違いはTNT爆発と原子爆弾との違いと同じである．これは，原子爆弾が原子核の内部における変化に関係しているのに対して，TNTの爆発は，原子の外側にある電子の変化に関係しているからであるのはいうまでもない．問題は，原子核の内部で陽子と中性子とを結び付けている力は何かということである．電気的の相互作用が光子という一つの粒子に関係づけられるように，中性子と陽子の間の力にもある種の場があって，この場がピクピク動くと，それが一つの粒子のようにふるまうのではあるまいか，というのが湯川秀樹の考えである．もしもそうだとすると，自然界には，陽子や中性子以外にも，まだほかの粒子がありうることになる．そして，湯川はこれまでにわかっている核力の特性から考えて，この粒子の性質はこれこれであるはずだということを導き出すことができた．例えば，この粒子の質量は，電子の二,三百倍であるはずだと予言した；ところがこれはいかに，宇宙線の中にまさしくこの質量をもった粒子が発見されたのである！　しかし後になって，これはまた別の粒子であることがわかった．この粒子はμメソンあるいはミューオンなどと呼ばれている．

ところが，これから少したって，1947,8年の頃，また別の粒子が発

見された．この粒子は，π メソンとかパイオンとかいうものであって，湯川の条件を満足する．核力を生ずるためには，陽子と中性子のほかに，このパイオンを考えに入れなければならないというわけだ．そこで諸君はこう叫ぶだろう．“何とすばらしいことだ！ この理論では，湯川の思ったように，パイオンを考えに入れて量子核力学が組み立てられた．そしてそれがうまくいった．これであらゆることが説明される！”しかし残念でした．ここに出てくる数式は非常に難しくて，その理論からどういう結果が出てくるかという見当をつけたり，また実験とくらべてみたりすることは，まだ誰にもできないのである．こういう状態がいまやほとんど 20 年続いてきた．

我々は一つの理論にこだわっているのだ．それが正しいか間違っているかは知らないが，**少し**間違っている．あるいは少なくとも不完全であることはわかっている．我々がこの理論からどんな結果が出てくるかを計算しようとして，モタモタしている間に，実験屋はいろいろのことを発見している．例えば，彼らはこの μ メソンすなわちミューオンをとっくに発見しているのだが，我々にはこれがどこにはまるのかわかっていない．また，宇宙線の中にも，まだほかの“番外の”粒子が多数発見されている．今日ではおよそ 30 種類の粒子があるということになっているが，これらすべての粒子の間にどんな関係があるのかとか，なんのために自然がそんな粒子を必要とするのかとか，互いの関連はどういうものなのかとかいうことを理解するのは，容易なことではない．我々が今日理解するところによれば，これらいろいろの粒子というものは，同じ一つのものがいろいろの違った面をみせているというものではない．こんなにたくさんの別々の粒子があるということは，バラバラな知識がたくさんあるだけで，よい理論がないということを示している．電磁量子力学が大成功を収めた後にも，原子核物理にはあらっぽい知識がかなりあるのである．それはいわば半分は経験，半分は理論であって，陽子と中性子との間に或る種の力を仮定して，それからどういう結果が出てくるかを調べるというのだが，その力がどこからくるのかは，実はわかっていない．これを別にしては，我々はほとんど進歩していないのである．化学元素の数は実にたくさんある．化学では，それら元素の間に，思いもよらないあることが突如として発見されたのであって，それはメンデレーフの周期表に示されている．例えば，ナトリウムとカリウムとは化学的性質がよく似ていて，メンデレーフの図表で同じ行にある．上に述べた新しい諸粒子に対しても，メンデレーフ式の図表に相当するようなものがあるのではないかと思われていたが，アメリカのゲルマン，日本の西島によって，そのようなものの一つが独立につくられた．彼らが粒子を分類するにあたって基準としたのは，新たに導入された一つの数であって，“奇妙さ” S とよばれるものである．この数は電荷と同じように，粒子それぞれがもっている．そして，核力によって起こる反応では，電荷が全体として保存するように，この数も保存するのである．

表 2-2　素粒子

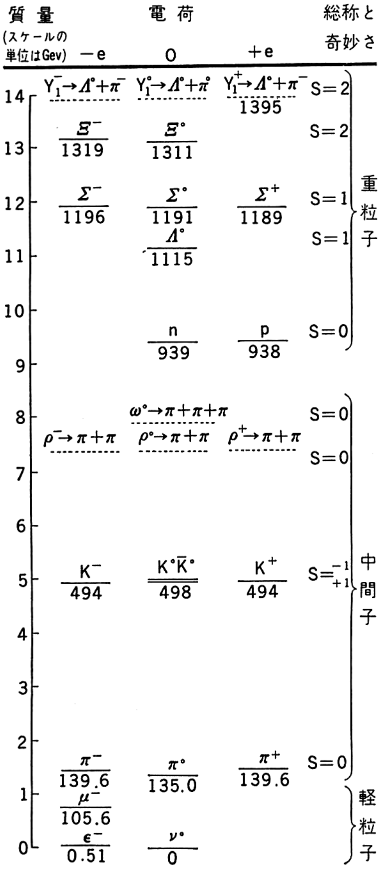


表 2-2 には，すべての粒子が示してある．いまここでくわしく論ずるわけにはいかないが，この表をみると，我々の知らないことがいかに多いかということがわかるだろう．おのおのの粒子の下には，その質量が Mev という単位で与えてある．1 Mev は 1.782×10^{-27} グラムに等しい．この単位が採用されるようになったのには，歴史的な理由があるのだが，ここではふれない．質量の大きい粒子は，この図の上の方に書いてある；中性子と陽子とがほとんど同じ質量であることもわかる．たての行には，電荷が同じの粒子が並んでいる．中性のものは一つの行に，正の電荷をもっているものはみなその右の行に，負の電荷をもっているものはその左の行に書いてある．

また，粒子は実線，“共鳴”は破線で示してある．この表に書いてない粒子もいくつかある．例えば，質量ゼロ，電荷ゼロの重要な粒子——光子とグラビトン——がそれである．このような粒子は，重粒子-中間子-軽粒子という分類形式にはうまくはまらない．また新しい共鳴(K^*, φ, η)で，この表に書いてないものもいくつかある．中間子の反粒子は表にのっている．軽粒子と重粒子の反粒子は別の表に書かなければならなかったのだが，それを書いても，この表を電荷ゼロの行で鏡にうつしたのと全然同じになるわけだ．電子，ニュートリノ，光子，グラビトン，陽子以外の粒子はすべて不安定であるが，それらが崩壊してできるものは，共鳴の場合だけが示してある．軽粒子は原子核との間に強い相互作用がないので，奇妙さをこれにあてがうことはできない．

中性子や陽子の仲間の粒子は，**重粒子**とよばれ，それには次のようなものがある．すなわち，質量が 1154 Mev の“ラムダ”があり，他にシグママイナス，シグマゼロ，シグマプラスの三つがあって，その質量はみなほとんど同じである．1～2%の程度でほとんど質量の同じの群，あるいは組になっているのである．一つの仲間の中の粒子は，同じ奇妙さをもっている．まず第一は，陽子-中性子の二つ一組であり，次は単独(ラムダ)であり，その次がシグマの三つ一組であり，最後がカイの二つ一組である．最近 1961 年には，更に新粒子が二，三発見された．しかし，それらははたして**粒子なのだろうか？**　その寿命は非常に短く，できるとすぐほとんど瞬間的に崩壊してしまう．これを新しい粒子と考えるべきなのか，それともそれは，或るきまったエネルギーを有する“共鳴”相互作用の一種であって，それは崩壊によって生ずる Λ 粒子と π 粒子との間に起こるものであると考えるべきなのか，我々にはわかっていない．

核反応に関与する粒子の中には，重粒子の他に，**中間子**とよばれるものがある．まずパイオンがある．これには，正と負と中性のものがあって，三つ一組になっている．また，K 中間子という新しいものも発見された．これは K^+ と K° との二つ一組になっている．また，一つの粒子が**それ自身の反粒子でない限り**，あらゆる粒子にはその反粒子がある．例えば，π^- と π^+ とは反粒子であるが，π° はそれ自身の反

粒子である．K^- と K^+ とは反粒子である．K° と $\bar{K}^\circ$ ともそうである．更に1961年には，ほとんど瞬間的に崩壊してしまう中間子，あるいは中間子**らしきもの** ω が発見された．この ω とよばれるものは，我々の単位で質量780であって，三つのパイオンになる．二つのパイオンになるものもあるらしいが，あまりはっきりしていない．中間子，重粒子などの粒子と中間子の反粒子とはこの同じ表にのせてあるが，重粒子の反粒子は，電荷ゼロの行で"鏡にうつした"別の表になる．

メンデレーフの周期表では，多くの稀土類元素がはみだしているが，その点を除けば，たいへんうまくいっている．これと同じように，我々の表からはみだしているものもたくさんあるのである．それは，核の中で強い相互作用も示さず，核の相互作用にも関与せず，また核とも強い相互作用も示さないような粒子である．これらの粒子は，軽粒子とよばれ，次のようなものである．まず電子がある．質量は非常に小さく，我々の単位でたった0.510 Mevしかない．次に μ 中間子，すなわちミューオンがある．その質量は電子よりはずっと大きく，その206倍である．これまでのすべての実験の結果からいえることは，電子とミューオンとの違いは質量の点だけである．他のあらゆることは，ミューオンに対しても電子に対しても全く同じように起こり，違うのはミューオンの方が電子よりも重いというだけのことである．重いのがあるというのは何故だろうか．何のためだろうか．それはわからない．これ以外に，ニュートリノという中性の軽粒子もある．その質量はゼロである．実は，ニュートリノにも2種類あって，一つは電子と，他はミューオンと関係があることが，今ではわかっている．

核粒子と強い相互作用を示さない粒子が，まだ他に二つある．一つは光子である．それから，もしも万有引力の場に量子力学的類推がきくならば(万有引力の量子理論はまだできていない)質量ゼロの一つの粒子，グラビトンがあるはずである．

この"質量ゼロ"とはいったい何のことか．ここでいう質量とは，**静止している**粒子の質量という意味である．一つの粒子の質量がゼロであるということは，いってみれば，それは**静止していることはありえない**ということである．光子は決して静止していない．つねに1秒間186,000マイルの速さで動いている．質量とは何を意味するのか，このことは，相対性理論を理解すれば，もっとよくわかるようになる．これについては，そのうちに述べることにする．

このように我々の前にはたくさんの粒子があり，それらが素材となって物質が構成されているようである．幸いなことには，それらの間の**相互作用**がそれぞれ**みな**違うというわけではない．事実，粒子の間の相互作用は**4種類**に限られている．強い方からいえば，核力，電気力，β 崩壊相互作用，万有引力である．光子はすべての帯電粒子と関係があって，その間の相互作用の強さには $\dfrac{1}{137}$ という数が出てくる．このカップリングの法則はくわしくわかっており，これがすなわち電磁量子力学である．万有引力はすべての**エネルギー**と関係するが，そ

のカップリングは極端に弱く，電気のカップリングよりもずっと弱い．次にいわゆる弱崩壊――ベータ崩壊というのがあって，それによって中性子が陽子と電子とニュートリノとに比較的ゆっくりと崩壊する．これの法則は一部分わかっているだけである．いわゆる強い相互作用，中間子–重粒子相互作用は，このスケールで1という強さであるが，その法則は全然わかっていない．もっとも，任意の反応においては，重粒子の数は変化しないという規則くらいはいくつかわかっている．

表 2-3　基本的相互作用

カップリング	強　さ*	法　則
帯電粒子に対して光子	$\sim 10^{-2}$	わかっている
すべてのエネルギーに対して万有引力	$\sim 10^{-40}$	わかっている
弱崩壊	$\sim 10^{-5}$	一部分わかっている
重粒子に対して中間子	1	わかっていない(二,三の規則はわかっている)

* “強さ”はおのおのの相互作用に関与するカップリング定数を示す無次元の値である(～は“およそ”という意味)．

今日，我々の物理学はこのようなおそるべき状態におかれているのである．要するにこういうことである．核の外のことについてはすっかりわかっていると思われる；核の中では量子力学が通用する――これまでのところ量子力学の諸原理はうまくいかないことはない．我々の知識は，相対論的時空間という舞台におかれている；ことによると引力はこの時空間に内在するものであるかも知れない．宇宙がどのように始まったのか，我々は知らない．空間や時間についての我々の考えが，非常に小さい距離に対しても正しいかどうか，それを正確にためす実験が行なわれたということもない．だから我々が**知っている**のは，そのような距離よりも大きいところでは我々の考えが正しいということだけなのである．つけくわえていうならば，このとき適用される規則は量子力学的原理であって，我々の知る限りでは，それは古くから知られている粒子にも，新しく知られた粒子にもよくあてはまる．原子核の中の力の起原から考えて新しい粒子が出てきたが，困ったことにはそれがたくさんあって，それらの間の相互関係を完全に理解することはできないのである．もっともそれらの間には驚くべき関係がいくつかあることはわかっている．かくて我々は，原子以下の粒子の微小の世界を理解するのにむかって手さぐりしながら徐々に進んでいるようである．しかし，どれだけ行なったらこの仕事が終りになるのか，それは全くわからない．

第3章
物理学と他の学問との関係

3-1　はじめに

すべての学問のうちで，物理学はいちばん基礎的かつ包括的であって，あらゆる学問の発展に大きな影響を与えてきた．昔，**自然哲学**と称せられるものがあった！　我々の近代科学はそれから生まれてきたものなのだが，物理学は今日ちょうどそれにあたる位置を占めている．物理学はあらゆる現象で基礎的の役目を演ずるので，他の学問分野の研究者たちも，それを勉強している．そこでこの章では，物理学以外の学問では，どんなことが基礎的な問題となっているかということを説明するつもりである．しかし，僅かな枚数で，そのこみいった，微妙な，そして見事なことがらを本式に取り扱うことはとてもできない．枚数が限られているので，物理学と工学，産業，社会，戦争などとの関係を論ずるわけにもいかない．それどころでなく，数学と物理学との間にある極めて顕著な関係にさえもふれることができない(我々の見方からすれば，数学は**自然**科学でないという意味で，科学ではない．数学の正否をためすのは実験ではない)．しかし，ここでまず明らかにしておかなければならないが，あるものが科学ではないからといって，それは下らないものだときまっていはしない．例えば，恋愛は科学ではない．だから，あるものが科学ではないといったところで，そこに何かあやまりがあるということにはならない．単に科学ではないというだけのことである．

3-2　化　　学

物理学からいちばん大きい影響を受けた学問は，おそらく化学であろう．歴史的にいうと，初期の化学で取り扱われたのは，ほとんどすべて今日我々が無機化学といっているもの，すなわち生物に関連のない物質の化学であった．元素というものがたくさんあり，その間にどんな関係があるのか，――また，それがどのようにして，岩石の中や地球の中などにある比較的簡単な各種の化合物を作っているのか．このようなことを見つけ出すのには，厖大な調査や研究が必要であった．この初期の化学は，物理学にとって実に重要なものであった．原子という考えは，主として化学の実験によって立証されたのだから，物理学と化学との間には，切っても切れない関連があったのである．メンデレーフの周期表からは，各種の元素の間に面白い関係がたくさんあることがよみとれるのであって，化学の理論，すなわち反応そのもの

の理論は，大部分この表に要約されている．これは，どの物質とどの物質とが，どのように化合するかという規則の集積であって，これが無機化学を形成するのである．これらの規則は，結局すべて量子力学の原理によって説明されるのだから，理論化学は要するに物理学なのである．しかし，強調しておかなければならないのは，これはあくまで**原則的**の話に過ぎないということである．前にもいったとおり，将棋の規則を知っているということと，将棋をさすことができるということとは，別問題である．規則を知っていても，うまくさせないということがあるのである．一つの化学反応を考えたとき，そこでどんな現象がおこるかということをはっきり予言するのは非常に難しい．しかし，ともかく，理論化学のいちばんの根本は，量子力学に帰することは確かである．

物理学と化学とから出た分野で，その両方によって発展した非常に大切なものがある．それは統計的方法である．これは，ある一つの状態があって，それを支配する運動法則がわかっているような場合に適用できるのであって，**統計力学**といううまい名前がついている．どんな化学状態であっても，そこには無数の原子が関係しているのであって，しかも，それらの原子はみな，全く偶然的な複雑な揺動を続けているのである．そのおのおのの衝突を分析し，おのおのの分子の運動をこまかく追跡することができたとすれば，どんな現象がおこるかという見当をつけることができないわけではない．しかし，これらすべての分子を追跡するのに，どれだけの数が必要かといえば，それはたいへんなものであって，どんな計算機の容量をも，あるいは，我々の思考容量をもはるかに超えてしまう．だから，このような複雑な状態を取り扱う方法を考え出すということが，非常に大切なのである．統計力学は，熱現象，熱力学現象の学問である．学問としての無機化学は，今までは，本質的には物理化学といわれるものと，量子化学といわれるものに帰した．反応はどんな速さで起こるか，どんな現象が起こるか，分子はどのように衝突するか，最初にとび出すのは何か，等々を研究するのが物理化学である．起こっている現象を物理法則にてらして理解するのに助けになるのが量子化学である．

化学のもう一つの分野は，**有機化学**で，生物に関連のある物質の化学である．かつては，生物に関連のある物質は非常に霊妙なものであって，無機物から人工的に作り出すことはできないと信ぜられていた．しかし，これは決して正しくはない——有機物と，無機化学で作り出されるものとの間には，何の違いもない．ただ有機物では分子の組合せがより複雑になっているだけのことである．有機化学は，このような物質を提供する生物学とも，また産業とも，非常に密接に関係していることは明らかである．また物理化学や量子力学は，無機化学と同様に，有機化学へも適用することができる．しかし，有機化学の主な問題は，こういうところにあるのではなく，むしろいろいろな生物系やいろいろな生物の中で作り出される物質を分析し合成することにあ

る．そしてこれがだんだんと進んで，いつの間にか，生化学につらなり，生物学自身につらなり，あるいは分子生物学につらなることになる．

3-3 生物学

次は，生物の学問，すなわち生物科学である．生物学において，初期の生物学者が取り扱わなければならなかったのは，**どんな**生物がいるかをみつけ出すというような純記載的な問題であった．そして，のみの脚には毛が何本はえているかを数えるというようなこともしなければならなかった．このようなことが真剣に研究された後に，生物学者は，生物の中の**機能**の問題に入っていった．こまかいところに入るのはたいへんなので，研究は，まず大まかのところから始まったのはいうまでもない．

このとき，すでに物理学と生物学との間には，注目すべき関係があったのであった．それは**エネルギー保存**という物理法則が発見されるのに，生物学がその一翼を担ったということである．この法則をはじめていい出したのはマイヤーであるが，そのとき，彼は生物がとる熱とだす熱とをひきあいに出してこの例証としたのであった．

生物現象をさらによく調べてみると，そこには**たくさん**の物理現象がある：血液の循環，鼓動，血圧等々，さらに神経がある：とがった石をふむと，ふんだということがわかり，ともかくその情報が足から上の方へ伝わってくる．どのようにしてこういうことになるのか．これは面白い問題である．生物学者の研究の結果によると，神経は非常に細い管であって，その壁は複雑でかつ非常に薄い．細胞がポンプのように働いて，この壁をとおしてイオンを動かし，ちょうど電気の場合のキャパシティーのように，外側には正のイオン，内側には負のイオンが分布するようになっている．この膜には面白い性質がある．もしも1カ所で“放電が起こって”，或るイオンが1カ所で通過したとすると，そこの電圧が下がり，その電気的の影響が近くにあるイオンに及ぶ．そしてそれがまた膜に影響を及ぼして，その近所でもイオンを通過させるようになる．そして，これがまた次々に影響を及ぼすというわけで，とがった石をふんで，神経の一端が“刺激”されると，膜の“通過性”という波が神経繊維に沿って伝わっていくのである．この波は長い将棋だおしに似ている：一端をつついてたおすと，それが次のをたおす，それがまた次のをたおす，こういうことが順々に進行していくのである．しかし，将棋の駒をたてなおさなければ，これではたった一つの情報しか伝えられない．神経細胞でも，駒のたてなおしと同じことだ．ふたたびイオンをゆっくり送り出して，次の刺激がきても大丈夫なようになるのである．このようなわけで，我々はどんなことを明らかにしようと努力しているのか，自らちゃんと承知しているのである(少なくとも，その見当はついている)．この神経刺激に伴う電気的の変化は，もちろん，電気計器でしらべることができる．

そして電気的の変化が現実に**起こっている**のだから，電気的変化に関する物理学が，この現象を解明するのに大いにものをいったのは明らかである．

これと反対なのは，脳の中のどこかから，神経に沿って信号が送り出されるという現象である．神経の末端では，どんなことが起こるか．神経の先の方はこまかい枝にわかれていて，筋肉のそばにある終板という構造につながっている．まだその理由ははっきりわかっていないのだが，刺激が神経の末端に届くと，アセチルコリンという化学物質の小さいタマ(一度に5ないし10分子)がそこからうち出され，それが筋肉繊維に働いて，それを収縮させる――何と簡単ではないか！しかし，なぜ筋肉が収縮するのだろうか．一つの筋肉というのは，非常に多数の繊維がぎっしりいっしょになっているものであって，ミオシンとアクトミオシンという二つの物質がそれに含まれている．しかし，アセチルコリンによってひきおこされた化学反応が，どんなからくりによって筋肉分子の寸法を変化させるのかということは，まだわかっていない．このように，機械的運動を生じさせる基本的のところはまだよくわかっていないのである．

生物学の領域は実にひろく，他にもまだまだたくさん問題があって，とても述べきれるものではない――視覚のはたらき(目の中で光は何をするのか)，聴覚のはたらき等々(**思考**のはたらきについては，心理学のところであとに述べる)．生物学について，これまで述べてきたところは，生物学者の立場からいって，根本的でもなく，また生命の真髄にふれるようなものでもない．たとえこれらのことがすっかり理解されたとしても，生命それ自身を理解することはとてもできないからである．例えば，神経のことを研究している人は，神経のない生物というものはないのだから，自分の仕事こそ，非常に重要だと思っている．しかし，神経のない**生命**というものも**ありうる**．植物には神経もなく，筋肉もない．それにもかかわらず，植物はいとなみを続け，生きているのである．だから生物学の根本問題ということになれば，もっと深いところをみなければならないのだ．このようにみていくと，すべての生物には共通の特性がたくさんあることがわかる．生物について，いちばん一般的にいえる特性は，それが**細胞**からできているということである．おのおのの細胞の中にはこみいったしくみがあって，そこではものごとが化学的に行なわれている．例えば，植物の細胞には，光をとり入れて蔗糖をつくりだすしくみがある．光が来なくなると，蔗糖は消費されて植物の生命を保持する．動物が植物を食べると，この蔗糖はそのからだの中で植物の光合成(くらやみではその反対)に非常に密接に関連した一連の化学反応を起こす．

生物の細胞の中では，こみいった化学反応がいろいろ起こっていて，一つの化合物が次々と他のものに変化していく．生物化学でこれまで行なわれてきた努力は実に大したものであるが，そのことの例として，図3-1を示す．この図は細胞の中でたくさん起こっている反応系列の

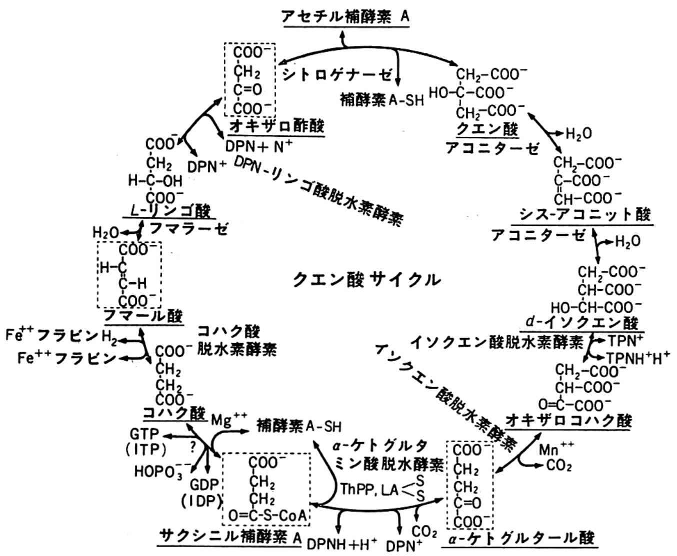


図3-1 クレブスのサイクル

ごく小部分，百分の一といってもよいくらいのものについて，今までにわかっている知識をまとめたものである．

この図には，分子が一つのものから次のものへと順々に，小きざみに変化していく全系列が示してある．これは，クレブスのサイクル，呼吸サイクルといわれるものである．おのおのの化学物質も，各段階も，分子内の変化という点からみれば，かなり簡単なものである．しかし——これらが生化学における実に重要な発見なのだが——これらの変化を**実験室の中で起こさせることは**，いささか難しいのである．いまここに一つの物質とそれに非常に似た物質とがあったとすると，その間にはエネルギーの壁——岡——があってその間をへだてているので，一方から他の方へは変化しないというのが普通である．ここで次のアナロジーを考えてみよう．いま，ある場所に一つの物体があったとする．そして，それを同じ高さだが岡の向う側の場所に移そうとする．それには物体をおして岡の頂をこえさせればよい．しかしそうするには，それだけのエネルギーを加えてやらなければならない．これと同じように，**励起エネルギー**というものが途中にあるので，化学反応というものはたいていの場合起こらないのである．一つの化学物質に別の原子をつけ加えるのには，それをうんと**近付けて**，何かの再配列が起こるようにしてやらなければならない；そしてそうすればくっつくのである．しかし，そのように近付くのに充分なだけのエネルギーを与えることができないならば，おわりまでゆかないで，“岡”の途中まで上がるだけで，また戻ってきてしまう．しかし，我々が分子を文字どおり手につかまえて，その分子の原子をつぶしたりひっぱったり，ひいたりして穴をあけ，そこに新しい原子を入れてパチンと止めてやれば，岡のまわりを**まわっていく**別の道がみつかる．それには余分のエネルギーは必要でないので，反応がたやすく起こることに

なるのである．細胞の内部には，上にひきあいに出したような変化をする分子よりも，もっとずっと大きな，分子が実際に**ある**のであって，それが複雑な方法によって，小さな分子をうまくおさえつけているので，反応がたやすく起こりうるようになっているのである．この非常に大きな複雑なものを**酵素**という(これは糖の醱酵ではじめて発見されたので，以前は醱酵素とよばれていた．クレブスのサイクルの初めの方の反応は，醱酵で発見されたのである)．酵素があると，それによって反応は進行する．

酵素は，**蛋白質**というまた別の物質からできている．酵素の分子は非常に大きく，かつ複雑であって，種類によって差があり，それぞれ特有の反応を左右するようにできている．図3-1のそれぞれの反応のところに書いてあるのが酵素の名前である(同じ酵素が二つの反応を左右することもある)．ここに強調しておきたいのは，酵素それ自身は反応に直接参与していないということである．酵素は変化しない；そのはたらきは，一つの原子を一つの場所から他の場所へうつしてやるというだけである．それをすませた酵素は，次の分子に対してまた同じはたらきをする．ちょうど工場の機械のようなものである．もちろんそこには，ある原子が供給され，そしてまた他の原子がすてられるというみちがついていなければならない．例えば水素を考える；すべての化学反応で水素を運ぶ役目をする酵素がいくつかあって，それはそれぞれ特別なしくみをもっている．例えば，脱水素酵素には三つ，四つあって，それがクレブスのサイクルの方々で使われている．面白いことには，あるところで水素が放出されると，他のところではその水素がとり入れられ，どこか別のところで使われるというしかけになっているのである．

図3-1のサイクルでいちばん大切なのは，GDP(Guanadine-di-phosphate)からGTP(Guanadine-tri-phosphate)に変換するところである．というのは，後者は前者よりもはるかに多くのエネルギーをもっているからである．ある酵素が水素原子をはこびまわる“箱”をもっているように，エネルギーを運ぶ“箱”があるのであって，三リン酸塩グループもその一つである．GTPはGDPにくらべて，エネルギーをたくさんもっているのである．サイクルがGDPからGTPへという向きに進んでいるとすると，エネルギーを余分にもっている分子が作られているのであって，それが例えば筋肉の収縮というようなエネルギーを**要する**他のサイクルを進行させることになる．GTPがなければ筋肉は収縮しない．筋肉の繊維をとって，水に入れ，GTPを加えると筋肉は収縮し，適当な酵素があるとGTPはGDPにかわる．だから本質的のところはGDP-GTP変換にある．光のない暗いところでは，日中に蓄積したGTPのはたらきで，このサイクルは逆の向きに進行する．反応がどちらむきに進行するかということについては，酵素は我関せずなのである．もしもそうでなかったら，これは物理学の法則の一つに反することになる．

生物学やその他の学問にとって物理学が非常に大切だというのには，まだ他にも理由がある．それは**実験技術**についてである．実験物理の大進歩がなかったら，上に述べたクレブスのサイクルのような生物化学の図は今日もまだわかっていなかっただろう．というわけは，生物化学系というものは，おそろしくこみ入ったものであるが，それを研究していくのに何よりも一番大切なことは，問題とする反応に関与する原子に**名札**をつけることだからである．だからもしもこのサイクルの中に，“青印”をつけた二酸化炭素を入れてやり，3秒後にそれはどこにいるか，10秒後にそれはどこにいるか等々を測ることができたとすれば，反応の道すじをたどることができるはずである．その“青印”とは何か．それはいろいろの**アイソトープ**である．前にいったとおり，原子の化学的性質というものは，**電子の数**によってきまり，原子核の質量によってきまるのではない．炭素の原子核はみな陽子を六つもっているが，その中に中性子を六つもっているものも七つもっているものもある．C^{12}の原子もC^{13}の原子も化学的には同じであるが，しかし重さが違い，また核の性質も違うので，その間の区別がつくのである．このような重さの違うアイソトープ，さらにまた非常な微量でも鋭敏に検出できるC^{14}のような放射性アイソトープなどを使うと，反応の道すじをたどることができる．

さて，酵素と蛋白質の話に戻ろう．蛋白質はすべて酵素であるとはいえないが，酵素はすべて蛋白質である．蛋白質の中には，筋肉内の蛋白質や，軟骨，毛，皮膚などの中にある構造蛋白質など，いろいろのものがあるが，それらは酵素ではない．ともかく，蛋白質は，生命に特有な物質である．第一に，酵素はみな蛋白質からできている．第二に，その他の生体物質も蛋白質からできているものが多い．酵素は面白い規則的な構造をもっている．それは，いろいろの**アミノ酸**のつながり——くさり——なのである．アミノ酸には違ったものが20種類もあるが，それらがいっしょになって，CO—NHなどを基本とした連鎖をつくっている．蛋白質というのは，これら20種のアミノ酸をいろいろに組み合わせた鎖なのである．おのおののアミノ酸は，おそらくそれぞれ固有の目的に役に立っているのだろう．例えば，あるアミノ酸では，ある位置にイオウ原子が一つある；同じ蛋白質の中にイオウ原子が二つあると，この間に結合が生ずるのでこの蛋白質は2点でつながってループになる．また他の蛋白質には，余分の酸素原子があって，それを酸性なものにしている．アルカリ性の蛋白質もある．また，一方側に大きな原子群があって，空間的にかなりひろがっている蛋白質もある．蛋白質の一つにプロレンというのがあるが，これは実はアミノ酸ではなく，イミノ酸である．アミノ酸とイミノ酸との間には，ちょっとした差がある．その結果，鎖の中にプロレンがあると，そこがねじれる．もしある特定の一つの蛋白質を作ろうというなら，次のような手順ということになるだろう：イオウのひっかかりをここにおけ；何かを加えてひろがりをつくれ；何かを加えて鎖にねじれを

つくれ．このようにすれば，ひっかかりあって複雑な構造をもった，こみいった鎖が得られるだろう．いろいろな酵素はおそらくこのようにしてできるのだと思われる．近年(1960年以来)の一大成果は，56ないし60ものアミノ酸が一列になっているある種の蛋白質の中で，原子が空間的にどのように配列しているかが，とうとうはっきりわかったことである．1000個以上(水素原子を入れれば，2000個に近い)もの原子がどこに並んでいるかということが，ある2種の複雑な蛋白質について，その有様がはっきりわかったのである．その第一はヘモグロビンである．しかし，悲しいかな，その配列様式をみても，それからは何もよみとれないのである；ヘモグロビンが何故あのようなはたらきをするのかわからない．もちろん，これは今後研究すべき問題である．

次の問題は，酵素がどうして自分の役目を知っているのかということである．目の赤い蠅は，目の赤い蠅を生む．だから，赤い色素をつくるのだという情報が酵素のすみずみまでいきわたっていて，それが，親から子に伝えられるに違いない．この役目をするのは細胞の核の中にある物質であって，これは蛋白質ではなく，DNA(desoxyribose nucleic acid の略)というものである．これは，一つの細胞から，他の細胞に伝えられる基本物であって(例えば，精子細胞は大部分DNAでできている)，どのようにして問題の酵素を作るかという情報を蔵しているのである．DNAは"青写真"のようなものである．この青写真とはどのようなもので，またどのように使われるのか．まず第一に，この青写真は自分自身を再生することができるものでなければならない．第二に，この青写真は，蛋白質に指図を与えることができるものでなければならない．はじめの再生というのは，細胞の増殖と同じような方式で進行するのだろうか．細胞はまずそのまま大きくなって，そして半分にわかれる．DNAも，やはり大きくなりすぎて，半分にわかれるというのだろうか．どんな**原子**でも，それが大きくなって半分にわれるということは**ない**．何かうまい方法がない限り，分子を再生することはできない．

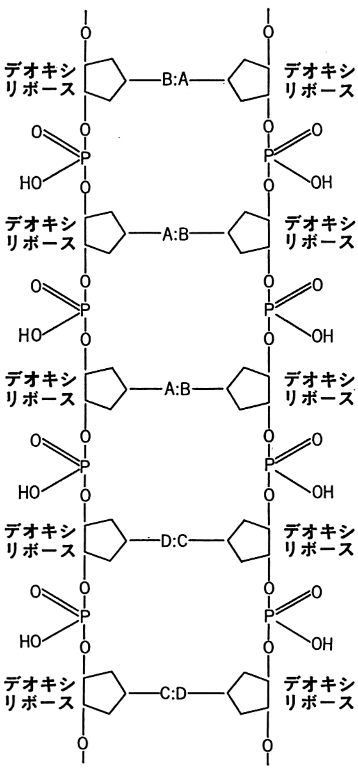


図3-2　DNAの模式図

DNAなる物質の構造については，長い間研究されてきた．はじめは，その成分を知るために化学的な方法によって，次には空間配列を知るためにX線の方法によって，研究が進められてきた．その結果，次のような著しいことが発見された：DNA分子は，二つの鎖が互いにまきついているものである．その鎖は，蛋白質の鎖に対応するものではあるが，化学的にいうと全く違うものであって，図3-2に示したように，糖とリン酸塩群との系列からなっている．こうやってみると，この鎖がどのようにして指示を蔵しえるのかがわかる．例えばこの鎖をまん中でたてに切ったとすると，BAADC…という系列になる．そして，あらゆる生体物質はそれぞれ違った系列をもっている．だから，ことによったら，蛋白質生成の個々の**指示**は，あるしかたによってDNAの個々の**系列**に包蔵されているのかも知れない．

このような列になっている糖には，ある種のつなぎ手が対になってついていて，それが二つの鎖をつないでいる．しかし，そのつなぎ手は1種類ではない；それにはアデニン，チミン，シトシン，グアニンという4種類がある．それをA, B, C, Dであらわしておこう．面白いことに，そのうち互いにひきあって位することのできるのは，ある対に限られているのである．例えば，AとB，CとDという具合である．そしてこれらの対は，鎖が“うまくあう”ように並んでいるのであって，その間に強い相互作用がある．しかし，CはAとはあわない，BはCとはあわない．AはBと，CはDという対でなければあわない．だから，一つがCならば，相手はDにきまっている等々．一方の鎖にある文字が，何であっても，そのおのおのは他方の鎖に固有の相手がなければならないのである．

では，再生はどうなるのか？　まず鎖を二つに切ったとしよう．どうやったら，それと同じものができるか．細胞の物質の中に，リン酸塩，糖，鎖につながっていないA, B, C, Dを生産するところがあったとすると，きれた鎖にくっつくのは，BAADC…の正しい相手，すなわちABBCD…である．このように，細胞分裂の道程で鎖がたてにわれ，その一半は一つの細胞にゆき，他の半分は他の細胞にいく；そして半分ずつわかれわかれになると，それぞれの鎖半分によって新しい相手が作られるのである．

次に出てくる問題は，いったいどのようにして蛋白質の中のアミノ酸の配列がA, B, C, Dの並ぶ順序によってきめられるのかということである．これは生物学で今日解けていない中心問題である．このことを考える第一の手がかりというか，材料というか，それにはこんなことがある．細胞の中にはミクロソームという微小な粒があって，ここで蛋白質がつくられるということがわかっている．DNAやその指示は細胞核の中にあるのだが，ミクロソームは細胞核にはない．ここには何かいわくがありそうだ．DNAから小さな分子片がちぎれてくる．——あらゆる情報を担っている大きなDNAほど長くはなくて，その小切片のようなものである．これをRNAというのであるが，名前などはどうでもいい．それはDNAの一種のコピー，短いコピーである．とにかくどの種類の蛋白質を作るかということに関する指示をRNAは担っているのだが，これがミクロソームのところにやってくる；このことはわかっている．RNAがやってくると，ミクロソームで蛋白質が合成される．これもわかっている．しかし，どのようにしてアミノ酸がやってきて，どのようにしてRNAにのっている信号に従って並ぶのか，そのくわしいことはまだわかっていない．それをどう判読したらいいのか，わからない．例えばA, B, C, C, Aという“ラインアップ”がわかったとしても，どの蛋白質ができるのかわからない．

現在，生物学ほどたくさんの面で著しい進歩をしている問題や分野はないようである．我々を駆って，生命を理解するための努力を続けさせるのに，いちばん有力な仮説は何かというならば，それは，**すべ**

てのものは原子からできているというのであり，生物が行なうあらゆることは，原子の運動に帰して理解することができるということである．

3-4 天文学

全自然界のことを，かけあしで説明しているのだが，こんどは天文学である．天文学は物理学よりも古い学問である．星や惑星の運動に見事な単純性があることを示したのが天文学であって，それによって，物理学が発足したのである．この単純性を理解するということが，物理学の**はじまり**であった．しかし，天文学で発見されたことのうちで，何よりもいちばん大したことは，**星も地球にあるのと同じ原子からできている***ということである．どうしてこのことがわかったのか．原子は光を出している．シロフォンの一つの木片の出す音の高さ，すなわち振動数がきまっているのと同じように，原子の出す光もその振動数がきまっている．いろいろの音が耳に入ると，我々はそれを聞きわけることができるけれども，色のまざっているのを目でみても，何色と何色とが入っているかはわからない．この点では，目は耳と違っていて，その成分を識別することができないのである．しかし分光器を使えば，我々は光の波の振動数をふるいわけることが**でき**，こうして，いろいろの星の中の原子が奏でる調べをみることができるのである．実際，元素のうちには，それが地球上で発見されるよりも以前に，ある星にその存在が発見されたものが二つある．ヘリウムは太陽に発見された．このヘリウムという名前はそれからきている．テクネチウムは，ある低温星に発見された.** 星をつくっている元素は，地球にあるのと同種のものだというのだから，このことは，星を理解するのに具合がいい．温度が高くて密度がそれほど大きくないという状態の下で，原子の行動がどんなものであるか，このことについては，我々には特にたくさんのことがわかっている．地球上にその状態を再現することはできないけれども，物理学の基本法則を使って考えれば，どんな現象が起こるかということが，かなりはっきりわかる場合が少なく

---

* 私は何と急いでいるのだろう．ここに出てくる話は，それぞれ実に内容豊富なのである．“星も地球にあるのと同じ原子からできている”．私はいつもこのような小さな話題をとりあげて話を進めることにしている．物理学は星の美を色あせさせ，気体原子の単なるかたまりにしてしまうだけだと詩人はいう．しかし“単なる”で片付けられるものはない．私といえども砂漠の夜，星を見，それに心を動かされる．しかし私のみるものは，それ以下なのか以上なのか？ 広大な天をみていると私の想像はひろがる——この自然の大饗宴にひきつけられ，私のかよわい目にも百万年昔の光が入ってくる．広大な世界——私もその一部分である——，私のからだを作っているものは，大昔の忘れられた星からとび出したものであるかも知れない．今でも星からものがとび出している．あるいはパロマの大きい望遠鏡でみれば，星はみないっしょになっていた同一の出発点からひろがっていくことがわかる．それはどんな有様か，意味は何か，**何故か？** それについて少しばかりわかったとしても，神秘はそこなわれはしない．真理というものは，過去のどんな芸術家が考えたよりももっとすばらしいものなのである．現代の詩人は何故それを語らないのか？ 木星が人間に似たものであるならば，それについて語っていいが，メタンやアンモニアがたくさんぐるぐるまわっているものであるならば，黙っていなければならないというなら，詩人とは何だ？

** この記述には疑問がある(訳者注)．

ない．かくて物理学は天文学に助けをかしているということになる．おかしな話だけれども，太陽の内部における物質の分布は，地球の内部よりもずっとよくわかっているのである．星の**内部で**どんなことが起こっているか．望遠鏡で小さな星の光の点をみるということはなかなか困難であるから，星の内部のことを知るのはさぞ困難だろうと想像されるかも知れないが，実際はそれよりもずっとよくわかっているのである．これは，たいていの場合，星の中では原子がこうなっていなければならないということを**計算する**ことができるからである．

もっとも印象的な発見の一つは，星をたえずもやし続けているエネルギーの源泉である．星を輝かせるのには星の中で**核反応**が起こっているに違いない，ということに考えついた発見者の一人は，夜，彼女と外に出ていた．“なんて星がきれいなんでしょう”と彼女がささやく．彼はいった“そうだね，だけど星が**何故**光るのか，そのわけを知っているのは，いま世界中で僕一人だけなんだ”，それを聞いて彼女はニッコリするだけであった．何故星が光るかを知っているというただ一人の男とその瞬間にいっしょに歩いているということには，彼女は別段感興を示さなかった．たった一人というのはあわれなものである．しかしこの世界はそういうものなのである．

太陽のエネルギーを供給するのは，水素核の“燃焼”である；水素がヘリウムにかわるのである．そればかりでなく，星の中心ではいろいろの化学元素が結局水素から生成されているのである．**我々**のからだを作っているものも，かつては星の中で“料理され”，それがとび出したものである．どうしてこんなことがわかるのかというと，それには手がかりがあるのである．いろいろのアイソトープの割合——C^{12}がいくらで，C^{13}がいくらかというようなことは，**化学**反応では全然わからない．それは，化学反応というものは，C^{12}に対してもC^{13}に対しても全く同じように起こるからである．この二つの割合というものは，全く**核**反応の結果によってきまるものである．我々自身のような冷たい消えたもえさしの中で，アイソトープの割合がどうなっているかを調べると，我々のからだを作っているものがどんな**炉**で作られたのかということがわかるのである．その炉は星のようなものであった．だから，我々のからだにある元素も，もとは星の中で“作られ”，新星とか超新星というものの爆発によってとび出してきたものだということは，ほとんど確かである．天文学は物理学に非常に近いから，これからも天文学のことがらがたくさん出てくると思う．

3–5　地　　学

さて，こんどは**地球の科学**，**地学**といわれているものの話である．まず気象学や天気の話である．気象**器械**が物理器械であることはもちろんであって，前にも述べたように実験物理学の進歩によって，こういうものができるようになったのである．しかし満足すべき気象学の理論は，物理学者の手によっていまだに作られていない．“しかし”と

諸君はいうだろう．"そこには空気だけしかないのだし，また空気の運動方程式はわかっているのではないか"．そのとおりである．"だから，もしも今日の空気の状態がわかっていさえすれば，明日の空気の状態がわかるはずではないか"．ところが，実は，今日の空気の状態は**ほんとには**わかっていないのである．というのは，空気はいたるところで渦をまき，乱れている．空気というものはちょっとしたことにも実に敏感に動きやすく，不安定でさえある．水が静かにダムをこえて流れ，それが落ちるときに，粒やしぶきになるところを諸君がみたことがあるなら，ここで不安定と私のいうことの意味がわかるだろう．ダムの余水路をこえる前の水の状態はよくわかっている；水は全く静かである．しかし水が落ちはじめたら，どこから水滴になるのか．水滴の大きさは何によってきまるのか．どこから水滴になるということが何によってきまるのか．水は不安定で，これはとてもわからない．静かに動いている空気でさえ，山をこえていくと，複雑な渦になる．いろいろなところにこの**乱流**という状態があらわれてくるが，今日まだ，このことはよくわかっていない．天気の話はこのくらいで切りあげて，地質学の話をしよう．

地質学の根本問題は，地球はどのようにして今日のありさまになったかということである．いちばん明瞭な現象は，諸君の目の前に起こっている．それは川や風による浸食作用である．これらの現象を理解するのは難しくないが，浸食に伴って，他のことが起こっているに違いないのである．浸食があっても，今日の山の高さは，平均として，過去にくらべて決して低くなってはいない．だから山を**つくる**作用が進行しているに違いないのである．諸君が地質学を勉強すると，造山作用や火山作用というものが，**たしかにある**ことを知るだろう．しかし，地質学の半ばをしめるその現象については，ほんとのことは誰にもわかっていないし，火山の現象もよくわかっていない．地震が起こるのはどうしてかということも，要するにわかってはいない．何かが他のものを押せば，それはこわれて，またすべるだろう——それはそれでよいのだが，何が押すのか，何故押すのだろうか．地球の中には流れがある——地球の中の方と外の方とでは温度が違うので，そこに循環流が生ずる——そしてそれが表面を少しずつ押しているのだと理論はいう．逆むきにまわる循環流がとなりあっているとすれば，その境のところにはものが集まって，山脈ができる．そしてそこは不安定な歪の状態にあるので，火山や地震が起こる．

地球の内部はどうなっているのであろうか？　地球の内部をとおる地震の波の速さや密度分布については，たくさんのことがわかっている．しかし，地球の中心における圧力の下では物質の密度はいくらになるべきかという理論は，まだ物理学者によって得られていない．いいかえれば，我々はそのような状態における物質の性状について，見当をつけることができないでいるのである．地球に関する我々の知識は星における物質の状態に関する知識よりもずっと少ない．これらの

問題に出てくる数学は，これまでのところいささか難しすぎるようであるが，誰かがこれは大切な問題であるということに気が付いて，やがてそれを完成するだろうと思う．また，たとえ，密度がわかったとしても，循環流のようすはわからない．また高圧の下における岩石の性状もわからない．岩石がどんなに速く“まいる のか”もわかっていない．これらは実験によって明らかにされなければならない．

3-6 心 理 学

次には**心理学**について考えよう．一言しておくが，精神分析は科学ではない：せいぜい一つの医療法というところだが，むしろ，まじないに近い．しかしそれにも，病気の原因についての理論はちゃんとあるのである．——病気はいろいろさまざまの“霊”の仕業によって起こるというのである．まじない師の理論によると，マラリアのような病気は，ある霊が空気のところへやってきて起こるのだという：しかし患者の上で蛇をおどらせてみてもマラリアは直りはしない．キニーネを使えば直るのである．もしも諸君がどこかの村でマラリアになったら，まずそこのまじない師のところへ行くのがよいだろう．それは，その村の中で，この病気のことについていちばんよく知っているのは彼だからである；しかし，彼の知識は科学ではない．精神分析はまだ実験的によく検討されてはいない．うまくいった場合がいくつあり，うまくいかなかった場合がいくつあるかというような統計をしらべる方法はない．

心理学の他の分野，感覚の心理学——目ではどんなことが起こっているか，脳ではどんなことが起こっているか等々——などもあるが，卒直にいってみれば，あまり面白くはない．しかし，それを研究しているうちに，小さなしかし真の進歩が生まれた．いちばん大切な学問的の問題は，心理学といってもよいし，いわなくてもよかろう．心に関する中心問題というか，神経系の中心問題というか，それは次のようなものである．一つの動物が何かを覚えると，前と違ったことができるようになる．脳が原子からできているのならば，脳細胞が変化したに違いない．**どう変化したのか**．何かが記憶されたというときに，我々はどこを調べ，何を探したらよいのか，このことは我々にわかっていない．何かが学習されたというときに，それは何事を意味するのか，神経系にどんな変化があるのか，我々は知らない．これは非常に大切な問題であるが，まだ全然解決されてはいない．しかしともかく，記憶というものがあるにしても，脳は繊維や神経が実にたくさん結びあっているものなのだから，このことは多分そうすっきりとわかることはないだろうと思う．これに似たことは計算機や計算素子にもある．というのは，これらのものにも線がたくさんあるし，また一つの神経を次の神経に結ぶシナプスにあたるだろうと思われる要素があるのである．この思考と計算機との関係は実に面白い問題なのであるが，ここで立ち入って論ずる時間はない．もちろんこの問題を調べたところ

で，真に複雑な人間の通常の行動についてわかることは，ほとんどないであろう，ということは承知しておかねばならぬ．人間というものはすべて各人各様である．それがわかるのは遠い将来のことであろう．我々はもっとずっと手前のところから始めなければならない．一匹の**犬**というもののはたらきがどういうものであるかということの見当がついたら，これは大進歩である．犬を理解するのは人を理解するのよりもやさしいのだけれども，それでさえ犬のはたらきは誰にもまだわかっていない．

3-7　なぜこうなったか？

器械を発明するというようなこと以外に，物理学が**理論的な**面で他の科学にとって有用であるためには，それらの科学が，物理学者の言葉でその目的を記したものを物理学者に提供しなければならない．“蛙は何故とべるのか”などと聞かれても，物理学者は返答に困る．しかし，蛙とはこんなものである，分子がたくさんある，ここには神経がある，というふうにいってくれるなら，事情は別である．地球はこのようなものだ，星はこのようなものだ，というふうに物理学者に示すなら，我々には見当がつく．物理学の理論を役に立てようというのならば，我々は原子がどこにあるかがわかっていなければならない．化学を理解するためには，どんな種類の原子があるのかがはっきりわかっていなければならない．そうでなければどう考えていいかもわからない．しかし，これはもちろん，制限の一つであるにすぎない．

他の科学には，物理学にないような**種類**の問題がある；適当な言葉がないので，**歴史的問題**とでもいっておこう．何故こうなったか？もしも生物学のことがすっかりわかったとしたら，我々は更に進んで，地球上にあるすべての生物は何故こうなったかを知りたくなるだろう．これに対しては，生物学で重要な進化論という理論がある．地質学においても，我々は山がどのようにしてできたかを知りたいと思うばかりでなく，そもそも地球ははじめにどのようにしてできたか，太陽系の起源等をも知りたいと思う．それから発展していけば，世界にどんな物質があったかを知りたくなる．星はどのようにして生まれたか？初期条件はどんなものであったか？　これは，天文歴史の問題である．星の誕生や元素の起源(その元素によって我々のからだができているのだが)については，随分たくさんのことがわかってきたし，また宇宙の起源についても少しばかりわかってきた．

今日の物理学では，こういう歴史的問題は考えられていない．“こういう物理法則があるが，何故こうなったか”というような問題は，物理学にはない．現在のところ，我々は物理法則が時間がたつにつれて変化し，過去の法則と現在の法則とが違うとは考えていない．もちろん，違って**いるかも知れない**，そしてもしも違って**いる**ということになったら，物理学の歴史的問題は，宇宙の他の歴史といっしょになり，物理学者は天文学者，地質学者，生物学者と同じ問題について語

りあうことになるだろう.

最後に，物理学的の問題で他の多くの学問にも共通なものが一つある．それは非常に古い問題だが，まだ解決していない．それは新しい基本粒子をみつけるという問題ではなく，永い間——百年以上——も前から残されている問題である．この問題は他の科学にとっても重要であるにもかかわらず，物理学者でそれを数学的にきちんと処理できた人はいない．それは**循環流体**というか，**乱流液体**というか，それの解析である．星の進化に注意すると，対流が始まりそうだということのわかる点があるが，その後何が起こるかはわからない．数百万年後，この星は爆発する．しかしその理由は見当がつかない．天気のこともよくわからない．地球の内部には運動があるはずなのだが，その様式もわからない．話をいちばん簡単にすれば，非常に長い管に，高速で水をおしこむ問題になる．我々の疑問はこうである：ある与えられた水量をこの管をとおしておしだすには，どれだけの圧力が必要か？これは初学的な原理と水の性質とから解決できる問題ではない．水の流れが非常におそいならば，あるいは蜜のような濃いベトベトしたものを使うならば，理屈はよくわかる．これは教科書に出ている．わからないのは，管をとおして流れる現実の水をどう取り扱ったらよいかということなのである．この中心問題は，我々は将来解決しなければならないのだが，まだ成功していない．

ある詩人がこういったことがある．“グラス一杯の酒の中に全宇宙がある.”詩人が詩を書くのは，人にわからせるためではないのだから，どういう意味で上の詩を書いたのか，わかることはまずないだろう．しかし，我々がグラス一杯の酒をよくみれば，そこに全宇宙がみえるということはほんとである．物理学的のことがらとしては：酒には渦があり，風や天気の状態に従って蒸発する．グラスの中で光は反射している．頭の中ではそこに原子が考えられる．ガラスは岩石をとかしてつくったものだ．そしてその成分の中に宇宙の年齢や星の進化が秘められている．酒の中には，化学物質のどんな面白いつながりがあることか？　それはどのようにしてできたか？　酵素があり，またそのはたらきを受けるものがあり，そうしてできたものがある．酒の中には大原則がある：生物はすべて醱酵である．酒の化学がわかれば，ルイ・パストゥールのように，たくさんの病気の原因も必ずわかる．クラレットの酒を見れば目にしみる．便宜のために，あさはかな人間が，この宇宙たる一杯の酒を——物理学，生物学，地質学，天文学，心理学等にわけたとしても，自然はそれを知らないということを忘れてはならぬ！　酒はそもそも何のためにあるのかを思い出して，すべてをもとにもどしてしまおうではないか．そして我々にまた別のよろこびを与えてもらおうではないか：乾杯，そして何もかも忘れてしまおうではないか!!

第4章

エネルギーの保存

4-1 エネルギーとは何か？

概論的の話は前章で一応終わったから，この章では，物理学のいろいろな面にもう少しくわしく立ち入って勉強しはじめることにしよう．理論物理学では，どんな概念や考え方が使われているか．このことを示す一つの例として，これからエネルギー保存の法則のことを述べよう．これは物理学における最も基本的な法則の一つである．

今日までに知られているあらゆる自然現象を通じて，その全部にあてはまる事実——法則といってもよい——が一つある．これまでわかっているところでは，この法則には一つの例外もなく，精確に成立する．これがすなわち**エネルギー保存の法則**である．その内容は次のとおりである．ここに，我々がエネルギーと名付けるある一つの量を考えると，自然界でどんな複雑な現象が起こっても，その量は変化しないというのである．これは，いわば数学的の原理でたいへん抽象的な考えである；ここに一つの数量があってどんな現象が起こってもその量は変化しないというのだから，それはあるメカニズムの記述でもなく，また具体的のことがらの記述でもない；我々がまずある数を計算しておく，それから自然がいろいろな変化をした後になって，もういっぺんこの数を計算してみる．そうすると，面白いことには，その値が前と同じだというのである．（チェスで赤い目にいるビショップは，何手動かしても——一つ一つの手はわからなくても——やはりどこかの赤い目にいるということに似ている．エネルギー保存というのは，この種の法則である.）これは抽象的な考えだから，一つの実例によってその意味を説明しよう．

ここに“腕白デニス”のような子供がいて，積木をもっているとしよう．その積木は絶対に丈夫で，いくつかに割れることはないとしよう．積木はみんな同じ大きさであるとする．また子供のもっている積木は28コであるとする．ある朝のこと，お母さんは，この28コの積木をもたせてデニスを室で遊ばせておいた．その日の夜になって，お母さんは気をつけて積木の数を数えてみた．そしてそこで現象論的な一つの法則を発見する——デニスが積木でどんな遊び方をしたとしても，積木の数はいつも28コである！ それから数日たったある日，積木を数えてみると27コしかなかった．しかしちょっと探したら，あとの1コは敷物の下から出てきた．——積木の数に変りがないということをたしかめるためには，お母さんはそこら中によく目をくばら

なければならない．ところがある日，積木の数が変わった．――たった 26 になってしまっていた．しかしよく見ると，室の窓があいていた．そこから外を見ると，残りの 2 コは外に落ちていた．またある日，注意して積木の数を数えてみると，30 になっていた！　これにはたいへんびっくりした．しかしとなりのブルースが自分の積木をもって遊びに来て，デニスのうちにいくつかおき忘れていったということがわかったので，問題は解決した．お母さんはこの余分の積木を窓からすててから，窓をしめ，もうブルースを入れてやらないようにした．これで当分勘定はうまくあっていたが，またある日，積木の数を数えてみたら，たった 25 しかない．この室にはおもちゃ箱がある．そこでお母さんがそこへ行って箱をあけようとすると，デニスは，“僕のおもちゃ箱をあけちゃイヤ”と，叫ぶのである．お母さんは，おもちゃ箱をあけさせてもらえない．何とかして見付けだしてやろうとして，お母さんは頭のいい方法を発明した．お母さんは積木 1 コの目方は 3 オンスであるということを知っている．また，積木 28 コが全部箱から外に出ているとき，箱全体の目方をはかってみたら，それは 16 オンスであった．その次に，お母さんが積木の数をたしかめようとするときには，おもちゃ箱の目方をはかり，それから 16 オンスをひいて 3 でわった．お母さんは次のことを発見したのである：

$$\begin{pmatrix}\text{外に出ている}\\\text{積木の数}\end{pmatrix}+\frac{(\text{箱の目方})-16\ \text{オンス}}{3\ \text{オンス}}=\text{一定}. \tag{4.1}$$

ところがこの式が成り立たないことがあった．しかしそのときよく見ると，風呂桶に入っているよごれ水の面の高さがいつもとちがうようである．腕白デニスが積木を風呂桶の中にほうり込んだのである．水がよごれているので，お母さんには積木は見えない．しかし，上の式にまた別な項を加えて計算すれば風呂桶の中に積木がいくつ入っているか，お母さんにはわかるのである．水の深さは，はじめ 6 インチで，積木を 1 コ投げ入れるごとに水面は $\frac{1}{4}$ インチずつ高くなる．だから新しい式はこうなる．

$$\begin{pmatrix}\text{外に出ている}\\\text{積木の数}\end{pmatrix}+\frac{(\text{箱の目方})-16\ \text{オンス}}{3\ \text{オンス}}+\frac{(\text{水の深さ})-6\ \text{インチ}}{\frac{1}{4}\text{インチ}}=\text{一定}. \tag{4.2}$$

お母さんは，おもちゃ箱も調べなければならない．風呂桶も調べなければならないということになって，だんだんに面倒になるが，それに相当するだけの項をつけ加えて考えれば，目で見てたしかめることのできない場所に積木がいくつあるかを勘定することができるようになる．こうしてお母さんは一つの式に到達したのであって，それで計算すると，この量はあらゆる場合に一定である．

さてこの積木の話はエネルギー保存とどこが似ているのか？　積木のたとえ話のなかでいちばん大切なのは，“見えるところには積木が一つもない”という場合である．(4.1)や(4.2)の式の第 1 項を取り去

って考えてみるとわかるように，我々はいわば抽象的のものを計算しているのである．そこで積木とエネルギーのアナロジーはこういうことになる．第1，我々がエネルギーを計算するときに，そのエネルギーの一部分が，考えている系から出て行ってしまったり，また若干のエネルギーが入って来たりすることがあるが，しかしエネルギー保存を証明するのには，考えている系に何も入れなかった，また何も取り出さなかったという条件が大切である．第2に，エネルギーには**ちがった形**のものがたくさんあるのであって，おのおのに対してそれぞれ計算式がある．すなわち：重力エネルギー，運動エネルギー，熱エネルギー，弾性エネルギー，電気エネルギー，化学エネルギー，輻射エネルギー，核エネルギー，質量エネルギー等である．これらのおのおのの量を求めて全部加えあわせると，エネルギーの出入りがなければ，答はいつも一定なのである．

エネルギーとは**何だろうか**．それについては，現代の物理学では何もいえない．このことは頭に入れておく必要がある．エネルギーはきまった分量のつぶになっているということはない．そのようなものではないのである．しかしある数量を計算する式があって，それをみんな加えると"28"という——いつも同じ数になるというのである．いろいろな式のからくりや理由にはふれないという点で，エネルギーというのは抽象的なものなのである．

4-2　重力の位置のエネルギー

エネルギーの保存則を理解するためには，すべての形のエネルギーの式を知らなければならない．これから地球の表面近くの重力による位置のエネルギーをあらわす式を考えよう．これからその式を導くにあたっては，実際の歴史とは全く無関係なやり方でやってみる．このやり方は，この講義のために特に工夫したものである．いくつかの事実とちゃんとした理屈とから出発すれば，自然についてずいぶんたくさんのことがらを引き出すことができるものなのであって，このやり方によって，その例証を諸君に示そうと思う．これは理論物理学者の仕事のやり方を示す一つの例である．カルノーが蒸気機関の効率を論じたとき，実にエレガントな方法を使ったが，これから述べるやり方もそれにならったものである.*

重量あげの器械——一方のおもりを下におし下げると他のおもりが上にもち上がるというはたらきをする器械——を考える．それから次の仮説をおく：このような器械では**永久運動というようなものはない**．(永久運動というものは全然存在しないというのが，実はエネルギー保存の法則の一般的記述なのである.) 永久運動を定義するには，気を付けなければならないことがある．まず，重量あげ器械についてそれ

---

*　ここで重要なのは最後の結果(4.3)を求めることではない．この結果は諸君もすでに知っているだろう．重要なのは，むしろ，理論的の考察によってその結果に到達することができるという点である．

を考えてみよう．おもりをたくさん上げたり下げたりしたあとで，器械をはじめの状態に戻したときに，もしも差引き**おもりが上がっていた**ということになったとすると，永久運動器械というものがあるということになる．それは，そのもち上げられたおもりを使えば何か他のものをはたらかすことができるからである．これは，おもりをもち上げた器械が完全に**もとの状態**にもどっている**ならば**，という条件つきであり，更にまたこの器械が**自給自足**——おもりを上げるのにブルースの積木のようなエネルギーをほかからもらわなかった——ならば，という条件つきである．

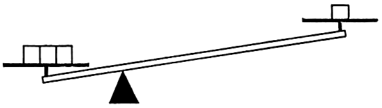


図 4-1　簡単な重量あげ器械

図 4-1 に示したのは，非常に簡単な重量あげ器械である．この器械は“強さ”3 のおもりをもち上げる．一方の皿の上にはおもりが三つ，他の皿の上には一つのっている．しかしこの器械を実際にはたらかせるのには，左の皿を少しだけ軽くしてやらなければならない．また，ちょっとうまく，右の皿を少しだけ軽くしてやれば，おもり三つの方が下がり，それによって，おもり一つの方がもち上がる．もちろん**実際の**重量あげ器械をはたらかせるには，軽くする代りに余分をちょっと加えてやらなければならないのであるが，このことは**しばらくの間**，無視しておく．理想的の器械というものは現実には存在しないが，もしありとすればこのちょっとの余分というものを必要としないものである．我々が実際に使う器械は**ほとんど**可逆的にはたらかせることができる：すなわち，おもり一つをある距離だけおし下げることによって，おもり三つをもち上げることができるならば，逆におもり三つをおし下げることによって，おもり一つを前に下げたのと同じ距離だけもち上げることができるのである．

さて器械というものに 2 種類あると考える．第 1 の種類というのは，可逆的で**ない**ものであって，現実の器械はすべてこれに含まれる．また第 2 の種類というのは**可逆的な**ものである．軸受や腕などのところをどんなに気を付けて設計しても，可逆的の器械は実現不可能であるのはもちろんのことである．しかしかりにそういう可逆的な器械があると仮定する．そしておもり一つ分(1 オンスその他，何でもよい)を単位の距離だけおし下げると，そのとき，おもり三つ分がもち上がるとしよう．この可逆的な器械を，器械 A とする．そしてこの可逆的な器械ではおもり三つ分が距離 X だけもち上がるとする．別にもう一つ別の器械 B があるとし，これは可逆的でなくてもよい．この器械ではおもり一つ分を単位の距離だけおし下げると，おもり三つ分が距離 Y だけもち上がるとする．ここで，Y は X よりも高くはないということを証明することができるのである．すなわち，可逆的な器械がもち上げるよりも，**もっと高く**におもりをもち上げることのできる器械をつくることは不可能だというのである．その理由を考えよう．かりに Y が X よりも大きかったとしてみよう．おもり一つを考え，それを器械 B によって単位の距離だけおし下げると，おもり三つは距離 Y だけもち上がる．こうすれば Y は X よりも大きいのだから，**利用しうる動力**

が得られたことになる．そこでおもりをYからXまで下げ，それから可逆的の器械Aを反対むきに使って，おもり三つを距離Xだけおし下げ，おもり一つを単位の距離だけもち上げることができる．こうすると，このおもり一つは前と同じところに戻って，器械Aも器械Bも次の段の準備ができているということになる．このように，もしもYがXよりも高かったとすると，永久運動が得られることになる．しかしこれは不可能であると仮定しておいたことである．これらの仮定から，我々はこう結論することができる．**YはXよりも高くない**．したがって，考えうるあらゆる器械のなかで，可逆的な器械が最善のものであるということになる．

これだけでなく，おもりをもち上げる高さは，すべての可逆的の器械について，みな**まさに同じ**であるということもわかる．それには，まず器械Bも，実は可逆的であったとする．YがXよりも高いことはないという論法は，もちろん前のとおりそれでよいのであるが，こんどは我々は器械を反対の順に使い，論法を逆に進めて，**XがYよりも高いことはない**ことを証明することができる．これは実に注目すべきことである．何故ならば，このことによっていろいろの器械の**内部の仕掛けを見ないでも**，それがものをもち上げる高さを，論ずることができることになるからである．いま，誰かがおそろしく手のこんだ何段かのてこを使って，おもり一つを単位の距離だけおし下げることによっておもり三つをもち上げるものをつくったとする．一方，同じはたらきをする1段てこの可逆的なものをつくってこれとくらべてみても，手のこんでいる器械の方がおもりを高くもち上げられるということはない．むしろおそらく低いということが上のことからすぐわかるのである．またもし，彼の器械が可逆的なものであるならば，それがおもりをもち上げる高さは**いくら**であるかということも，我々にはキチンとわかる．これまでのことをまとめれば次のようになる：内部のしかけがどうであろうとも，1ポンドのものを1フィートおし下げることによって1コ3ポンドのものはどの高さまで上がるかというと，あらゆる可逆的の器械でそれはみな同じ距離Xである．これはたしかに非常に有用な普遍法則である．そこで次の問題は，いうまでもなく，Xの値はどれほどであるかということである．

ここに可逆器械があって，一つのおもりで三つのおもりを，距離Xだけもち上げようとしているとする．まず図4-2のように動かない方の(A)にタマを三つのせる．またタマ一つは，地面から1フィートの高さにある(C)の上にのせる．この器械によると，タマ一つを距離1だけおし下げることによって，タマ三つをもち上げることができる．タマ三つを納めている(A)には，床と棚が二つあって，その間の距離はきっちりXである．また横の(B)の間隔もXである(図a)．はじめに(A)から(B)にタマを水平にころがす(図b)．これには高さの変化がないから，エネルギーはいらない．この可逆器械をはたらかして，タマ一つを床までおし下げ，(B)を距離Xだけもち上げる(図c)．こ

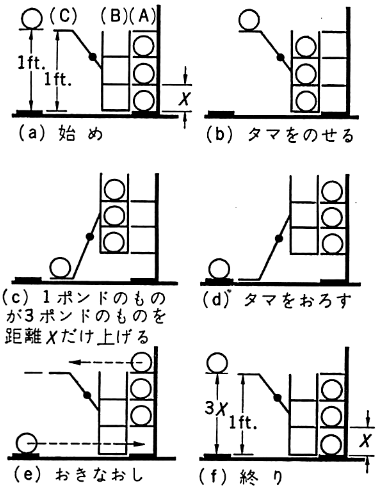


図4-2　可逆器械

の装置はうまくつくってあって，(A)と(B)との高さがそろうように なっている．そこで，タマを(A)にもどす(図d)．タマをもどしてから器械をもとどおりにする．こうするとタマ三つは，上の方3段の棚にのっていて，タマ一つは左の一番下にある．面白いことには，タマ二つは全然もち上げられなかったのと同じことである．というのは，前にも2番目の棚と3番目の棚とにはタマが入っていたからである．そして結果は要するに，**タマ一つ**を距離 $3X$ だけもち上げたということである．さて，もしも $3X$ が1フィート以上だったならば，そのタマを**下げれば**器械はもとの状態になる(図f)．そしてまた器械をはたらかせることができるということになる．すなわち，もしも $3X$ が1フィート以上であるならば永久運動になるのだから，$3X$ は1フィートをこえることはありえないのである．ところがこの器械は可逆器械なのだから，全体を逆むきにはたらかせれば，**1フィートは $3X$ をこえない**ということを証明することもできる．それゆえ，$3X$ は**1フィートより大きくも小さくもない**．頭の中だけで $X=\frac{1}{3}$ フィートという法則が出てくるのである．このことを一般化するのは簡単である：可逆器械をはたらかして，1ポンドのものをある距離だけ下げると，p ポンドのものはこの距離を p でわった距離だけもち上がる．別のいい方にすれば，3ポンドかけるそれのもち上がった距離——我々の例では X——は，1ポンドかけるそれの下がった距離——我々の例では1フィート——に等しい．すべてのおもりを考えて，それに現在の床からの高さをかける．それから器械をはたらかせ，もういっぺんすべての重さとその高さとをかける．そうすると**変化はゼロである**．(上の例ではおもりを一つ動かしただけだから，一つを下げていろいろちがうおもりをもち上げる場合にそれに拡張しなければならないが，それはやさしい．)

重さと高さとの積の和を**重力による位置のエネルギー**——一つの物体が地球に対する空間位置関係によって有するエネルギー——という．このエネルギーの式は，地球からあまり遠すぎない限り(高いところほど力は弱くなる)

$$\begin{pmatrix}\text{一つの物体の重力によ}\\\text{る位置のエネルギー}\end{pmatrix} = (\text{重さ})\times(\text{高さ}) \qquad (4.3)$$

である．

この話の進め方はたいへん見事である．ただ一つどうしても問題になるのは，ことによったら，これが正しくないかも知れないということである．(自然が我々の理屈のとおりにいうことをきか**ねばならぬ**ということはないのだ．) 例えば，永久運動は実現可能なのかも知れない．上のいろいろの仮定のなかには正しくないものもあったかも知れないし，また話の進め方にあやまりをおかしていたかも知れない．だから，いつもそれをためしてみることが必要なのである．我々の結論が正しいということは，**実験的に**たしかめられるのである．

何か他のものとの相対的位置によって生ずるエネルギーを一般に**位**

置のエネルギーという．上の例では，当然，**重力による位置のエネルギー**と名付ける．重力の代りに電気の力があって，我々がてこをたくさん使って，いくつかの電荷を“もち上げる”という仕事をするという場合なら，このエネルギーを**電気的の位置のエネルギー**というのである．一般的にいえば，エネルギーの変化とは，力とその力をはたらかせた距離との積である．

$$\left(\text{エネルギーの変化}\right) = (\text{力}) \times \left(\text{力のはたらきつづけた距離}\right). \qquad (4.4)$$

この講義が進むにつれて，他のいろいろの形のエネルギーについてもふれることになろう．

エネルギー保存の原理というものは，どんなことが起こるかということをみきわめる上に，非常に役に立つ場合がたくさんある．諸君は高等学校でも，滑車やテコをいろいろな使い方をした場合の法則をたくさん習ったことと思う．いまここでわかったように，それらの“法則”は要するに**みな同じものなのであって**，法則を75もおぼえる必要はないのである．簡単な一例をあげれば，滑らかな斜面の問題で，三角形の辺がちょうど3:4:5になっているとする(図4-3)．1ポンドのおもりを滑車を通じて斜面にのせる．滑車のもう一方の端にはおもりWを下げる．斜面にのっている1ポンドとつりあわせるためには，Wの重さはいくらでなければならないか，それを求めよう．それはどうすればわかるか？　もしもつりあっているというならば，可逆的で，自由に上げたり下げたりすることができるのだから，次のように考えればよい．最初の状態(図a)では1ポンドのおもりは一番下にあり，おもりWは一番上にある．Wが可逆的に下がると，1ポンドのおもりは一番上に来ていて，おもりWは斜辺の長さすなわち5フィートだけ，前にあったところから下がっている(図b)．1ポンドのおもりの**上がった**距離はたった**3**フィートであり，Wポンドの下がった距離は**5**フィートである．だから$W=\frac{3}{5}$ポンドである．ここで注意すべきことは，このことは**エネルギー保存**から導かれたのであって，力の成分の関係などから導かれたのではないということである．りこうなやり方というのも，しかし，相対的なことである．このことを導くのに，もっとうまい方法があるのであって，それはステヴィヌスによって発見され，その墓石に刻み込まれている．図4-4で，くさりはグルグルとまわりつづけることはないということから，Wは$\frac{3}{5}$ポンドでなければならないことがわかるのである．下にたれ下がっているくさりは，自分でつりあっていることは明らかである．だから，一方でおもり五つがひっぱっているのと，他方でおもり三つがひっぱっているのとがつりあっているに相違ない．辺の長さの比が何であっても同じことである．この図をみると，Wは$\frac{3}{5}$ポンドでなければならないことがわかる．(諸君の墓石にもこのような銘を入れたらすてきだ.)

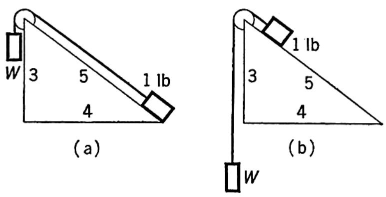
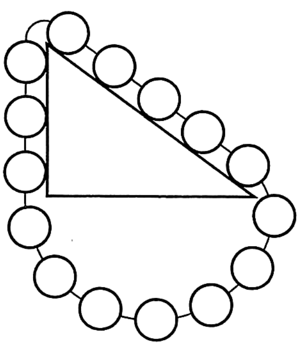


図4-3　斜　面


図4-4　ステヴィヌスの墓銘

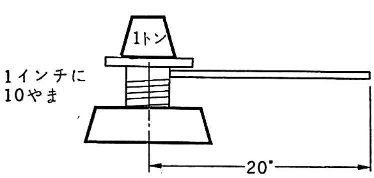


図4-5　スクリュージャッキ

次に図4-5のような，もう少しこみ入ったネジジャッキの系についてエネルギー原理を考えてみよう．スクリューをまわすハンドルの長

さは20インチでスクリューのねじは1インチに10本であるとする．1トン(2000ポンド)の目方をもち上げるのには，ハンドルにどれだけの力をかけなければならないか．それを求めよう．1トンのおもりを1インチだけもち上げようとするなら，ハンドルは10回まわさなければならない．ハンドルが1回まわれば，そのはじはおよそ126インチ動く．だからハンドルは10回で1260インチ動かなければならない．いろいろな滑車などを使えば，ハンドルのはじに何か小さなおもり W をはたらかせ，1トンのおもりをもち上げることができる．そしてこの未知の W はおよそ1.6ポンドであることがわかるのである．これは，エネルギー保存から出て来る結果である．

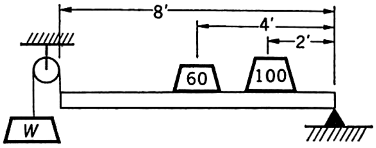


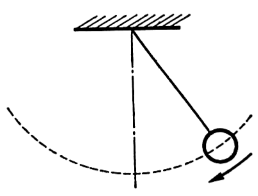
図4-6 棒に目方がかかり一端は支えられている

次には図4-6に示したような，更にもう少しこみいった例を挙げよう．長さ8フィートの棒があって，その一端が支えられている．棒の中央には60ポンドのおもり，支えから2フィートのところには100ポンドのおもりがのっている．棒をつりあわせるのには，棒のはじをどれだけの強さの力でおし上げなければならないか？ 棒の重さは無視する．棒のはじには滑車をつけ，それにおもりをつり下げたとする．棒をつりあわせるためには，おもりの重さ W の大きさは何程であるか．いま W がある任意の距離だけ下がったとする——簡単のために4インチだけ下がったとする——そのとき二つのおもりはどれだけ上がるか．中央は2インチ上がる．固定点から $\frac{1}{4}$ のところの点は1インチ上がる．よって，高さと重さとの積の和は変化しないという原則によれば，おもり W かける下へ4インチ，たす60ポンドかける上へ2インチ，たす100ポンドかける1インチは，ゼロでなければならない：

$$-4W+(2)(60)+(1)(100)=0, \qquad W=55 \text{ ポンド}. \qquad (4.5)$$

したがって，棒をつりあわせるには，55ポンドのおもりがなければならない．このようにして“つりあい”の法則が出てくる．——複雑な橋の構造の静力学，等々もそれである．このやり方は，**仮想仕事の原理**といわれるものである．そのわけは，この論を進めるのに，問題とする構造が少しだけ動く——それが**実際には**動いていなくても，あるいは**動けるものでなくて**さえも——と仮想するからである．エネルギー保存の原理をあてはめるために，非常に小さな運動を仮想するのである．

4–3 運動のエネルギー


図4-7 振　子

エネルギーの他の形の例を示すために，一つの振子を考える(図4-7)．おもりを横にひっぱって放すと，振子は左右に振動する．どちらのはじからでも中心の方にいけばおもりの高さは下がる．位置のエネルギーはどこへ行ってしまうのか．振子のおもりが一番下にきたときには，重力エネルギーはない；それでも，振子のおもりはまた上に上がっていく．重力エネルギーは何か他の形になったに相違ない．振子のおもりがまた上に上がることができるというのは，それが**運動**しているからであることは明らかである．よって，おもりがいちばん低

いところに来たときには，重力エネルギーは何か他の形に変換されているのである．

そこで我々は，運動によるこのエネルギーの表現を求めなければならない．可逆器械についての議論を思い出してみれば，振子のおもりがいちばん下に来ているときの運動には，ある量のエネルギーがあって，それによってある高さまで上に上がるということになる．そしてその高さは，上がってくるしかけや上がってくる**みちすじ**に関係しない．だから，腕白デニスの積木について求めたのと似た同様な式があるはずである．このエネルギーをあらわす別の形があるのであるが，それを求めることは，わけない．いちばん下のところにおける運動のエネルギーは，重さに，その速度に対応して上がりうる高さをかけた積に等しい：運動エネルギー$=WH$．しかし我々の求めようとするものはこれではなくて，物体の運動に関する何かの規則から，その高さが与えられるような式である．我々がある物体をある速度で，たとえばまっすぐ上にうち出したとする．それはある高さに達する：その高さがどれだけかはまだわからないが，しかしそれは速度の大小による——そういう式があるのである．速度Vで運動している物体の運動エネルギーを求めるには，それが到達しうる高さを求めて，それに重さをかける．すぐ後にわかるようにその式は次のとおりである．

$$\text{運動のエネルギー} = \frac{WV^2}{2g}. \tag{4.6}$$

運動にエネルギーがあるということと，我々の周囲に重力の場があるということとは，もちろん無関係である．その運動が**何によって**起こるかということは，問題にならない．この(4.6)の式は，いろいろな速度に対する一般式であるが，実は(4.3)も(4.6)も両方とも近似式である．第一に，高さが非常に大きくなると，この式は正しくなくなる．すなわち高さがたいへん大きくて重力が弱くなるような場合には通用しないのである．また，第二に，速度が大きいときには，相対論的の補正が必要である．しかし，エネルギーの正確な式を求めてみても，エネルギー保存という法則はいつも正しいのである．

4-4 エネルギーの他の形

他の形のエネルギーがあるという話は，まだつづく．まず，弾性エネルギーを考えよう．バネをひっぱり下げるには，我々はなんらかの仕事をしなければならない．ひき下げられたバネはそのことによっておもりをひき上げることができるのである．だから，バネがのびた状態ではこれから何か仕事をする能力をもっている．しかし，おもりの重さとそれをどこまで上げられるかという高さとの積を求めて，加え合わせたのでは，バネのもっている能力とあわない——バネがのびているということを考えに入れた何か他の項をつけ加えなければならないのである．弾性エネルギーというのは，バネがのびているということに対する表現である．それはどれだけか．バネを離せばそれはつり

あいの位置を通る．そのとき弾性エネルギーは運動エネルギーに変換され，ちぢんでいるか，のびているかという状態と，運動のエネルギーとの間をいったり来たりする．（重力のエネルギーもある程度入ったり出たりするのだが，バネの実験は“横向き”にやってもできる.）バネの運動は，しばらくつづいてからやがて消耗する．——さてさて！　我々は小さなおもりをのせてものを動かすとか，器械は可逆的だとか，あるいは器械は永久に動くとかなどといってこれまで話のつじつまをあわせてきた．しかし，ものは結局はとまってしまうのである．バネが上下運動をやめたら，エネルギーはどこへいったのか．これがまたエネルギーの他の形になるのである：熱エネルギーがこれである．

バネやテコの内部には結晶があり，その結晶は無数の原子でできている．その各部分を非常に注意してていねいに仕上げれば，一つの物体が他のものの上をころがるときに，どの原子もブルブルおどりだすことが全然ないようにすることができる．普通の場合に，物体がころがるときには，その表面がでこぼこしているので，はずんだり躍ったりして原子は内側で動きはじめる．このとき物体のエネルギーは行方不明になったようにみえる；ところがこの物体の運動がおそくなるにつれて，その内部では原子が勝手に目茶苦茶にふるえはじめる．まだ運動エネルギーはあるのだ，よろしい，しかしそれは目に見える運動とは結びついていないのである．すばらしい夢ではないか！　しかし，まだ運動エネルギーがあるということはどうして**わかる**のか？　温度計を使うと，じっさい，バネなりテコなりの**温度が高く**なっているのであって，たしかに運動エネルギーが一定の量だけふえているのである．この形のエネルギーを**熱エネルギー**という．しかし熱エネルギーは全く新しい形というわけではなく，**運動エネルギー**——内部運動にすぎないのである．（大きなスケールで我々が実験するときにであう困難の一つは，エネルギー保存を実際に示すこともできないし，可逆器械をつくることもできないということである．というのは，大きな物体を動かせば，原子も絶対に不動ではなく，ある勝手な大きさの運動が原子系におこってくるのである．それは目にはみえないが，温度計などで測ることができる.）

まだ他にもいろいろの形のエネルギーがあるが，いまくわしく述べることはもちろんできない．例えば電気エネルギーがある．——これは電荷の斥力や引力に関係したものである．また輻射エネルギー，光のエネルギーなどがある．光は電磁場の振動としてあらわされるのだから，これは電気エネルギーの一つの形であることがわかっている．また化学エネルギーがあって，これは化学反応によって放出される．弾性エネルギーもある程度化学エネルギーに似ている点がある．というのは，化学エネルギーは原子間の引力のエネルギーであり，弾性エネルギーもそうだからである．我々が現在理解しているところによれば次のとおりである：化学エネルギーには二つの部分がある．一つは

原子のなかの電子の運動のエネルギーであり，他は電子と陽子との相互作用の電気エネルギーである．だから化学エネルギーの一部分は運動的であり，残りは電気的なのである．次は，原子核エネルギーであって，これは原子核の中における粒子の配列によるエネルギーである．このエネルギーの表現はわかっているのだけれども，その基本的法則はわかっていない．核エネルギーは，電気的でもなく，重力的でもなく，また純化学的でもないことはわかっているが，それが何だかはわかっていない．エネルギーの何か別の形であるらしい．最後に，相対性理論に関連して，運動エネルギーの法則に修正——何という言葉でもよいのだが——があって，運動エネルギーは，**質量エネルギー**という別のものと結びつくのである．一つの物体は，それがただ**存在する**ということのために，エネルギーをもっているのである．ここに陽電子と電子とがあって，何もしないで静止しているとすると——重力も気にしない，何も気にしないで——この二つのものはやがていっしょになって消えてなくなってしまう．そしてきまった量の放射エネルギーが放出される．またその量も計算によって求めることができる．そのとき問題になるのは，そのものの質量であって，それが何であるかということには関係ない——二つのものを消滅させると，ある量のエネルギーが得られる．この式はアインシュタインによって初めて求められた．それは $E=mc^2$ というのである．

これまでの議論から明らかなように，エネルギー保存の法則は，ものごとを分析して考えていく上にたいへん有用である．エネルギーの式が全部わかっているわけではないので，上には二,三の例についてこのことを示したに過ぎない．エネルギーのすべての種類に対する式が全部わかっていたとすると，細かいところに立ち入らないでも，何種類の現象がありうるかということを知ることができる．このように，エネルギー保存の法則は実に重要である．そこで次に，当然おこってくる疑問は，物理学にはまだどんな保存則があるかということである．物理学には，エネルギー保存に似た保存則が他に二つあるのである．一つは線運動量の保存といわれるものであり，もう一つは，角運動量の保存といわれるものである．これらについては，後にくわしく述べることにする．上に述べたところでは，我々は保存則を深く理解したとはいえない．エネルギー保存を理解してはいない．我々はエネルギーとは非常に小さな粒つぶの数だとは理解していないのである．光子は粒子としてあらわれる．そして光子一つのエネルギーは，プランクの定数と周波数とをかけあわせたものであるということを，諸君はきいたことがあるだろう．これは確かにそうである．しかし，光の周波数は何でもよいのだから，エネルギーは一つのきまった量でなければならないということはない．腕白デニスの積木とちがって，エネルギーの量はどんな大きさでもよい．少なくとも現在理解されているところではそうなのである．だから，今日我々が理解するところでは，エネルギーというのは一つ二つと数えられるものではなく，一つの数学

的量であって，抽象的でむしろ不思議なものなのである．量子力学によると，エネルギーの保存ということは，自然現象は，**絶対年代に関係しない**という，自然界のもう一つの重大な性質と非常に密接な関係をもっているのである．ある時刻に一つの実験をやってみる．そして後になって同じ実験をもう一遍やってみる．そうすると全く同じことが起こる．このことが厳密にほんとであるかどうかは，我々は知らない．かりに，それがほんとで**ある**と仮定して，それに量子力学の諸原理をあわせて考えると，エネルギー保存の原理が出てくるのである．これはやや捉え難くかつ興味のあるところであって，説明するのは容易ではない．また他の二つの保存則もこれに関連している．運動量の保存は，量子力学においては，**どこで**実験をしてみても結果は同じであるという仮定と結び付いている．場所によらないということと運動量保存との関係は，時刻によらないということとエネルギー保存との関係に似ている．最後に，実験の装置を**まわし**ても，現象には何のちがいも生じない．このようにどちら向きにしても自然界は不変だということと**角運動量**の保存と関係しているのである．これらの他に保存則がまだ三つある．今日のところではこれは精確になりたち，ちょうど積木を数えるようなわけなので理解するのがずっと簡単で**ある**.

その三つの第一は，電荷の保存である．それのいうところは，プラス電荷の数からマイナス電荷の数をひいて，それがいくつあるかを数えると，その数は決して変化しないというのである．プラス一つとマイナス一つとをいっしょに帳消しすることはできるが，プラスをつくりだして差引きマイナスよりも多くするようなことはできない．他の二つの法則もこれに似ている——一つは重粒子の保存とよばれるものである．中性子や陽子がその例であるが，重粒子とよばれる奇妙な粒子がたくさんある．自然界でどんな反応が起こっても，重粒子がいくつそれに関与するかを数えると，結局の重粒子の数*ははじめと全く同じなのである．もう一つの法則は**軽粒子の保存**である．軽粒子といわれる粒子の仲間は次のとおりである．電子，ミュー中間子，ニュートリノ．反電子は陽電子であって，軽粒子 −1 個である．ある反応における軽粒子の総数を数えると，はじめにあった数とおわりにある数とはいつも同じで決して変化しない．少なくとも現在我々が知っているかぎりでは変化しない．

このように，保存法則は六つあるわけだが，そのうち三つは，空間や時間が入ってきて捉えにくいが，他の三つは何かを数えるというのだから簡単である．

エネルギーの保存について論ずるときに，**使える**エネルギーというものを問題とするならば，話は別だということを忘れてはならない．——海水はある温度をもっているのだから，その原子は躍りまわっている．しかし他からエネルギーをとることなしにそれを集めてきまっ

* 反重粒子は，−1 個の重粒子と数える．

た運動をさせることは不可能なのである．我々は，エネルギーは保存するという事実を知ってはいるけれども，人間の利用にたえるエネルギーは，そうやすやすとは保存しないのである．どれだけのエネルギーが使えるかということを支配する法則は，**熱力学の法則**であって，それには非可逆熱力学過程のエントロピーという概念が入ってくる．

最後に述べておきたいのは，今日エネルギーの供給源はどこに求められるかということである．エネルギーの供給源は，太陽であり，雨であり，石炭であり，ウランであり，水素である．太陽によって雨が生じ，また石炭も生ずるのだから，これらはすべて太陽が源である．エネルギーは保存するのだけれども，自然の女神はそのことにはあまり関心をもっていないようだ．太陽からは厖大なエネルギーが放出されるのだけれども，地球へ来るのは，たったその 20 億分の 1 だけである．自然界にはエネルギーの保存が成り立つのだけれども，自然の女神はそれを気にしないで，それを四方八方にすっかり消費してしまう．我々はウランからエネルギーを得た；水素からもエネルギーが得られる．しかし今日のところではそれは爆発的な危険な条件の下でしか得られない．もしも熱核反応でそれが調節できるようになったなら，水 10 リットルから毎秒得られるエネルギーは，アメリカ合衆国でつくられる全電力と同じであるということになる．すなわち 1 分間に 150 ガロンの割で水を使えば，今日合衆国で使われている全電気的エネルギーをまかなうことが十分できる．我々は常にエネルギーを求めているのだが，どのようにしたら我々はその要求から解放されるか．このことを考えるのは，物理学者の双肩にかかっている．そしてそれはできることなのである．

第5章
時間と距離

5-1 運　　動

この章では，**時間**という概念と**距離**という概念について，いくつかの面を考えてみることにする．前にも強調したとおり，物理学は，他のすべての科学と同じように，**観測**に依存する．物理的科学が発達して今日の姿になったのは，主として，**量的**な観測をするということに重きがおかれた結果であるといってよい．物理学の核心は量的の関係に到達することにあるが，それは量的の観測によってのみ可能なのである．

350年前にガリレオがやった仕事を物理学のはじまりであるとし，ガリレオをもって最初の物理学者であるとしようとする人が多い．それまでの，運動の研究というものは，思弁的なものであって，ただ頭の中で考えられる議論にもとづいたものであった．その議論の大部分は，アリストテレスやその他のギリシャの哲学者のいい出したものであって，“証明ずみ”のこととされていた．ガリレオはそれに疑いをもち，運動に関する一つの実験を行なった．それは，本質的に次のようなものであった．溝に勾配をつけてそれにそってタマをころがして，その運動を観察したのである．彼はそれをただ見ただけではない；**どのくらい時間がたつと**タマは**どのくらい進んでいるか**ということを測定したのである．

距離を測る方法は，ガリレオよりもずっと前からよくわかっていた．しかし，正確に時間を測る方法，特に短い時間を正確に測る方法はなかった．ガリレオは後になってもっとよい時計(我々の知っているような時計ではないが)を工夫したけれども，最初の実験のときには，等間隔の時間を数えるのに，脈搏を使った．我々も同じことをしよう．

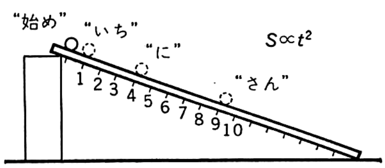


図5-1　タマは傾いた途にそってころがりおりる

タマが坂を下りてくると同時に，“1…2…3…4…5…6…7…8…”と脈搏を数える．友達にたのんで，脈一つごとにタマの位置に小さいしるしをつけてもらう；こうすれば，時間間隔1, 2, 3, 4, … ごとに，出発点からタマがどこまで動いたかという**距離**を測ることができる．ガリレオは**彼の**観測の結果を次のようにいいあらわしている．動き出した瞬間から時間が1, 2, 3, 4, … 単位たったときのタマの位置にしるしをつけると，それらの位置と出発点との間の距離は1, 4, 9, 16, … という数に比例するというのである．今日では，我々は，距離は時間の自乗に比例するという：

$$D\propto t^2.$$

運動をしらべるのは，物理学全体の根本であって，**どこ**と**いつ**という問題を取り扱うのである．

5-2 時　間

まず**時間**というものが何を意味するかを考えてみよう．時間とは何で**ある**か．時間のうまい定義があれば結構である．ウエブスター辞典をひいてみると“時間”は“間隔”であると定義してあるが，“間隔”の方をみると“時間”であると定義してある．これではあまり役に立ちそうにない．あるいはこういえばいいのかもしれない．“時間とは，他に何事が起こらなくても起こるものである”．しかしこういっても大したことはない．時間というものは我々が定義(辞書的な意味で)できそうにないもののうちの一つであるというのだとしたら，それはもうわかりきっているものだと割りきってしまうのもよかろう：時間とはどれだけたつかということである！

しかし，ともかくほんとに大切なことは，時間をどのように**定義する**かということではなくて，どのようにして測るかということなのである．時間を測る一つの方法は，規則正しく何遍も何遍もくりかえすなんらかの現象——何か周期的な現象——を利用することである．例えば，1日というようなものである．1日というものは，何遍も何遍もくりかえし起こっているようである．しかしちょっと考えてみても，“日というものははたして周期的なのだろうか；日というものは規則正しいのだろうか”という疑問が当然おこってくる．1日の長さはいつでもすべて同じ長さなのだろうか．夏の1日は冬の1日よりも長いという感じをもっている人もきっといるだろう．また退屈な冬の1日は，ばかに長いと思われることもたしかにある．“オヤ，今日の1日の長かったこと！”などと誰かがいっているのを諸君もきいたことがあるにちがいない．

しかし，1日の長さは**平均して**だいたい同じ長さであるようである．1日の長さがはたして同じであるかどうか——ある1日と次の日とが，あるいは少なくとも平均して——をためす方法はないだろうか．その一つの方法は何か他の周期的現象と比較することである．砂時計を使って，そのような比較をするにはどうすればよいか．砂時計をもってきて，一日中，誰かにそのそばにいてもらい，砂の最後の粒がおちたら砂時計をさかさまにするように頼んでおけば，周期的現象を“つくりだす”ことができる．

こうすれば，朝から次の朝までの間に砂時計を何遍さかさまにしたかという回数を数えることができる．こうやってみると，こんどは，“時間”(砂時計をさかさまにすること)の数は，“日”によって決して同じではないことがわかる．これでは太陽も，砂時計も，あるいは両方とも信用できないということになる．しかしちょっと考えてみれば気が付くように，正午から翌日の正午までが何“時間”であるかを数えればいいのである．(ここで正午というのは12時00分ではなく，太陽

がいちばん高いところにある瞬間である.）こうやってみるとこんどこそ，正午から正午までの“時間”の数は，毎日同じであることがわかる.

こうして我々は“時間”も“1日”も規則正しい周期性をもっていることを確信し，そして時間に等間隔の仕切りをつけるのである．もっとも，両方が“真に”周期的であることを**証明**したわけではない．ところで，ここに何か全能者がいて，砂時計の砂の流れを夜はおそくし昼は速くするということはありえないかという疑問も生じるかも知れない．我々の実験では，この種の疑問に答えることはできない．我々がせいぜいいえることは，ある一種の規則性が他の種の規則性とうまくあうというだけのことである．我々が時間を定義するのには，何か周期的とみえる現象のくりかえしにその根拠を求めているということだけはいえるのである.

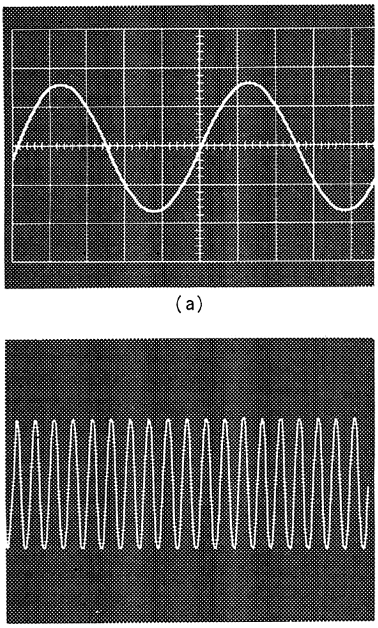
5–3 短い時間

我々は，1日の長さというものが，いつも同じように繰り返されているのかということを検討したのであるが，その過程の中で，大切な副産物が得られたことに注意しておく必要がある．我々は**1日の何分の1**という長さを正確に測る方法を見出した．すなわち，時間を短いものにわけて測るという方法を見出したのである．このやり方をおしすすめて，もっと短い時間を測ることはできないだろうか.

ガリレオは，一つの振子は，その振幅が小さい限り，いつも等間隔で前後に振れるということをたしかめている．ためしに1“時間”の間に振子が何回ふれるかを数えてくらべてみると，たしかにそうなっている．こうして我々は1時間というものをいくつかに仕分けることができる．機械的の工夫を使って振動を数え——そしてそれをつづけるなら，——振子大時計ができるわけである.

さて，我々の振子が1時間に3600回振動するならば（そして1日の中にその1時間が24あるならば），この振子の周期を1“秒”ということにきめる．こうすればもとの時間の単位をおよそ10^5にわけたことになる．同じ理屈で，1秒をさらにさらにこまかい間隔にわけることができる．しかし，諸君もみるとおり，むやみにはやく振動する機械的振子をつくることはむずかしい．今では発振器と称する**電気**的振子をつくって，振動周期の非常に短いくりかえし現象をつくり出すことができるのである．このような電子発振器で前後に振動するのは電流であって，これが振子のおもりに相当する.

このような電子発振器を何段かつくって，それぞれ一つ手前のにくらべて周期が$\frac{1}{10}$になっているようにしたとする．おのおのの発振器を“検定”するには，一つ前のおそい発振器が1ふれする間にそれが何回ふれるかを数えればよい．しかし振動周期が1秒よりも短くなると，その振動を数えるには，何とか工夫して我々の観測能力を拡大しなければならない．その工夫の一つは例えば陰極線オッシロスコープであって，これは短時間をみる顕微鏡のようなものである．このしか



(a)　(b)

図 5-2　オッシロスコープの螢光板にうつる二つの曲線
(a)ではオッシロスコープはある発振器につながっている　(b)ではその$\frac{1}{10}$の周期の発振器につながっている

けでは，電流(あるいは電圧)と時間との関係を示すグラフが螢光スクリーンの上にプロットされる．このオッシロスコープを我々の発振器の二つにつなぐ．まず一つの発振器の電流のグラフを書かせ，次にもう一つの発振器の電流のグラフを書かせると，図 5-2 に示したようなものが得られる．おそい方の発振器の 1 周期の間に，はやい方の周期がいくつふくまれているかをこの図から数えるのはわけない．

近代的の電子技術を利用して，10^{-12} 秒というくらい短い周期で発振するものもできている．そしてその周期は，前に述べたような比較方法によって我々の時間の基本単位，秒，に対して検定されている．この数年間，“レーザー”という光増幅器が開発され完成されたが，それによって，10^{-12} 秒よりも周期の短い発振器がつくられるようになった．その周期を，上に述べたような方法によって検定することはまだ不可能であるが，しかし，これも間もなく解決するであろう．

10^{-12} 秒よりも短い時間が測定されることもあるが，これは別の手法によったものである．実は，“時間”の**定義**として別のものが使われているのである．その一つの方法は，ある運動体に二つの現象が起こる間に，それが，どれだけ動いたかという**距離**を測るのである．例えば自動車が走っていて，ヘッドライトをつけ，次に消したとすると，どこでつけたか，どこで消したかという位置と，自動車の速さとがわかっていれば，ヘッドライトがついていた時間の**長さ**を求めることができるのである．その時間は，ヘッドライトがついていた距離を速さでわればよい．

最近数年の間に，π° 中間子の寿命を測るのに，まさにこのような方法が使われた．π° 中間子が写真エマルジョンの中で生じて，その中に残した小さな跡を顕微鏡でみると，π° 中間子(光に近い速さで飛ぶということはわかっている)が，崩壊するまでに平均としておよそ 10^{-7} m の距離を動くということがわかった．それの寿命はたった 10^{-16} 秒であったわけだ．前とはちょっとちがった“時”の定義がここで使われたことに注意しておかなくてはならない．しかし，我々の理解に矛盾を生じないかぎり，両方の定義は同等であると信じている．

我々の技術を更に拡大し——必要とあらば定義を拡大して——更にもっとはやい物理現象の経過時間を考えることができる．原子核内の振動周期というようなものも考えることができる．第 2 章に述べたような，最近発見された新奇な共鳴(粒子)の寿命も考えられる．その全寿命はわずかに 10^{-24} 秒であって，光(我々の知っているもののなかでいちばん速い)が，水素の核(我々の知っているもののなかでいちばん小さい)をよぎる時間とだいたい等しい．

もっと短い時間についてはどうだろうか？　もっと短い“時間”というものは存在するのだろうか？　我々がその短い時間に起こることを測ることができないとしたら——あるいはそういうことを考えても無駄だというなら——もっと短い時間ということを口にすることに，はたして意味があるのだろうか？　恐らくないのだろう．しかし，こ

れは未解決の問題であって，諸君が疑問をもち，そして将来20年か30年の間に諸君自ら解決すべき問題である．

5-4 長い時間

こんどは1日よりも長い時間について考えよう．長い時間を測るのはわけない．日数をかぞえるだけでよい——それをかぞえてくれる人がいる限りわけないことである．他にもまだ自然の周期というものがある：およそ365日の1年がある．その他にも，自然が，年数を数える手段を提供してくれていることがある．たとえば，木の年輪だとか，河底の堆積物などがそれである．昔，あることが起こってから，どのくらいの時間が経過したということをきめるのに，このような自然時計が役に立つ場合がある．

長い時間を測るときに，年数を数えることができないという場合には，他の測定法をみつけなければならない．そのなかで，最も成功した方法の一つは，放射性物質を"時計"として使うということである．この場合には，日とか振子とかいう周期的現象はないけれども，また別の種類の"規則性"がある．ある種の物質のサンプルを一つとってその放射能を測ると，その年代が一定の長さだけ古くなると，**一定の割合**で強さが減少することがわかっている．放射能を時間(例えば日数)の関数として観測してグラフにかくと，図5-3に示したような曲線が得られる．放射能が T 日で半分になったとすると(これを半減期という)，更に T 日たてば $\frac{1}{4}$ になる．以下同様である．任意の時間間隔 t を考えると，その中には半減期が $\frac{t}{T}$ 個あるわけだから，t だけ時間がたった後に残っているものの割合は $\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}$ である．

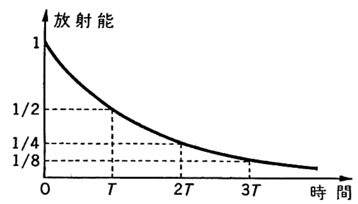


図5-3 時間による放射能の減衰
放射能は"半減期" T ごとに半分ずつにへる

ある1片の物質，例えば1片の木，があって，それができたときには A という量の放射性物質が含まれていたということがわかっているとする．そして，直接の測定によって，いまは B という量の放射性物質が含まれているということがわかったとすれば，次の方程式をとくことによって，このものの年齢 t を計算することができる．

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}=\frac{B}{A}.$$

具合のいいことに，一つのものが形成されたときにその中にどのくらいの量の放射能が含まれていたかがわかる場合がある．例えば，空気中の二酸化炭素は，放射性アイソトープ C^{14}(宇宙線の作用でたえず補充されている)を少量含んでいることがわかっている．そこで，あるものの中の炭素の全量を測れば，それのある一部分は，もとは放射性 C^{14} であったわけである．だから上の式の最初の値 A がわかる．炭素-14 の半減期は5000年である．綿密な測定によると，この半減期の20倍ほどの長さの時間がたった後に残っている量をも測ることができる．こうして10万年も昔に生きていた生物の"年をきめる"ことができるのである．

もっと古いものの年齢も知りたいことであるし，また我々は知って

表 5-1　いろいろの時間

年	秒		何の平均寿命か
		???	
	10^{18}	宇宙の年齢	
		地球の年齢	U^{238}
10^{9}			
	10^{15}		
10^{6}		最古の人類	
	10^{12}	ピラミッドの年齢	
			Ra^{226}
10^{3}		アメリカ合衆国の年齢	
	10^{9}	人間の寿命	H^{3}
1			
	10^{6}		
		1日	
	10^{3}	光が太陽から地球まで伝わる	中性子
	1	心臓のひとうち	
	10^{-3}	音波の周期	
	10^{-6}	ラジオ波の周期	μ 中間子
			$\pi^{\pm}$ 中間子
	10^{-9}	光が1フィート伝わる	
	10^{-12}	分子回転の周期	
	10^{-15}	原子振動の周期	
			π° 中間子
	10^{-18}	光が原子をとおる	
	10^{-21}	原子核振動の周期	
	10^{-24}	光が原子核をとおる	奇妙な粒子
		????	

いると思う．そのような知識の大部分は，いろいろちがった半減期をもっている他の放射性アイソトープの測定の結果からわかってきたのである．測定に使うアイソトープの半減期が長ければ長いほど，長い時間を測ることができる．例えばウランには半減期が 10^9 年のアイソトープがある．だからもしもウランを含んでいるものが形成されたのが今から 10^9 年の昔だったとすれば，今日ではその半分しか残っていないはずである．このウランは崩壊すると，鉛に変わる．大昔に何か化学的に形成された岩石の1片をとって考える．鉛とウランとは化学的性質がちがうので，鉛はこの岩石のなかのある場所に集まり，ウランは他の場所に集まって，ウランと鉛とは別々になる．今日この岩石の1片をみると，ウランだけあったはずの場所が，一部分ウランで一部分鉛になっている．それらの割合をくらべれば，ウランの何パーセントがなくなって，それが鉛に変わったのかということがわかる．この方法によって，年齢が数十億年だということがわかった岩石もある．この方法を拡張して，特定の岩石を使う代りに，海水の中のウランと鉛に着目して地球全体の平均をとると，地球自身の年齢はおよそ55億年であることが(この数年来)わかってきた．

地球にふってくる隕石の年齢もウラン法できめられるが，地球の年齢がそれと同じであることがわかったのは，面白いことである．地球は，宇宙にただよっていた岩片から形成されたものであり，また隕石はおそらく岩片の残りであると思われる．50億年以上昔のあるとき

に，宇宙ははじまった．また宇宙に人間というものが生まれたのは，1〜1.2千万年の前のことだと，今では信ぜられている．それ以前にどんなことが起こったか，我々は知らない．そこで，次のような疑問が当然おこってくる：この問題は意味をなすか？ それより以前ということには意味があるのか？

5-5 時の単位と基準

前に述べたところから察せられるとおり，まず例えば1日とか1秒とかいう時間の基本的単位をきめて，他の時間はすべてこの単位の倍数とか分数とかとしていいあらわすのが便利である．では時間の基本としては何を採用すべきであろうか？ 人間の脈搏をとろうか？ 脈搏をくらべると，それは時によってひどく変化するものであることがわかる．時計を二つくらべると，そんなに大きくは変化しない．だから，時計を使えばいいということになるのは当然である．しかし，その時計とは誰の時計か？ あるスイスの少年が，自分の住んでいる町のすべての時計が正午に一斉になるようにしたいと考えたという話がある．そこで彼は町中を歩きまわって，このことの価値をみんなに納得させようとした．自分の時計が正午を打つときに他の時計もみんないっせいに正午をうつならば，これはすばらしいことだと思わない人はいなかった！ 基準として誰の時計をとるべきかということをきめるのは，なかなかむずかしいことである．都合のいいことに，我々はみな一つの時計——地球——を共有している．そしてこの地球の自転周期が，長い間，時間の基本として採用されてきたのである．しかし，最善の時計を使って地球の自転を測ってみると，測定が次第に精密になるにしたがって，それは正確には周期的でないことがわかってきた．この“最善”の時計というのは，互いによくあうから，きわめて正確であると信ずる理由のあるものである．いろいろのことから考えていま我々が信じているのは，ある1日の長さは他の1日の長さよりも長いこともあり，短いこともある．そしてまた，平均として自転の周期は何百年という間には少しずつ長くなるということである．

つい最近までは，地球の周期よりももっと一定であるというようなものは知られていなかった．それで，すべての時計は1日の長さをもととして，1平均日の $\frac{1}{86400}$ を1秒ときめてきた．近頃，我々はある種の自然振動について経験をつんできたが，それは地球よりももっと恒久的な基本になりそうであり，しかも，それはあらゆる人の手の届くところにある自然現象にもとづくものである．これがいわゆる“原子時計”である．この基本となる周期は原子の振動であって，それは温度その他の外界の状況によってほとんど変わらない．この時計の精度は $\frac{1}{10^9}$，あるいはそれ以上である．最近の2年間に，原子時計の改良型もできた．これは水素原子の振動によってはたらくのであって，ハーバード大学のノーマン・ラムゼイ教授によって設計され製作された．彼の信ずるところによると，この時計は，さらに100倍も正確だ

ということである．その測定が進行中なので，はたしてそうであるかどうかは，やがて明らかになることだろう．

天文学的時間よりも正確な時計をつくることができるようになったのだから，やがて科学者の意見が一致して，原子時計のどれかを基準として時間の単位を定めようということになることと思われる．

5-6　長い距離

次に**距離**の問題に移ろう．いろいろのものは，どれだけの距離にあり，またどれだけの大きさであるのか？　誰でも知っているとおり，距離を測るのは，まず棒を用意して数えるのである．あるいは，指をひろげて数える．あるいは，一つの単位をもととして数える．小さいものを測るにはどうすればよいか？　距離をいくつかにわるのにはどうすればよいか？　それは時間をいくつかにわけたのと同じやり方を使えばいい：短い方の単位をとって，それがいくつで長い方の単位になるかという数を数える．このようにして我々は次々と短い距離を測ることができる．

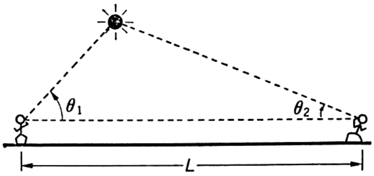


図5-4　スプートニクの高さは三角測量で求められる

しかし，距離といったとき，1メートルの長さの棒で数えられるものばかりだとは限らない．長さ1メートルの棒を使うだけで二つの山のいただきの間の水平距離を測れといっても，それは無理だろう．我々は経験によって，別の方法——三角測量——でも距離を測ることができることを見出した．ここで距離というものについて，実はちがった定義が使われていることになるが，普通の方法と三角測量とが両方とも使える場合には，両者の結果はよくあうのである．空間というものは，ユークリッドが考えたようなものなのであって，だからこそ距離に関する2種類の定義が矛盾しないのである．地球の上で矛盾しないのだから，もっと長い距離にも三角測量を使うという自信がわく．例えば，三角測量を使って，スプートニク1号の高さを測ることができたのである．その結果によると，その高さはおよそ 5×10^5 m であった．更に精密な測定をすれば，同じようにして月までの距離を測ることもできる．地球上で相へだたったところに望遠鏡を二つおけば，必要とする角度が求められる．このようにして，月までの距離は 4×10^8 m であることがわかった．

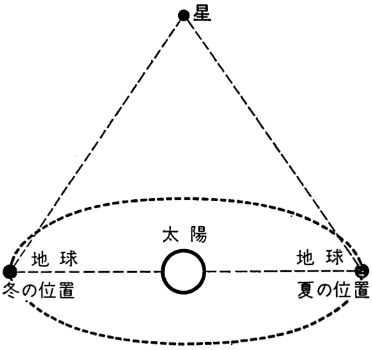


図5-5　地球の軌道の直径を基線として使えば三角測量によって近い星までの距離が求められる

しかしこれと同じ方法を太陽にあてはめることはできない．少なくともまだ誰も成功していない．太陽上の1点に焦点をあわせ，またその角度を測るという精度がまだ充分でないので太陽までの距離を測ることができないのである．では，どうすれば太陽までの距離を測ることができるのだろうか？　我々は何とか工夫して三角測量の考えを拡張工夫しなければならないわけである．我々はいろいろの惑星がどこにみえるかということを天文学的に観測して，それらすべての惑星の**相対的**距離を測定し，太陽系のようすを描き出している．しかし，**絶対**距離はわかっていないのである．だから，何か一つの絶対測定が必要なのであって，これについてはこれまでいくつかの方法が試みられ

た．最近までいちばん正確だと信ぜられていた方法は，地球からエロスまでの距離を測定することである．エロスというのは，小惑星の一つであって，ときどき地球の近くをとおる．そこでこの小さな天体に対して三角測量をあてはめると，我々が必要とするスケールがわかることになる．他のものの相対的距離はわかっているのだから，例えば，地球から太陽まで，あるいは地球から冥王星までの距離もわかることになるわけである．

太陽系のスケールについては，我々の知識はこの数年間に大いに進歩した．ジェット推進研究所では，レーダーの直接観測によって，地球から金星までの距離が非常に正確に求められた．もちろんこうやって出てくる距離というものは，これまでとちがった種類のものである．光が伝わる速さ(したがってレーダー波の伝わる速さ)はわかっている．また地球と金星との間では光の速さはどこでも同じであると仮定するのである．無線波を送り出して，それが反射して帰って来るまでの時間を測る．速さがわかっているとして，**時間**から**距離**を出すのである．これはまた距離測定というものの新しい定義である．

もっとずっと遠くにある星までの距離はどうやって測るか？ 幸いなことに，これは三角測量に立ち戻って考えればよいのである．すなわち，地球は太陽のまわりをまわっていて，大きな基線を提供してくれているので，これによって太陽系外の星までの距離を求めることができるのである．夏と冬とに同じ星に望遠鏡をむけたとき，二つの角が充分精密に求められればよく，それによってその星までの距離が求められる．

星がもっと遠くて三角測量が使えなかったらどうすればよいか？ 天文学者はその距離を測る新しい方法をたえず工夫しているのである．例えば，星の色によって，その大きさと光度とを推定することができるということを見出している．地球の近くにあるいくつもの星――そ



図 5-6　銀河系の中心近くにある星団　地球からの距離は 30,000 光年すなわちおよそ 3×10^{20} m である

の距離は三角測量によってわかっている——の色と光度とを測定して，色と絶対光度との間に一つのなめらかな関係(たいていの場合)が成立することが見出された．さてもし遠い星の色を測ったとすれば，色-光度の関係によって，この星の絶対光度がきめられる．そして，地球からみてこの星はどのくらいの明るさに**見えるか**(どのくらい**暗く**見えるかというべきであるかも知れない)を測れば，その星がどのくらいの距離にあるかを計算することができる．星までの距離を測るこの方法が正しいということのいい証拠は，球状星団という星群に関する結果から得られた．そのような星団の写真は，図5-6に示してある．この写真をみればすぐわかるように，これらの星はみんな近いところにかたまっているにちがいない．色-光度法によって距離をきめると，



図5-7　われわれの銀河系に似ている渦巻銀河系
この直径がわれわれの銀河系の直径と同じくらいだとすると
この見かけの大きさからその距離を計算することができる
地球からの距離は3,000万光年(3×10^{23} m)である

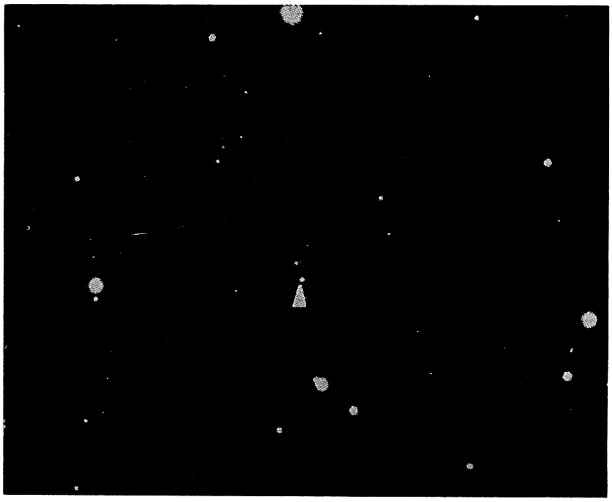


図5-8　200インチ望遠鏡でこれまで(1960年)に測られた一番
遠い天体　うしかい座3C295(矢で示してある)

そのとおりみな同じ値になるのである.

球状星団をたくさん調べると，また大切なことがわかってくる．天にはこのような星団がたくさんある部分があって，その大多数は我々からだいたい同じ距離にある．このことと他の証拠とくみあわせて，我々は，この星団がたくさん集まっているところが，我々の銀河系の中心であると結論する．このようにして，銀河系の中心までの距離がわかる．——だいたい 10^{20} m である．

我々の銀河系の大きさがわかったので，更に遠くまでの距離——他の銀河系までの距離——を測る手がかりが得られたことになる．図5-7は，ある一つの銀河系の写真であって，わが銀河系とよく似た形をしている．大きさも多分同じであろう．(いろいろの銀河系はすべて同じ大きさであるという証拠がある.) もしも，それらがわが銀河系と同じ大きさであるならば，その距離がわかる．空にみえる角度をはかる；直径はわかっている，距離を計算する——またしても三角測量である！

最近パロマの大望遠鏡で非常に遠くにあるいくつかの銀河系の写真がとれた．その一つが図5-8に示してある．これらの銀河系のうちには，宇宙のはてまでのおよそ半分のところにあると信ぜられているものがある．——10^{26} m のかなた——我々の考えうる最大の距離である！

5-7 短い距離

さてこんどは今までよりも短い距離について考えよう．1メートルを細分することはやさしい．1メートルを千等分することもむずかしくはない．それよりはむずかしいが，同じようにして(よい顕微鏡を使って)1ミリメートルを千等分してミクロン(1 m の 100 万分の 1)の目盛をつくることもできる．それよりもこまかい目盛をつくるということになると，それはむずかしい．何故かといえば，目に感ずる光の波長(およそ 5×10^{-7} m)よりも小さなものを我々は“見る”ことができないからである.

しかし，目に見えるところまでで止めるには及ばない．電子顕微鏡を使えば，例えば 10^{-8} cm(図5-9)というようなもっと小さな写真をとることができるのだから，それによって先に進むことができる．間接的な方法——顕微鏡的目盛に応用した三角測量の一種——を使えば，もっともっと小さなスケールにまでつづけて測ることができる．まずこまかい間隔でしるしをつけたものに波長の短い光(X線)をあてて，それからどのように反射されるかを観測する．これによって，この光振動の波長を求める．次に同じ光を結晶にあてて，それによって散乱される様子を調べ，その結晶の内部における原子の相対的位置を定めることができる．その結果は化学的の方法によってきめられた原子間隔と一致するのである．このようにして，原子の直径はおよそ 10^{-10} m であることがわかった.

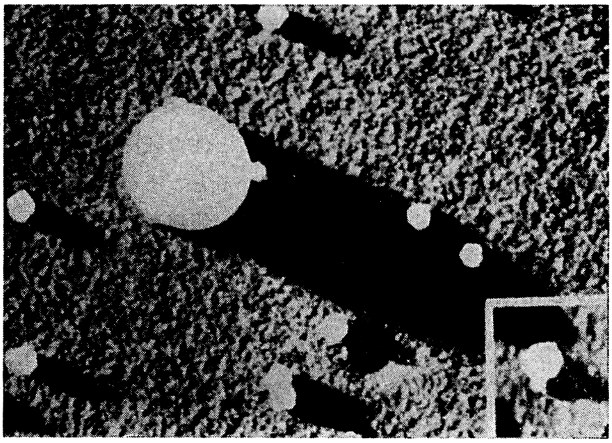


図5-9　あるウィルスの電子顕微鏡写真
"大きい"タマは寸法をきめるためのもので直径が 2×10^{-7} m (2000Å)であることがわかっている

表5-2　いろいろの距離

光　年	m	
		？？？？？
	10^{27}	
10^{9}		宇宙のはて
	10^{24}	
10^{6}		いちばん近い銀河系まで
	10^{21}	
10^{3}		われわれの銀河系の中心まで
	10^{18}	
1		いちばん近い恒星まで
	10^{15}	冥王星の軌道半径
	10^{12}	太陽まで
	10^{9}	月まで
	10^{6}	
		スプトニクの高さ
	10^{3}	
		テレビアンテナ塔の高さ
	1	子供の身長
	10^{-3}	食塩のひとつぶ
	10^{-6}	
	10^{-9}	ウィルス
	10^{-12}	原子の半径
	10^{-15}	原子核の半径
		？？？？

典型的な原子的大きさというものはおよそ 10^{-10} m であるが，原子核の大きさは 10^{-15} m，すなわち 10^{-5} 倍も小さい．物の大きさというものにはここに大きな"ギャップ"がある．原子核的の大きさを測るには，別に便利な方法がある．原子核の有効**断面積**といわれている**みかけの面積** σ を測るのである．半径を知りたければ，それは $\sigma=\pi r^2$ から求められる．原子核はだいたい球形だからである．

ある原子核の断面積を測るには，高エネルギーの粒子線を物質の薄い板にあて，通過しない粒子の数を数えればよい．これらの高エネルギー粒子は，電子の薄い雲のところはまっすぐにつきぬけるが，もし

も重さの集中している原子核のところにあたると，そのときには，止められたり進路が曲げられたりする．いま厚さ 1 cm の物質片があるとすると，そこには原子の層がおよそ 10^8 層もある．しかし原子核は非常に小さいのだから，ある原子核が，他の核のすぐ後にあるというチャンスはほとんどない．このようすを非常に拡大すれば——粒子線に沿った方向からみて——図 5-10 のようなものだと**想像して**よいだろう．

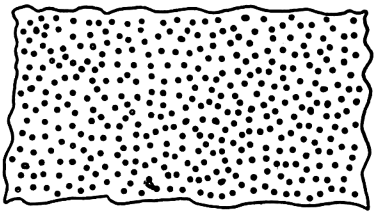


図 5-10　厚さ 1 cm の炭素ブロックをとおして原子核だけみたとした想像図

微小な粒子がとんでいって薄板をつきぬける間に，一つの原子核にあたるというチャンスは，原子核の切口の総面積をこの画の総面積でわったものである．いま考えている薄板の面積 A の中に，N 個の原子(おのおの原子核を一つもっているのはもちろんのことである)があることがわかっているとしよう．そうすると，原子核によって“ふさがれている”総面積は $N\sigma$ である．次に，板にあたる粒子の数を n_1 とし，あちら側へとおりぬけるものの数を n_2 とする．通りぬけ**ない**ものの割合は $\dfrac{n_1-n_2}{n_1}$ であり，これがふさがれている面積の割合 $\dfrac{N\sigma}{A}$ に等しくなければならない．よって

$$\pi r^2=\sigma=\frac{A}{N}\frac{n_1-n_2}{n_1}$$

という方程式*となり，これから原子核の半径が求められる．このような実験によって，原子核の半径は，10^{-15} m の単位でいって，1 ないし 6 であることがわかった．10^{-15} m という長さの単位は，エンリコ・フェルミ (1901-1958) を記念して，フェルミと名付けられている．

もっと短い距離へ進んだらどんなことになるか？　もっと短い距離は測ることができるのか？　このような問に対する解答はまだ与えられていない．原子核力は未だとけざる神秘であるが，そのような小さい距離における空間とか測定とかいうことに関する我々の考えを何か修正することによって，この問題が解決するかも知れないとも考えられている．

長さの単位として，自然界に存在するものを使う——例えば地球の半径とか，その分数——というのは，いい考えだと思われるだろう．1 m というのは，はじめはそのような単位のつもりだったのであって，地球の半径の $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\times10^{-7}$ 倍と定義された．しかし長さの単位をこのように定めるということは便利でもなく，またたいへん正確だというわけでもない．1 メートルというのは，フランスの，ある特殊な研究所に保管されている 1 本の棒にきざまれている二つの線の間の距離として定義するということが，長い間，国際的に合意されてきていた．最近になって，この定義は，役に立つほど精密でもなく，また望むほど恒久的でも普遍的でもないことがわかってきた．一つのスペクトル線

* この方程式は原子核によってふさがれている面積が全面積の小分数であるとき，すなわち $(n_1-n_2)/n_1$ が 1 よりもはるかに小さいときにのみ正しい．そうでないときには，原子核のあるものはその前方にある原子核に部分的にかくされているということに対して補正を加えなければならない．

を選んで，その波長の数(任意)をきめたものを新しい定義として採用すべきであるということが現在考慮されている．

距離や時間の測定は，観測者によって異なる結果を生ずる．同じものであるようにみえるものを測定するときでも，互いに運動している観測者によれば，距離も時間も同じにはならない．距離も時間間隔も，測定をする座標系(あるいは“基準とする枠”といってもよい)によって，その値がちがう．このことについては後にくわしく学ぶ．

自然の法則によれば，距離や時間を完全に精密に測定することはできない．前に述べたとおり，一つの物体の位置の測定における誤差は，少なくとも

$$\varDelta x = \frac{h}{\varDelta p}$$

の大きさである．ここにhは“プランクの定数”といわれる小さな量であり，$\varDelta p$はその位置を測っている物体の運動量(質量かける速度)に関する我々の知識の誤差である．位置の測定における不確定は，粒子の波動性に関連していることは，前に述べた．

空間や時間の相対性から，時間の測定にもまた誤差があり，それは

$$\varDelta t = \frac{h}{\varDelta E}$$

よりも小さくならないことがわかる．ここに$\varDelta E$は，その時間を測っている現象のエネルギーに関する我々の知識の誤差である．あることがらが**いつ**起こったかということを**より**くわしく知ろうとするならば，**なに**が起こったかということについての知識は必ずぼけてくる．そのわけは関係するエネルギーについての知識が少なくなるからである．時間の不確定も物質の波動性に関係があるのである．

第6章 確　　率

“この世界の真の理法は確率論にある”

——ジェイムス・クラーク・マクスウェル

6-1　チャンスと見込み

“チャンス”という言葉は，日常生活の中でひろく使われている．ラジオの天気予報ではこんなことをいうだろう：“明日，雨が降るチャンスは60パーセントです”．また諸君はこういうだろう：“僕が100歳まで生きるチャンスは小さい”．科学者もまたチャンスという言葉を使う．地震学者はこういう問題に関心があるだろう：“来年南カリフォルニアにこれこれの大きさの地震が起こるチャンスはどのくらいか？” 物理学者はこういう問題をもち出すだろう：“このガイガー計数管が次の10秒間に20カウントを記録するチャンスはどのくらいか？” 政治屋や政治家はこういう問題に関心をもつだろう：“次の10年間以内に核戦争が起こるチャンスはどのくらいか？” そして諸君はこの章で何かを覚えるチャンスはどのくらいかということに関心があるだろう．

チャンスというと，推量に似たことを意味する．何故我々は推量するのだろうか？ あることに対して判断を下したいのだが，情報が不完全であるとか，知識が不確実であるとかいうときに，我々は推量するのである．ことがらはいったいどうなのか，どんなことが起こりそうなのか，ということを推量したいということはしばしばある．また我々が何事かを決定しなければならないので，推量したいということもしばしばある．例えば：明日レインコートをもって出ようか？ 建物を新たに設計するのに，どんな地震動について対策を考えればよいか？ 自分のうちにも死の灰よけを作ろうか？ 国際会議において自分の態度をかえようか？ 今日学校に出ようか？

我々の知識は限られているのに，あることがらについて，**できるだけ**多くのことをいいたいから推量をするということもある．たしかに，一般化ということは，元来その性質からいって，一つの推量である．物理学の理論というのもある推量に他ならない．推量にはいい推量もあるし，悪い推量もある．確率論というのは，よりよい推量をするための体系である．ある状態があって，それは非常に変動はするけれども，平均的には一定の性状をもっているというような場合に，確率ということで考えると，話を量的に進めることができるのである．

貨幣を投げることを考えよう．投げ方にも——貨幣にも——“ごまかしがない”ならば，1回投げてみたときに表が出るか裏が出るか，

どちらの結果を期待すべきかということを知る方法はない．それでも何遍も何遍もやれば，表が出る回数と裏が出る回数とはだいたい等しいはずだという気がする．このとき我々はこういう：“貨幣を投げて表の出る確率は 0.5 である”．

我々が確率ということをいうのは，これからやろうともくろんでいる観測に対してだけである．“ある一つの観測である特定の結果が起こる“確率”というのは，観測を何遍も何遍も繰りかえしたときに，その特定の結果が生ずる回数が全回数の何分の 1 であることがいちばん起こりやすいかということの見積りである.” ある観測——貨幣をあらたに投げてその表面をみるというような——を N 回繰りかえしたとして，例えば表が出るというような特定の結果 A が生ずる回数がそのうち N_A であることがいちばん起こりやすいと**見積**もるならば，A が観測される確率 $P(A)$ とは

$$P(A) = \frac{N_A}{N} \tag{6.1}$$

のことである．

この定義については，いくつかの注意を加えておく必要がある．まず第一に，確率という言葉を使っていいのは，問題とする事象が，**くりかえしのきく**観測の結果として生ずるというときのみに限るということである．“あの家に幽霊のいる確率はいくらだろうか？” という問を出しても，それに意味があるかどうかははっきりしない．

こういうと諸君は，この世の中に**全く同じような**繰りかえしがきくなどというようなことはありえないといって抗議するだろう．それは正しい．別の観測というものは，必然的に，少なくとも，別の時に，あるいは別の場所で行なわれるのである．せいぜいいえることは，“繰りかえしのきく” 観測というのは，いま我々が目的としているところでは，**同等**であるとみなされるものでなければならぬということである．おのおのの観測は，少なくとも同等にしつらえられた状況の下で行なわれねばならず，また特に同じ無知の程度のところからはじめなければならない．（トランプをしていて相手の札をこっそり見たとすれば，自分が勝つチャンスの見積りは，見なかったときとは変わってくる！）

ここで強調すべきことは，方程式(6.1)の N や N_A は，実際の観測にもとづいた数をあらわすつもりでは**ない**ということである．N_A というのは，観測を**仮想的に** N 回くりかえしたとき，起こるで**あろう**回数の最善の**見積り**なのである．だから確率というものは我々の知識や見積りをする能力に依存するのである．要するに常識によるのである！さいわいなことに，多くのことがらについて常識はある程度一致しているので，いろいろの人の見積りもまた同じになる．しかし，確率は“絶対的” の数であるとは限らない．確率というものは我々の無知の程度に依存するのだから，我々の知識が変われば確率も変わるのである．

確率の定義にまた “主観的” の面があることに諸君は気付いたろう

と思う．N_A は“いちばん起こりそうな数の見積り”であるといった．きちんと N_A という数が観測されることが期待されるという意味ではなく，N_A の近くの数が期待され，N_A という数はそれに近いどの他の数よりも起こりやすいという意味である．貨幣を例えば30回投げるとすると，表が出る回数は，おそらくきちんと15回ということはなく，むしろ15に近い数，例えば12, 13, 14, 15, 16, 17等だというに過ぎない．しかしそのどれかを選ばなければ**ならない**というのであるならば，表が15回というのが，他のどの数よりも**起こりやすい**とするのである．これを $P(\text{表})=0.5$ と書く．

15という数をえらんで，他のどの数よりも起こりやすいとした理由は何か？ 我々は頭の中で次のように考えたに相違ない：全体で N 回投げたとき，表が $N_{\text{表}}$ 回出るということがいちばん起こり易いというならば，裏の出る数のうちでいちばん起こりやすい $N_{\text{裏}}$ は，$(N-N_{\text{表}})$ である．(ここで仮定するのは，投げれば表**か**裏**か**が出て，“他の”結果はないということである！) 貨幣が“ちゃんと”出来ていれば，表と裏のどちらが出やすいということはない．貨幣に(投げ方にも)ごまかしがあると考える理由がないならば，表と裏との起こりやすさは同じであるとしなければならない．そこで $N_{\text{裏}}=N_{\text{表}}$ とおく．これから $N_{\text{裏}}=N_{\text{表}}=\dfrac{N}{2}$，あるいは $P(\text{表})=P(\text{裏})=0.5$ となる．

この論法をおしひろめれば，一つの観測において，m 個の相異なる，しかし“同等な”(すなわち同じように起こりやすい)結果が起こりうるという場合にもあてはめることができる．一つの観測が m 個の相異なる結果を生じ，そのどの一つをとってみても他のどれとも同じように起こりやすいというならば，A という特定の結果の生ずる確率は $P(A)=\dfrac{1}{m}$ である．

ここにちがった色のタマが七つあって，それが箱に入っていて外からは見えないとする．そのタマを勝手に(すなわちタマを見ないで)一つとり出したとき，ある特定の色のタマをとり出す確率は $\dfrac{1}{7}$ である．トランプ52枚をよくきってその1枚を“めくらびき”したとき，ダイヤの10の出る確率は $\dfrac{1}{52}$ である．サイを二つ投げて両方とも1が出る確率は $\dfrac{1}{36}$ である．

第5章において，原子核の大きさを，そのみかけ上の面積，すなわち断面積によってあらわした．これは実は確率の問題だったのである．物質の薄い板に高エネルギーの粒子をうちこむとき，つきぬけるチャンスもあり，また原子核にあたるチャンスもある．(原子核は非常に小さくて目には見えないから，それにねらいをつけることはできない．“めくらうち”をしなければならないのだ．) この板のなかに原子が n 個あり，おのおのの原子の核の断面積が σ であるとすると，原子核で“影になる”総面積は $n\sigma$ である．勝手なうちこみを多数 N 回こころみれば，どれかの核にあたるチャンス N_c が N に対する比は，影の面積が板の総面積に対する比に等しいと考えられる：

$$\frac{N_c}{N} = \frac{n\sigma}{A}. \tag{6.2}$$

だから，どれか一つの粒子が板をとおりぬける間に衝突という目にあう**確率**は

$$P_c = \frac{n}{A}\sigma \tag{6.3}$$

であるといえる．ここに $\frac{n}{A}$ は板の単位面積にある原子の数である．

6-2　ゆらぎ

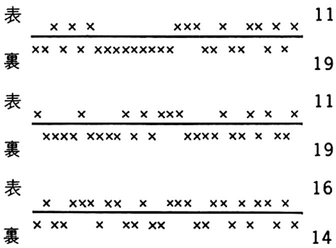


図6-1　オカネをそれぞれ30回投げたとき観測された表と裏の出方

こんどは確率の考えを使って次の問題をややくわしく取り扱ってみよう：“貨幣を N 回投げたら表は実際何回でると考えたらよいか？”しかしこの問題に答える前に，そのような“実験”で実際にどんなことが起こるかをまず調べることにしよう．図6-1は，$N=30$ としてこのような実験を3回やってみた“試行”の結果である．“表”と“裏”の順は，じっさいに起こったとおりに示してある．3回の試行のなかで，表が15出たということは1回もない．第1回目は11；第2回目も11；第3回目は16であった．いちばん起こりやすいのは表15であると考えたのが間違っていたのだろうか．そこで同じことをあと97回やってみて全体で100回にしてみた．おのおのでは30回投げるので

表6-1　貨幣を30回投げたとき表の出た数

11	16	17	15	17	16	19	18	15	13
11	17	17	12	20	23	11	16	17	14
16	12	15	10	18	17	13	15	14	15
16	12	11	22	12	20	12	15	16	12
16	10	15	13	14	16	15	16	13	18
14	14	13	16	15	19	21	14	12	15
16	11	16	14	17	14	11	16	17	16
19	15	14	12	18	15	14	21	11	16
17	17	12	13	14	17	9	13	16	14
15	12	17	14	19	12	18	17	19	17

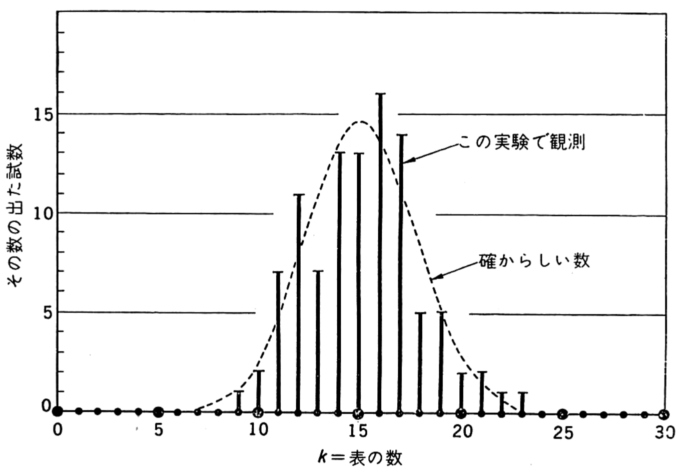


図6-2　貨幣を30回投げるという試行を100回やった結果のまとめ　縦の線は表が K だけ出た試行の数を示す　点線は表が K だけ出るという期待回数を確率計算によって求めたものである

ある．実験の結果は表 6-1*のとおりである．

表 6-1 の数をみると，たいていは 12 と 18 との間で 15 の“近く”である．結果の**分布**をグラフにプロットすると，くわしいことがよくわかるようになる．表が k 個出たという試行の数を数えて，この数をおのおのの k に対してプロットする．表が 15 出たことは 13 回ある．14 出たのも 13 回ある．16 出たのも 17 出たのもこの 13 回よりは**多い**．それならば表がでやすいという傾向があると結論してよいだろうか？我々の“せいいっぱいの見積り”があまりよくなかったのだろうか．30 回投げたとき“いちばん起こりやすい”のは実は表 16 であると結論すべきなのだろうか？ しかし待ち給え！ これらの試行全部をあわせてみれば，3000 回投げたことになる．そして表の出た総数は 1492 である．表の出た割合は 0.497 であって，$\frac{1}{2}$ に非常に近く，ほんの少し小さいだけである．表の出る確率が 0.5 よりも大きいと考えるべきでは**ない**！ ある**一つ**の試行で表が 16 出た回数がいちばん多かったというのは，**ゆらぎ**なのである．いちばん起こりやすいのは，やはり 15 であると考える．

次の問題を出そう：“30 回投げて表が 15 出る確率，あるいは——16 でも，どんな他の数でもよい——はいくらか？” 1 回投げたとき表 1 が出る確率は 0.5 であり，出ない確率は 0.5 である．2 回投げると，4 通りの結果が起こる：表表，表裏，裏表，裏裏である．この 4 通りも同じように起こりやすいのだから，我々は，(a) 表 2 の確率は $\frac{1}{4}$ である，(b) 表 1 の確率は $\frac{2}{4}$ である，(c) 表 0 の確率は $\frac{1}{4}$ である，と結論する．表 1 というのには**二つ**の場合があるが，表 0 とか表 2 という場合は一つしかない．

次に 3 回投げることを考える．第 3 回目に，表が出ることも裏が出ることも同じように起こりやすい．表 3 という場合は 1 通りしかない：はじめの 2 回が表 2 で第 3 回目も表でなければいけない．しかし，表 2 というのは 3 通りある．はじめの 2 回で表が二つ(1 通り)出ていたのならこんどは裏でよく，表が一つ(2 通り)だけ出ていたのなら，こんどは表である．だから表 3，表 2，表 1，表 0 に対して，同じように起こりやすい回数は 1, 3, 3, 1 で，起こり方の総数は 8 である．確率は $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$ である．

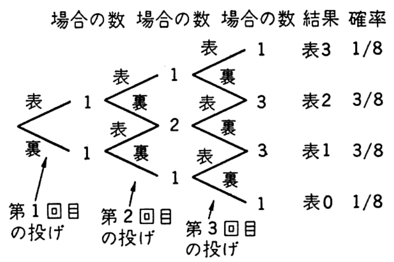


図 6-3 貨幣を 3 回投げたとき表が 0, 1, 2 あるいは 3 だけ出る場合の数を示す図

上に述べたことは，図 6-3 のような図にまとめることができる．試行の回数をもっとふやしたときには，この図をどのように延長すればよいかは明らかである．図 6-4 は，試行 6 回に対する図である．図の 1 点にいくのにいく“通り”のやり方があるかという数は，出発点からいくつのちがった“途”(表と裏のつづき)があるかという数と同じである．上下軸は表の出る全数である．このような図にあらわれる一連の数は**パスカルの三角**として知られている．また**二項係数**ということもある．それはこの数が $(a+b)^n$ を展開したときにも出てくるから

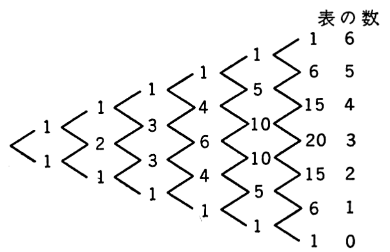


図 6-4 貨幣を 6 回投げたとき図 6-3 と同様の図

* はじめ 3 回やったあとでは，実験はじっさいには 1 セント銅貨 30 枚を箱に入れてはげしくふり，表の出た数を数えたのである．

である．投げる回数を n，表の出る回数を k としたとき，この図の数は $\binom{n}{k}$ という記号であらわすのがふつうである．また二項係数は次の式からも計算することができる．

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \tag{6.4}$$

ここに，$n!$ は"n の階乗"といわれるものであって，

$$n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$$

という積をあらわす．

これで用意ができたので，方程式(6.1)の定義を使って n 回投げて k だけ表の出る確率 $P(k, n)$ を計算することができる．起こりうる場合の総数は 2^n であり（おのおのの投げに対して結果が二つずつあるから），表が k だけ出る出方は $\binom{n}{k}$ 通りあって，起こりやすさはみな同じであるから，

$$P(k, n)=\frac{\binom{n}{k}}{2^n} \tag{6.5}$$

が得られる．

$P(k, n)$ は，すべての試行のうちで，表が k だけ出ると期待される割合であるから，100 回で表が k だけ出る回数は $100\cdot P(k, n)$ であると期待される．図 6-2 の破線の曲線は $100\cdot P(k, 30)$ から計算した点を結んだものである．これからわかるように表が 15 出るのは，14 回あるいは 15 回であると期待される．実際には 13 回であった．表が 16 出るのは，13 回あるいは 14 回であると期待されるが，実際は 16 回であった．こういうゆらぎも"世のならい"である．

いま用いた方法は，一つの観測で起こりうる結果がたった二つしかないという，いちばん一般的な場合に応用することができる．その二つの結果を W(勝)と L(負)であらわす．W という結果が出る確率を p とすれば，L という結果の出る確率は当然 $(1-p)$ である．n 回のこころみで W が k 回出る確率 $P(k, n)$ は

$$P(k, n)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \tag{6.6}$$

である．この確率関数は**ベルヌーイ**の確率とも，**二項**確率ともいわれている．

6-3　迷い歩き

ここにまた確率の考えを必要とする面白い問題がある．それは"迷い歩き"の問題である．いちばん簡単にいうならば，こういう"ゲーム"である．これを"やる人"は $x=0$ の点から出発して，前($+x$ の方)か後($-x$ の方)かへ 1 歩ずつ進むという規則である．そのどちらかということの選択は，例えば貨幣を投げるというようなことによって，無作為にきめられる．この運動の結果はどうなるであろうか？これを一般的に考えれば，気体の中における原子（または他の粒子）の運動――ブラウン運動――に関係があるし，また測定における誤差の

組合せにも関係がある．またこの迷い歩きの問題は，すでに論じた貨幣投げの問題とも密接な関係をもっている．

まず，迷い歩きについて二,三の点を考えてみよう．歩行者の進み方は，N 歩あるいたとき出発点から測って結局どれだけの距離にいるかという D_N によってあらわされる．図 6-5 は，迷い歩きの例を三つ示したものである．(無作為の選択をするためには，図 6-1 に示した貨幣投げの結果を使った.)

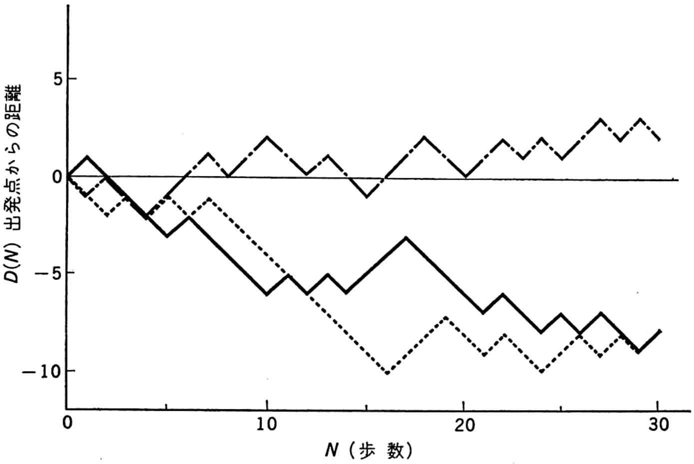


図 6-5　迷い歩きの進み方
横座標 N は全歩数である　縦座標 $D(N)$ は結局出発点からどこにいるかという距離である

このような運動についてどんなことがいえるか？ 第一の問題はこうである："彼は平均として原点から測ってどの距離にいるか？" 前にいくことも後にいくことも全く同等に起こりやすいのだから，彼の進みは平均としてゼロであると期待せねばならぬ．しかし N が増すにつれて，出発点から遠くにさまよい来ているという方がよりもっともらしく思われる．だから，平均として歩いた距離を絶対値であらわしたらいくらか，すなわち $|D|$ の平均はどのくらいかということが問題になる．しかし，他の測り方をして，距離の自乗で進みを測った方がむしろ便利である：運動が正であっても負であっても D^2 は正であるから，このような迷い歩きに対しては，この測り方の方が合理的である．

$D_N{}^2$ の期待値はまさに歩数 N に等しいことを証明することができるのである．"期待値" というのは，N 歩あるくということを**何遍も何遍もくりかえした**ときに，**期待される**平均値の確からしい値(我々のせいいっぱいの見積り)である．このような期待値を $\langle D_N{}^2\rangle$ によってあらわして，"平均自乗距離" という．1 歩だけあるけば，D^2 は必ず $+1$ であるから，$\langle D_1{}^2\rangle=1$ である．(距離はすべて 1 歩を単位として測る．いちいち単位を書くことは省略する.)

$N>1$ の場合 $D_N{}^2$ の期待値は，D_{N-1} から求められる．$(N-1)$ 歩あるいたとき D_{N-1} だったとすれば，N 歩あるいたときは $D_N=D_{N-1}+1$

か，$D_N=D_{N-1}-1$ かである．自乗すると

$$D_N^2=\begin{cases}D_{N-1}^2+2D_{N-1}+1,\\ \quad\text{又　は}\\ D_{N-1}^2-2D_{N-1}+1\end{cases} \tag{6.7}$$

である．N 歩あるくことを独立に何遍もくりかえせば，(6.7)のそれぞれの値は半分ずつおこると考えられるから，平均の期待値は上の二つの値の平均である．したがって D_N^2 の期待値は，D_{N-1}^2+1 である．**一般に** D_{N-1}^2 の "期待値" は $\langle D_{N-1}^2\rangle$ である(定義によって！)．したがって

$$\langle D_N^2\rangle=\langle D_{N-1}^2\rangle+1 \tag{6.8}$$

である．すでに示したように $\langle D_1^2\rangle=1$ である．したがって

$$D_N^2=N \tag{6.9}$$

である．たいへん簡単な結果ではないか！

上に述べたのは距離の自乗であるが，迷い歩きで "原点からはなれた距離" をあらわすのに，距離そのもののような数の方がいいというならば，"ルート・ミーン・スクェアー距離 rms" D_{rms} を使う：

$$D_{\text{rms}}=\sqrt{\langle D^2\rangle}=\sqrt{N}. \tag{6.10}$$

前にもいったとおり，この迷い歩きの問題は，この章のはじめに述べた貨幣投げの問題と数学的によく似ているところがある．迷い歩きのおのおのの1歩のむきが，貨幣投げで表が出るか裏が出るかということに対応していると考えるならば，D は $(N_{表}-N_{裏})$，すなわち表の数と裏の数との差にあたる．全歩数(全投数)は $N_{表}+N_{裏}=N$ であるから，$D=2N_{表}-N$ となる．$N_{表}$ の分布として期待されるもの(k と名付けた)の式は前に求めて，方程式(6.5)の結果を得ている．N は一つの定数であるから，これに対応する D の分布も得られる．(表が $\frac{N}{2}$ よりもたくさん出ればそれだけ裏が "足りない" のだから，$N_{表}$ と D との間には2という係数がつくのである.) 図6-2のグラフは，迷い歩き30歩($k=15$ は $D=0$；$k=16$ は $D=2$；… にあたる)のときに対する距離の分布を示している．

$N_{表}$ がその期待値 $\frac{N}{2}$ からはずれているのは

$$N_{表}-\frac{N}{2}=\frac{D}{2} \tag{6.11}$$

である．またはずれの rms は

$$\left(N_{表}-\frac{N}{2}\right)_{\text{rms}}=\frac{1}{2}\sqrt{N} \tag{6.12}$$

である．D_{rms} についての結果によれば，30歩の場合の "代表的" 距離は $\sqrt{30}=5.5$ であり，代表的 k は15のところからおよそ $\frac{5.5}{2}=2.8$ だけのところである．図6-2の曲線の "幅" は中心からはかっておよそ3であって，上の結果とあっている．

ここで，今までふれないでおいた問題を考える用意ができたことに

なる．一つの貨幣が“ちゃんと”できているか，それとも“くるっているか”はどうすればわかるかという問題である．ここではある程度までそれに答えることができる．貨幣がちゃんとできているならば，表の出る割合は0.5であって

$$\frac{\langle N_{\text{表}}\rangle}{N} = 0.5 \qquad (6.13)$$

であると考えられる．また実際の$N_{\text{表}}$は，$\frac{N}{2}$からおよそ$\frac{\sqrt{N}}{2}$だけはずれ，**割合**としては

$$\frac{1}{N}\frac{\sqrt{N}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{N}}$$

だけはずれると考えられる．Nが大きければ大きいほど$\frac{N_{\text{表}}}{N}$という分数は$\frac{1}{2}$に近くなると**考えられる**．

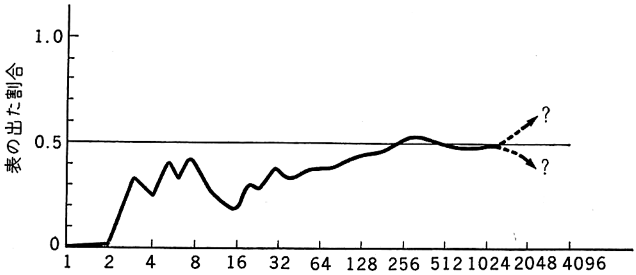


図6–6　貨幣をN回投げたとき表の出た割合

図6–6は，この章のはじめに述べた貨幣投げについて，分数$\frac{N_{\text{表}}}{N}$をプロットしたものである．Nが大きくなると，表の出る割合が0.5に近付く傾向があらわれている．困ったことには，一つの試行，あるいはいくつかの試行の組合せに対して，実際のはずれが，**期待される**はずれの**近く**にプラスマイナス一様に起こるという**保証**はないのである．大きなゆらぎ——表が長く出つづけるとか，裏が長く出つづけるとか——が起こるチャンスはいつも有限である．我々がいえるせいいっぱいのことは，はずれが期待値$\frac{1}{2\sqrt{N}}$の近く（2倍とか3倍とか以内）である**ならば**，貨幣がちゃんとしていることを疑う理由はないということである．もしもそれがずっと大きいならば，貨幣にくるいがある（あるいは投げ手がずるい！）と疑っても然るべきであるが，それをそうだと立証することはできない．

もう一つこれまでふれなかった問題は，“貨幣”とか，何かそれと同じような“偶然的”なもの（例えば地面におとすと必ず上下どちらかの面が出る石）などで，表と裏との確率がちがうはずであると考える理由のあるものはどう取り扱ったらよいかということである．我々の定義によれば，$P(\text{表}) = \frac{\langle N_{\text{表}}\rangle}{N}$である．$N_{\text{表}}$として何を**期待**すべきかということはどうしたらわかるであろうか．何遍も投げて表の数をみるのがいちばんいいということである場合もあろう．他にうまい方法がないので，$\langle N_{\text{表}}\rangle = N_{\text{表}}$(観測)とおくより仕方がない．（他に何か考えられるだろうか？）しかし，ここで承知しておかなければならないの

は，このような場合に，別の実験をすると，あるいは別の人がやると，P(表)はちがう答になりうるということである．しかしそのようないろいろな答も $\frac{1}{2\sqrt{N}}$ の偏差で一致すべきであると**期待**される(もしも P(表)が 0.5 に近いならば)．実験物理学者は“実験的にきめた”確率には“誤差”があるといい，

$$P(\text{表})=\frac{N_{\text{表}}}{N}\pm\frac{1}{2\sqrt{N}} \tag{6.14}$$

と書くのがふつうである．このような式を書いたときその意味は“真の”あるいは“正しい”確率というものがあって，我々の知識が完全ならばそれは計算によって求めることが**でき**るのであるが，実際の観測にはゆらぎがあって，そのために“誤差”が生じたということである．しかしこのような考え方を論理的にちゃんとしたものにする方法はない．むしろ，確率という概念は，ある意味で主観的なものであって，いつも我々の不完全な知識にもとづくものであり，たくさんの情報が得られるにつれてその量的の見積りも変わるものだと承知しておく方がよいだろう．

6-4　ある確率分布

また迷い歩きの問題に立ち戻って，それの変形を考えよう．各歩についてそのむき(＋か－)を勝手に選択するだけでなく，その歩幅も勝手に変わるとする．ただし**平均をとれば**，歩幅は1歩であるとする．気体における分子の熱運動のようなものはむしろこういうことに近いのである．一つの歩幅を S とすれば，S はあらゆる値をとるのであるが，たいていは1に“近い”．特に $\langle S^2\rangle=1$ すなわち $S_{\text{rms}}=1$ であるとしよう．$\langle D^2\rangle$ の求め方は前と同様であるが，ただ方程式(6.8)は

$$\langle D_N{}^2\rangle=\langle D_{N-1}{}^2\rangle+\langle S^2\rangle=\langle D_{N-1}{}^2\rangle+1 \tag{6.15}$$

となる．前と同じように

$$\langle D_N{}^2\rangle=N \tag{6.16}$$

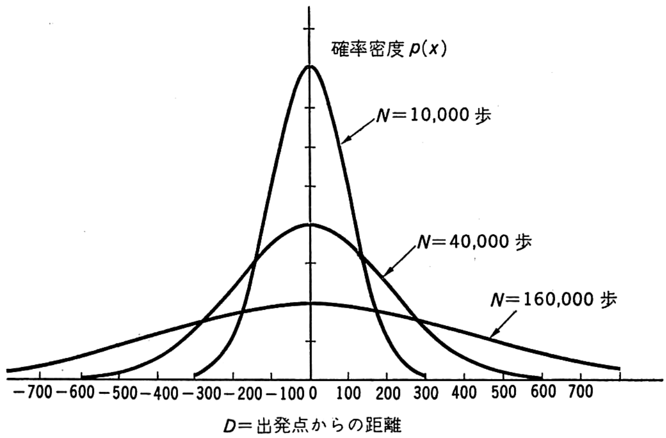


図 6-7　N 歩の迷い歩きで出発点から D の距離にいる確率密度(D は歩幅の rms を単位として測る)

である．

距離Dの分布はどんなものになるだろうか？ 例えば，30歩あるいたとき$D=0$である確率はいくらであろうか？ 答はゼロである！ Dが**任意の特定の**値をとる確率はゼロである．何故ならば，後進の歩み(歩幅もいろいろである)と前進の歩みとの和がちょうど等しいというチャンスは全くないからである．図6-2のようなグラフをプロットすることはできない．

しかし，Dがちょうど0,1,2に等しい確率は何かという代りに，Dが0,1,2の**近く**である確率は何かというならば，図6-2に似たあらわし方をすることができる．DがxのところのΔxの範囲のなか(xと$x+\Delta x$との間)にある確率を$P(x, \Delta x)$としよう．Δxが小さければ，Dがこの範囲の中に入るチャンスは，範囲のはばΔxに比例すると考えられる．したがって

$$P(x, \Delta x) = p(x)\Delta x \tag{6.17}$$

と書くことができる．関数$p(x)$を**確率密度**という．

$p(x)$の形は，歩数Nと，個々の歩幅の分布如何によってきまる．ここでその証明をすることはできないが，Nが大きければ，個々の歩幅の分布があまり妙なものでない限り，$P(x)$はみな**同じ**で，Nだけに関係する．図6-7には，3種類のNの値に対しての$p(x)$がプロットしてある．これらの曲線の“半幅”($x=0$からの代表的ちらばり)は$\sqrt{N}$になっているが，これは，そうあって然るべきだといったとおりになっている．

また，ゼロの近所における$p(x)$の値は，$\sqrt{N}$に逆比例している．こうなるのは，これらの曲線はみな同じ形であって，曲線よりも下にある面積がみな等しくなければならないからである．$p(x)\Delta x$は，Δxが小さいときに，Δxの範囲内にDがある確率であるから，それを使えば，x_1からx_2までという任意の範囲内のどこかにDがあるチャンスはいくらかということを求めることができる．それには，この範囲を小さな増分Δxにたくさんにわけ，それぞれの増分に対して$p(x)\Delta x$を求めて加えあわせる．Dがx_1とx_2との間のどこかにくる確率を$P(x_1<D<x_2)$と書けば，これは図6-8で影をほどこした面積に等しい．増分Δxを小さくとればとるほど，我々の結果は正確になる．よって

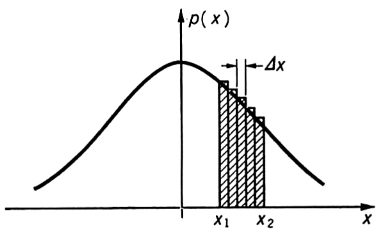


図6-8　迷い歩きで距離Dがx_1とx_2との間にある確率はx_1からx_2までの$P(x)$曲線の下にある面積である

$$P(x_1<D<x_2) = \sum p(x)\Delta x = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx \tag{6.18}$$

となる．曲線全体の下にある面積は，Dがどこか($x=-\infty$から$x=+\infty$までの間のある値をとる)にくる確率で，それはたしかに1である．よって

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1 \tag{6.19}$$

でなければならない．図6-7の曲線は，$\sqrt{N}$に比例して幅がひろくなっているから，全面積がいつも1に等しくなっているためには，高さ

は $\frac{1}{\sqrt{N}}$ に比例して小さくなっていなければならないのである．

上に述べた確率密度関数は，いちばんよく出てくる．そして**正規**確率密度とか**ガウス**確率密度とかいわれている．その数学的の形は

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\sigma^2} \tag{6.20}$$

である．ここに σ は**標準偏差**といわれるものであって，我々の場合には $\sigma=\sqrt{N}$ によって与えられる．またもしも歩幅の rms が1でないならば，$\sigma=\sqrt{N}S_{\mathrm{rms}}$ によって与えられる．

前にいったように，気体の中にある一つの分子，あるいは一つの粒子の運動は，迷い歩きに似ている．ある有機化合物が入っているびんのふたをとって，その蒸気を少し空気中に逃がしてやったとする．空気が流れていて循環しているとすると，この蒸気はそれによって運ばれる．しかし**完全に静止している空気**の中でさえ，蒸気は室中いっぱいにひろがる——拡散する．そしてその色や匂いでこのことがわかる．この有機蒸気の個々の分子が，静止している空気の中へひろがっていくのは，他の分子がそれに衝突するために起こされる分子運動の結果である．もしも平均の“歩幅”と，1秒間の歩数とがわかっていれば，一つ，あるいはいくつかの分子が，ある任意の時間だけたった後に，出発点からある距離のところにいる確率を求めることができる．時間がたつにつれて，歩数がふえるから，この気体は図 6-7 の次々の曲線のようにひろがるのである．歩幅や歩数と，気体の温度や圧力との間にどんな関係があるかは，後に求める．

前にも述べたが，気体の圧力というものは，分子が容器の壁にあたってはずむことによって生ずるものである．後になって，もっと量的な説明をするが，そのときには，分子があたってはずむときの速さが必要になる．分子の撃力はその速さによってちがうからである．しかし分子の速さという**一つのきまった**ものがあるわけではない．それは確率的に考える必要がある．一つの分子はどんな速さをももちうるのである．しかしある速さの方が他の速さよりも起こりやすいということはある．そこで我々は，ある1コの特定の分子の速さが v と $v+\Delta v$ との間にある確率は $p(v)\Delta v$ であるというふうにいいあらわす．ここに確率密度 $p(v)$ は速さ v の関数として与えられるわけである．マクスウェルは常識と確率の考えとを使って，$p(v)$ の数学的表現を求めたのであるが，その求め方については後に述べる．関数 $p(v)$ の形*は，図 6-9 に示したとおりである．速度はどんな値をもとりうるが，いちばん確からしい値，すなわち期待値 $\langle v\rangle$ の近くのものがいちばん起こりやすい．

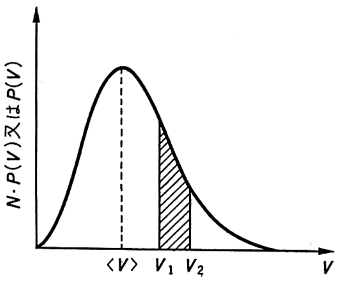


図 6-9　気体内の分子の速度の分布

図 6-9 の曲線について，別の考え方をすることもしばしばある．ある一つの標準容器(たとえば容積 1 l)を考えると，その中にある分子の数 N は非常に大きい($N\approx10^{22}$)．$p(v)\Delta v$ は，一つの分子の速度が

* マクスウェルの表現は $p(v)=Cv^2e^{-av^2}$ である．ここに a は温度に関係した定数であり，C は全確率が1になるように選んである．

Δv の範囲に入る確率であるから，速度がこの Δv の範囲に入る分子数の期待値 $\langle \Delta N \rangle$ は，定義にしたがって

$$\langle \Delta N \rangle = Np(v)\Delta v \tag{6.21}$$

によって求められる．$Np(v)$ を“速度の分布”という．二つの速度 v_1 と v_2 との間で曲線よりも下にある部分の面積，例えば図 6-9 で影をほどこしてある部分の面積は，($Np(v)$ の曲線について) 速度が v_1 と v_2 との間にある分子の期待数である．気体については，我々は多数の分子を取り扱うのが普通であるから，この期待数からのはずれは小さい $\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\text{ の程度}\right)$ と考えられ，“期待”数といわないで，その代りに“速度が v_1 と v_2 との間にある分子の数は，曲線の下にある面積である”という．しかし，このようにいうのは，いつも**確からしい**数という意味であるということを忘れてはならない．

6-5　不確定性原理

確率の考えは，およそ 10^{22} 個もある気体分子の行動を記述するのに，たしかに有用である．一つ一つの分子の位置と速度とを書き下ろそうとしても，そのことは，とてもできない相談である．このような問題に，はじめて確率の考えが使われたときには，それは，非常にこみ入った状態を取り扱う上の一つの**便宜**であると考えられた．しかし今日我々は，確率の考えは，原子的現象を記述するのに，**本質的**なものであると信じているのである．量子力学，すなわち粒子の数学的理論によれば，位置と速度とを指定するのに，必ずなんらかの不確定性が伴うのである．我々がせいぜいいえるのは，ある一つの粒子が座標 x の近くにいるのはこれこれの確率であるということだけにしか過ぎない．

確率密度を $p_1(x)$ とすれば，$p_1(x)\Delta x$ はこの粒子が x と $x+\Delta x$ との間にある確率である．この粒子が，例えば x_0 の近くにある程度集中しているというならば，関数 $p_1(x)$ は図 6-10(a) のようなグラフになる．同じように，この粒子の速度を指定するのに，確率密度 $p_2(v)$ を使って，その速度が v と $v+\Delta v$ との間にある確率は $p_2(v)\Delta v$ であるという．

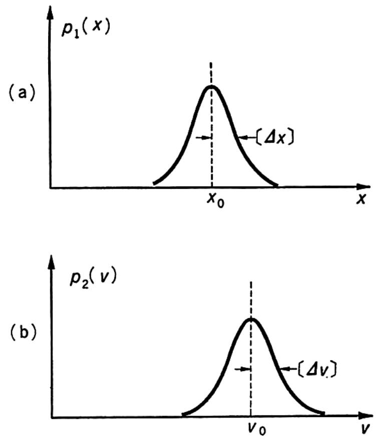


図 6-10　一つの粒子の位置と速度の測定に対する確率密度

二つの関数 $p_1(x)$ と $p_2(v)$ とは独立に選ぶことはできない，特に同時に両方を思うように狭くすることはできないというのが，量子力学の基本的結果の一つである．$p_1(x)$ 曲線の代表的な幅を $[\Delta x]$ とし，$p_2(v)$ 曲線の代表的な幅を $[\Delta v]$ (図に示したとおり) とすると，二つの幅の積の大きさは，$\dfrac{h}{m}$ よりも小さくはならないというのが自然の要請である．ここに m はこの粒子の質量であり，h はプランクの定数といわれる基本物理定数である．この基本的関係は

$$[\Delta x]\cdot[\Delta v] \geqq \frac{h}{m} \tag{6.22}$$

と書くことができる．この方程式が，すなわち前に述べた**ハイゼンベルクの不確定性原理**のいうところである．

方程式 (6.22) の右辺は定数であるから，この方程式のいうところはこういう意味である．ある一つの粒子をある一つの位置にしいて“固

定”すると，その結果大きい速度をもつということになる．あるいは，粒子をゆっくり動かさせるか，きまった速度にしてやると，粒子はひろがってしまって，それがどこにあるのかよくわからなくなる．粒子のふるまいは実に奇妙なものである！

不確定性原理というのは，自然を記述しようとするときに，必然的に出てくる本来のぼやけを述べたものである．自然を最も精確に記述するのも，**確率**の考えによらなければ**ならない**というのである．自然をこのように記述することを好まない人もいる．その人達は，一つの粒子にどんなことが起こっているかがほんとにわかりさえすれば，その速さも位置も両方とも同時に知ることができるだろうと思っている．量子力学が発展しはじめたころ，アインシュタインもこの問題に大いに困惑した．アインシュタインは頭をふって，こういうのが常であった：“神は，電子の動き方をきめるときに，サイを投げはしない！” 彼は永い間この問題に頭を悩まし，これが自然を記述する方法の最善のものであるということと，遂に協調しなかったようである．他にもまだ一，二の物理学者がいて，この問題を考え，自然界を記述するにはまだ他の方法がありうるのであって，いろいろのものごとが不確定だということは，すべて取り除いてしまうことができると直観的に信じている．しかしこのことに成功した人は，まだ１人もいない．

一つの粒子の位置を指定するのに，必ず不確定性が伴うということは，原子の構造を記述しようとするときに，極めて重要になる．水素原子は，陽子一つが核で，そのそとに電子一つがあるが，この電子の位置の不確定さは，この原子自身くらいの大きさである！ だからこの電子がある“軌道”にそって核のまわりをまわっているなどといっても，それはあまり適切ではない．我々がせいぜいいえるのは，陽子から距離 r のところにある体積 ΔV の中に，その電子がいるチャンスは $p(r)\Delta V$ だということである．確率密度 $p(r)$ は，量子力学によって与えられる．通常の状態にある水素原子では $p(r)=Ae^{-r^2/a^2}$ であって，これは図6-8のように，鐘をふせたような形をしている．a という数は，$p(r)$ の値が急に小さくなるところを示す“代表的”半径である．a よりもずっと大きい距離のところに電子がいる確率は小さいから，

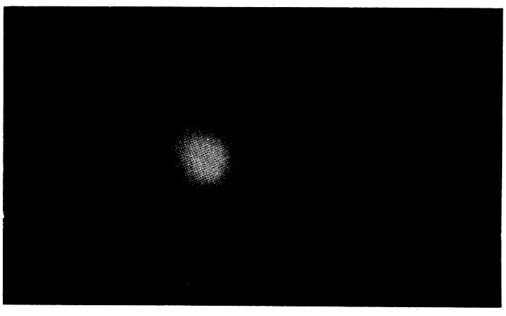


図 6-11　水素原子の一模式図
雲のこさ(しろさ)はそこに電子が観測される確率密度をあらわす

a を“この原子の半径”と考えて，それはおよそ 10^{-10} m だといってもよかろう．

いま“雲”を想像して，そのこさが電子がいる確率密度に比例しているとすれば，水素原子の姿を頭に描くことができよう．そのような雲の例は図 6-11 に示してある．このように，一つの水素原子をあらわす最善の“画”は，一つの原子核が“電子の雲”(実は“確率の雲”の意味だが)にとりまかれているというものである．電子はそのどこかにいるのであるが，我々はそれがある特定の場所にいるチャンスしか知ることができない．

我々は自然についてできるだけ多くのことを知ろうと努力しているのだが，現代物理学によれば，ある種のことがらは確定的に“知る”ことができない．我々の知識で，これからもずっと不確定であるにちがいないものがたくさんある．我々が知ることができるのは，**たかだか**，確率ということを通じてである．

第7章
万有引力の理論

7-1 惑星の運動

人類がその知恵によって帰納したことがらはたくさんあるが，この章で取り扱うのはその中で最も雄大なものの一つである．人類の知恵というのは実に大したものであるが，我々はときには立ち止まって，引力の法則のようにエレガントで単純な原理に，自然がかくも完全に，かくも普遍的に従うということを，畏敬の目をもってみなければならない．引力の法則とは何か？ それは，宇宙にあるあらゆるものは他のあらゆるものに引力を及ぼしているというのであって，二つのものの間の引力の大きさは，おのおのの質量に比例し，その距離の自乗に反比例するというのである．数学的にいえば，このことは次の方程式によってあらわされる：

$$F = G\frac{mm'}{r^2}.$$

ある一つの物体に力がはたらくと，それに応じて，質量に反比例した加速度が，力のむきに生ずる．このことと，上のこととをいっしょにすれば，実力のある数学者にとってはもうそれだけで充分で，これら二つの原理からでてくるあらゆる結果を導き出すことができる．しかし，諸君にはまだそれだけの実力はないだろうから，これからどんなことが出てくるかをくわしくしらべることにする．この二つの原理を述べただけで諸君をほうり出してしまうようなことはしない．まず引力の法則の発見の歴史を簡単に述べよう．そしてそれから出る結果，歴史的の影響，このような法則に伴う神秘性，アインシュタインによる修正などについて論じようと思う；更にまたこの法則と物理学の他の法則との関係についても述べようと思う．これらの問題すべてを1章ですませるわけにはいかないが，後の章でもだんだんと述べていくつもりである．

話は，恒星の間をぬって，惑星が動いていくのを観測した古代人にさかのぼる．彼らがその観測から達した最後の結論は，惑星は太陽のまわりをまわっているというのであった．このことは後になってコペルニクスによって再発見された．しかし惑星が**どのようにして**太陽のまわりをまわっているのか，**どんな運動**をしているのか，というようなことがはっきりわかるまでには，もっと多くのことがなされなければならなかった．15世紀のはじめには，惑星がはたして太陽のまわりをまわっているのかどうかということについて大議論があった．チ

コ・ブラーエは，古代人とは全くちがった考えをもっていた．彼の考えによれば，惑星の運動の本性に関するこれらの議論を解決する最善の方途は，天空における惑星の実際の位置を充分精密に測定することだというのである．惑星がどう動くかということが測定からはっきりわかりさえすれば，それに何かある解釈を加えることができるだろう．これはすばらしい考えである．——何かを見付けようというときには，深遠な哲学的議論をたたかわすよりも，注意深く実験をする方がよい．この考えに従って，チコ・ブラーエは，コペンハーゲンの近くのヒエン島にある観測所で，何年にもわたって惑星の位置を観測した．そして彼は厖大な表をつくった．チコ・ブラーエが死んだ後は，数学者ケプラーによって研究がつづけられた．ケプラーは，チコ・ブラーエの観測資料から，惑星の運動について，非常にきれいな，驚くべき，それでいてしかも簡単な法則を発見したのである．

7-2　ケプラーの法則

まず，ケプラーの発見したのは，おのおのの惑星は，**楕円**と称せられる曲線にそって太陽のまわりを動き，その楕円の焦点の一つに太陽があるということである．楕円というのは卵形ではなく，非常に特長のあるきちんとした曲線であって，鋲二つをそれぞれ焦点にとめ，それと糸の輪と鉛筆とがあれば書くことができる．もっと数学的にいうならば，楕円というのは，2 定点(焦点)からの距離の和が一定であるような点の軌跡である．あるいは円を透視画的に書いたものだといってもよい(図 7-1)．

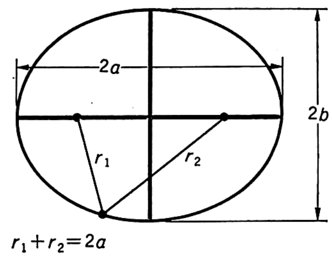


図 7-1　楕　円

ケプラーが次に気付いたのは，惑星が太陽のまわりをまわるのに，その速さは一定ではなく，惑星が太陽に近いときほど速く，遠いときほどおそいということである．くわしくいうと次のとおりである．例えば 1 週間というような間をおいて，そのはじめとおわりで一つの惑星の位置を観測し，そして観測された惑星の位置のおのおのに動径*をひいたとする．この惑星が 1 週間に動いた軌道の弧と，2 本の動径とによって囲まれて，図 7-2 に影をつけた平面積ができる．軌道部分が太陽からもっと遠いときに(そこでは惑星の動きはおそい)やはり 1 週間おいて同じような観測を 2 回する．そうすると，前と同じように面積ができるが，その面積は前の場合と完全に等しいのである．だから，この第 2 法則によれば，おのおのの惑星が軌道の上を動く速さは，同じ時間内には動径が同じ面積を“おおう”ようなものであるということになる．

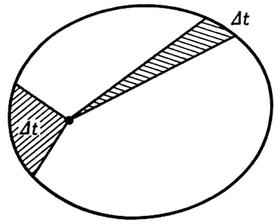


図 7-2　ケプラーの面積の法則

ずっと後になって，ケプラーは第 3 法則を発見した．この法則は前の二つとは性質がちがう．というのは，この法則は，一つの惑星だけの問題ではなくて，いくつかの惑星の間にある関係を述べたものだからである．任意の二つの惑星の公転周期と軌道の大きさとをくらべる

* 動径というのは太陽から惑星軌道の任意の点にひいた直線である．

と，周期は軌道の大きさの $\frac{3}{2}$ 乗に比例するというのが，この法則である．ここで周期というのは，惑星がその軌道を完全に1回まわるのに要する時間間隔であり，また軌道の大きさというのは，楕円軌道の長い方の直径の長さ，学術上では長直径といわれているものによってあらわす．もう少し話を簡単にして，もしも惑星の軌道が円であるとするならば，——実際もほとんどそれに近いのだが——その円をひとまわりするのに要する時間は，その直径(あるいは半径)の $\frac{3}{2}$ 乗に比例するというのである．かくてケプラーの法則というのは次の三つである．

I　惑星は太陽を焦点とする楕円にそって太陽のまわりを公転している．

II　太陽から惑星にひいた動径は，同じ時間の間には同じ面積をおおう．

III　任意の二つの惑星の周期の自乗は，おのおのの軌道の長半径の3乗に比例する：$T \propto a^{3/2}$.

7-3　力学の発展

ケプラーがこれらの法則を発見していたころ，一方ではガリレオが運動の法則を研究していた．問題は，惑星は何によって運動するのか，ということであった．(そのころ出されていた一つの説は，惑星のうしろには見えない天使がいて，その羽のはばたきで惑星を前におすので，惑星が運動するというのであった．諸君も知っているとおり，この説は今日ではすっかり訂正されている．すなわち，惑星が現在のような運動をするためには，見えない天使は運動の方向とはちがった方向に飛ばなければならないのであり，またその天使に羽はないのである．他の点ではいわば似ている理論である！)　ガリレオは，運動についてある一つの非常に著しいことを発見したのだが，それなくしては，これらの法則を理解することはできない．それは慣性の法則である——あるものが運動しているとして，それに接触しているものもなく，また外界からの影響も全くないとすると，このものは永久に運動し，直線に沿って一様な速さで動きつづけるというのである．(**何故**動きつづけるのか？　それはわからない．しかし事実そうなのである.)

ニュートンはこの考えをいいかえて，一つの物体の運動のようすを変える唯一の方法は，**力**をはたらかすことであるとした．物体の速さが大きくなったのなら，その運動の向きに力がはたらいたのである．また，その運動が**新しい**方向に変わったのなら，力が**横から**はたらいたのである．このようにニュートンは，物体の運動の速さや**方向**を変化させるのには力が必要であるという考えをつけ加えたのである．例えばひもの先に石をつけて円形にグルグルまわすとき，石がその円から外れてとんで行かないようにするためには力が必要である．我々はひもを**ひっぱらなければ**ならない．ところで，力によって生ずる加速

度は質量に逆比例する，あるいは，力は質量かける加速度であるという法則がある．一つの物体の質量が大きければ大きいほど，きまった加速度を生ずるために必要な力は大きい．(同じひもの先に別の石をつけて，同じ円のまわりを同じ速さでまわしてみると，石の質量がわかる．このように，質量の大小によって必要な力がちがい，質量の大きい物体は大きい力を必要とするということがわかる.) これらの考察から出てくるすばらしいことは，惑星をその軌道から外れさせないためには，**接線方向**の力は必要でない(天使は接線方向に飛ぶ必要はない)ということである．というのは，惑星はいずれにしろその方向には飛びつづけようとしているからである．外からの影響というものが全くないならば，惑星は**一直線**にどんどん飛んでいってしまう．力がなかったとしたら直線に沿って飛んでいってしまうであろうが，実際の運動はこの直線からはずれているのであって，そのはずれは運動に対して**直角**の方向であり，運動の方向ではない．いいかえるならば，慣性の原理があるので，惑星が太陽のまわりをまわる運動を左右する力は，太陽の**まわり**の力ではなくて，太陽の方に**むかう**力なのである．(力が太陽の方にむかうというならば，もちろん太陽が天使であるわけだ！)

7-4　ニュートンの引力の法則

ニュートンは，運動の理論をよく洞察したのであったが，それによって，**太陽**が惑星の運動を左右する力の座であり本源であると考えた．ニュートンは，惑星が同じ時間の間に同じ面積をおおうというそのことこそ，直線方向からのはずれが**半径方向**であるということのあらわれであって，——面積の法則は，すべての力がまさに**太陽の方にむかっている**という考えから直接に出てくることを証明した．(我々もまもなくこれを証明することができるようになる.)

次に，ケプラーの第3法則をよくしらべると，惑星が遠ければ遠いほど力が弱いということが出てくる．そして太陽から相異なる距離にある二つの惑星をくらべると，この力はそれぞれの距離の自乗に逆比例することがわかる．上の二つの法則を組み合わせて，ニュートンは，距離の自乗に反比例した力が二つの物体を結ぶ直線にそってはたらいているに相違ないという結論に達したのである．

ニュートンは普遍性ということになみなみならぬ関心をもっていた人物であるから，以上の関係は，太陽が惑星をひきつけているということだけでなく，もっと普遍的に成り立つことであると考えたのは当然である．地球の月が地球のまわりをまわっているように，木星のまわりにも月がいくつかあって，そのまわりをまわっている．このことは当時すでに知られていた．そこでニュートンは，おのおのの惑星も，力によってその月をひきつけているにちがいないと考えた．ニュートンはまた我々が地球上にひきつけられている力のことも考えていた．そこでニュートンは，これはみな一つの普遍的な力——**あらゆるもの**

が他のあらゆるものを引く力——によるのであるとした.

次の問題は，地球がその上にいる人間を引く力も，地球が月を引く力と“同じ”ように，距離の自乗に反比例するものであるかどうかということであった．地球上で一つの物体が静止の状態から放されたとき，もしも最初の1秒間に16フィート落ちるのだとすると，この同じ時間の間に月はどれだけ落ちるか？　月は少しも落ちてはいないといわれるかも知れない．月に力が何もはたらいていなかったら，月は直線にそって遠くへ飛んでいってしまうはずである．けれども実際にはそうでなくて，円にそって運動している．だから，月は，力がはたらいていなかったとした場合にあるべき場所から，実は**落ちている**のである．月の軌道の半径(およそ240,000マイル)と，地球のまわりを1回まわるのに要する時間(およそ29日)とはわかっているから，月が1秒間に軌道の上を動く距離は，それから求められる．また1秒間に月がどのくらい落ちるか*を計算することもできる．この距離を求めると，1秒間に $\frac{1}{20}$ インチとなる．ところで地球の半径は4000マイルであって，地球の中心から4000マイルのところ，すなわち地表では物体は1秒間に16フィート落ちる．したがって月のある240,000マイルのところ，すなわち地球の半径の60倍もの遠いところでは16フィートの $\frac{1}{3600}$ だけしか落ちないわけで，16フィートの $\frac{1}{3600}$ はまさに1インチの $\frac{1}{20}$ である．このように逆自乗の法則に実によくあうのである．

ニュートンが引力の法則を検証しようとしたのも同様な計算であった．ニュートンは注意して計算したのだが，しかしはじめは答がうまくあわなかった．そのくいちがいがだいぶ大きかったのでニュートンは，この理論は事実と矛盾すると考えて，その結果を公表しなかった．しかし，それから6年後になって，地球の大きさが新しく測定された．それによると，天文学者がそれまで使っていた月までの距離が正しくなかったことがわかった．ニュートンはこのことをきいてその正しい値を使って計算をやりなおしたが，こんどは見事に一致したのである．

月が“落ちてくる”といっても，月が我々に近よってくるわけではないのだから，この考えはいささかわかりにくい．しかしこれはいい考え方であるから，もう少し説明を加えておこう：月が落ちるという意味は，**もしも力がなかったらそれにそって進むであろう直線からはずれ落ちる**ということなのである．地上のことに例をとろう．地球の表面近くで物体を放すと，最初の1秒間には16フィート落ちる．**水平に**打ち出されたものも，16フィート落ちる．水平方向にも動いているのだけれども，最初の1秒間に落ちる距離はやはり16フィートである．図7-3はこのことを示す仕掛けである．途が水平になっているところにタマがあって，その先からまさに飛び出そうとしているところである．それと同じ高さのところに別のタマがあって，これはま下に落ち

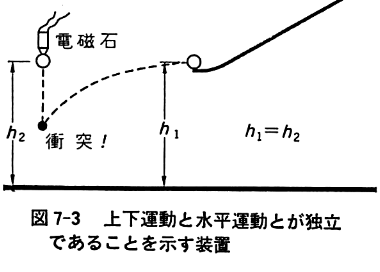


図7-3　上下運動と水平運動とが独立であることを示す装置

---

*　月が1秒前にあった点で，月の軌道の円にひいた接線にくらべて，軌道の円がどれくらいはなれているか.

る．そして，スイッチがあって，第1のタマがその途を離れる瞬間に，第2のタマが落ちはじめるようになっている．この二つのタマは空中で衝突する．このことは，同じ時刻には二つのタマが同じ高さにいるということの証拠になる．小銃弾などを水平にねらいをつけて打ち出したとすると，それは1秒間に遠くへ——2000フィートくらい——飛んでいくが，それでもやはり16フィートは落ちる．それでは小銃弾の速さをだんだん大きくしていったらどういうことになるか？ ここで，地球の表面に曲率があることを忘れてはならない．弾の速さが充分大きいと，16フィート落ちても，地面からの高さが前とちょうど同じだということがありうるわけである．それはどういうときか？ 弾は落ちる，けれども地球は曲がって遠ざかるので，弾は地球の"まわり"に落ちるのである．だから，問題は，地球が水平から16フィート下にあるようにするためには，弾は1秒間にどこまでいっていなければならないか，ということになる．図7-4に示したとおり，地球の半径は4000マイルであって，接線はもしも力がなかったとしたら弾が進むであろう途を示している．ここで次のような平面幾何のきれいな定理を使う．それは，この接線に平行な弦をひいて，直径を2分すると，接線の長さは，この二つの部分の長さの比例中項に等しい，という定理である．この定理を使うと，弾の進む水平距離は，落下距離16フィートと，地球の直径8000マイルとの比例中項であることになる．$\frac{16}{5280^*}\times 8000$ の平方根は，ほとんど5マイルである．だから，弾の速さが1秒に5マイルであるならば，毎秒16フィートという一定の割合で地面にむかって落ちつづける．しかし地面もそれだけ曲がって退くので，弾は決して地面に近付くことはない．ガガーリンが，地球のまわりを25,000マイルもまわったときには，毎秒およそ5マイルの速さであったのである．（実は地面よりも少し高いところだったから，その速さはもう少しおそかった.）

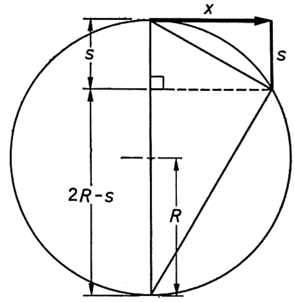


図7-4 円軌道の中心へ向かう加速度
平面幾何から $\frac{x}{s}=\frac{2R-s}{x}\approx\frac{2R}{x}$ ここに R は地球の半径4,000マイル x は1秒間に進んだ水平距離 s は1秒間に落ちた距離（16フィート）

一つの新しい法則というものが大発見であり有用であるといえるのは，その法則に取り入れられたものよりも，もっと多くのものが導き出されるという場合に限る．ニュートンはケプラーの第2法則と第3法則を使って，引力の法則を導き出したのである．それによってニュートンは何を予言したのか．まず第1に，月の運動の分析もその予言の一つである．何故かというと，引力の法則によって，地球上の物体の落下と月の落下とが関係づけられたからである．第2の問題は，その軌道の形は楕円であるかということである．後の章で，この運動をきちんと解明する方法を述べるが，軌道は楕円でなければならないということがニュートンの法則から出て来る．だからケプラーの第1法則を説明するには，これ以上，何の事実もいらない．このようにニュートンは，有力な最初の予言をしたのである．

引力の法則によると，それ以前には理解されていなかったたくさん

* 1マイルのフィート数

の現象を説明することができる．例えば潮汐の現象は，それまでは不思議なものと考えられていたのだが，それは月が地球に及ぼす引力のために生ずるのである．月はその真正面にある水をひっぱって潮汐を生ずる——前にもそう考えた人があったが，ニュートンほど才能がなかったので，1日のうちにただ1回だけしか潮汐が起こらないと考えた．月がその真正面の水をひっぱるので，満潮のところと干潮のところとができる．ところが地球は自転しているので，地球上の一つの場所を考えれば，24時間に満潮が1回，干潮が1回になるというのがその理屈であった．しかし実際には1回の干満は12時間である．そうかと思うと，月が地球をひっぱるから，水がとり残され，満潮が起こるのは地球の裏側のはずだと主張した他の一派もあった．この理論は両方ともまちがっている．じっさいはこうなのである：月が地球に及ぼす引力も水に及ぼす引力も，中心のところで“帳消し”になっている．しかし月に近い側の水は平均よりも強く引かれ，遠い側の水は少ししかひかれない．そのうえ，水は流れるが，地球の固体部分は流れられない．これら二つのことの組合せがほんとのことなのである．

“帳消し”といったが，それはどういう意味か？　何が帳消しになっているのか？　もしも月が地球全体に引力を及ぼしてその方にひっぱっているというのならば，何故，地球は月の方へむかって“上へ”落ちていかないのか？　実は，地球も，月と同じような具合に，円に沿って運動しているのである．その円の中心の位置は，地球の内部ではあるが，地球の中心とは一致していない．月が地球のまわりをまわるのではなく，地球と月との両方が，図7-5に示すように，一つの点のまわりをまわっているのであって，地球も月もこの共通点にむかって落ちているのである．この共通の中心のまわりの運動が，おのおのの落下と帳消しになっているのである．地球も直線に沿って飛んでいってしまうのではなく，円に沿って運動している．地球の中心のうける平均の“遠心力”は，月の引力とちょうどつりあっているのであるが，月から遠い側にある水はそれよりも大きい遠心力を受けるから，外にとびだす．遠い側は月の引力が弱く，“遠心力”は大きい．差引き，地球の中心から遠ざかるむきに水が動く．月に近い側では，月の引力が強い．そして，動径が短いから，“遠心力”も小さく，水の動きは，空間的にみれば，前の場合と逆むきであるが，地球の中心からみれば，やはり**遠ざかる**むきである．結局潮汐のでっぱりは**二つ**できるのである．

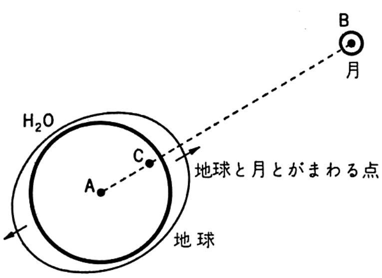


図7-5　地球・月の系と潮汐

7-5　万有引力

我々が引力というものを理解したとすると，まだほかにどんなことがわかってくるだろうか？　地球がまるいことは誰でも知っている．何故まるいのか？　答は容易である：引力のためである．あらゆるものは，他のあらゆるものに引力を及ぼす，というのが地球のまるい唯一の理由であって，地球はできるだけそれ自身をひきつけて，こうなっているのである．もう少し先のことをいうと，地球は回転している

から，**正確には**球ではない．そして赤道の近くでは引力と反対むきに遠心力がはたらくことになる．そして地球は楕円形であるはずだということになり，そうやって計算した楕円の形も実際とあう．このように引力の法則だけから太陽も月も地球も(ほとんど)球形であるということを導き出すことができる．

引力の法則から出てくることがまだ他にもあるか？ 木星の衛星についていうならば，それが木星のまわりをまわっている運動のようすが，すべてこの法則から理解されるのである．木星の衛星についてはかつてある一つの問題があったのであるが，それを述べておこう．レーマーは木星の衛星について非常によく研究したのであるが，ときに，ある衛星の運動は予定よりもはやく，また他の衛星の運動は予定よりもおそいことがあることに気が付いた．(この予定というものをきめるには，長い間観測をつづけて，衛星が木星を1周するのに要する平均時間を求めればよい.) 予定よりもはやいというのは，木星が地球に**近い**ときであり，予定よりもおそいというのは，地球から**遠い**ときである．このことを引力の法則だけから説明しようとすれば，それは極めて困難なことになる——事実，もしも他に説明の方法がないというならば，この見事な引力の法則もこれでその終焉ともなったろう．一つの法則にうまくいかないところが1個所でもあれば，その法則は正しくないのである．しかし，上に述べたくいちがいの理由は非常に簡単で見事なものであった：光が木星から地球に到達するのには時間がかかるから，木星の衛星の運動を我々が**見る**のは実際よりも，ちょっとおくれているわけである．木星が地球に近いときにはこのおくれの時間は短く，遠いときには長い．木星の衛星が，地球に近いか遠いかにしたがって，平均として予定よりも少しはやかったりおそかったりするのは，この理由によるのである．この現象は光が瞬間的に伝わるものでないことを示したのであって，このことによって，光の速さがはじめて決定された．これは1656年のことであった．

あらゆる惑星が互いに力を及ぼしあっているのならば，例えば木星が太陽のまわりをまわる運動を左右する力は，太陽による力だけではなかろう；例えば土星からの引力もある．土星は太陽よりもずっと小さいから，この力はそれほど大きいものではない．しかし**なにがしか**の引力は及ぼしているのだから，木星の軌道は完全な楕円であるはずはなく，また事実，楕円ではない．この軌道は正しい楕円から少しはずれていて，そのまわりを“うねうね”しているのである．このような運動はなかなか複雑である．引力の法則をもととして，木星，土星，天王星などの運動がよく研究された．すなわち，これらの惑星のおのおのが他のそれぞれに及ぼす影響が計算され，これらの運動の小さなはずれや不規則性が，この引力の法則一つによって完全に説明されるかどうかということが研究されたのである．木星と土星については，これはすばらしくうまくいった．しかし，天王星は“不可解”であった．天王星の動き方は非常に奇妙であった．その軌道は正確な楕円ではな

い．木星や土星の引力があるのだからこのことは理解できる．しかし，これらの引力を考えに入れても，天王星の運動は**まだ**思ったようなものにはならなかった．かくて引力の法則は危殆に瀕し，これを克服することはできそうになかった．ところがイギリスのアダムズとフランスのルヴェリエとは，独立に，他の可能性があることに気が付いた：すなわち，暗くてまだ誰もみたことのない見えざる惑星が**もう一つ**あるのではなかろうか，というのである．この惑星Nが天王星に引力を及ぼすのではないか．そしてこの2人は，観測されたずれを生ずるためには，かくかくの惑星がかくかくの場所にあるべきだということを計算した．そして，それぞれ天文台に，次のような手紙を書き送った．“拝啓，貴下の望遠鏡をこれこれの方におむけになれば，新しい惑星が見えることと存じます.” いったい，君のいうことに誰かが耳を傾けるかどうかということは，君が交渉するその相手によってきまることが多いものである．ルヴェリエのいうことは注目をひいた．そして天文台では観測を行なった．そこに惑星Nがあったのである！　もう一方の天文台も，数日後，急いで観測を行なったが，やはり惑星Nをみつけた．

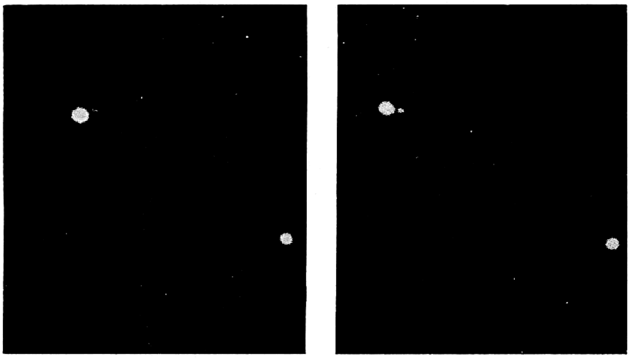


図7-6　二重星系

この発見は，太陽系内で，ニュートンの法則が絶対に正しいものであることを示している．しかし，この法則は，比較的短距離にある惑星をこえて，もっと遠い距離に対してもちゃんとあてはまるのだろうか？　まずその検討の第1は，次の問題である．惑星が互いに引力を及ぼすように，**恒星もまた互いに**引力を及ぼしているのだろうか？及ぼしているということに対しては**二重星**にたしかな証拠がある．図7-6はある二重星——非常に近い二つの星——を示したものである．(図には第3の星も写っているから，それをみれば図がまがっていないことがわかる.) この二つの写真は，数年の間をおいて撮影されたものである．第3の星を基準にしてみると，二重星を結ぶ軸が回転したということがわかる，すなわち，この二つの星は互いのまわりをまわっているのである．この回転はニュートンの法則に従っているだろうか？　ある一つの二重星系(シリウスAとシリウスB)について，その相対的位置を精密に測定した結果が，図7-7に示してある．見事な楕

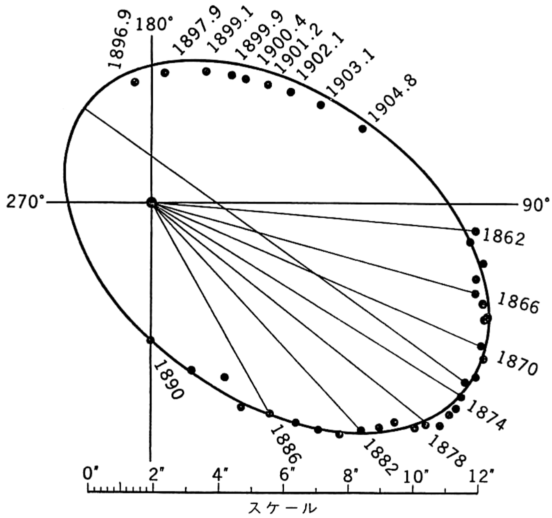


図 7-7 シリウス A に対するシリウス B の軌道

円である．目盛は 1862 年からはじまって 1904 年までずっとつづいている．(今日までには，もう 1 周しているにちがいない．) このように，あらゆることがニュートンの法則と一致するのであるが，シリウス A という恒星は楕円の焦点のところにいない．どうしてこんなことが起こるのかといえば，それは楕円の面が天空の面上にないからなのである．軌道面を直角な方向から見ているのではないからなのである．楕円を斜からみると，その形はやはり楕円に見えるけれども，その焦点はもとと同じ場所にはみえない．このようにして，引力の法則の要請に従って，互いのまわりをまわっている二重星のことを調べることができるのである．

もっと大きな距離に対しても引力の法則がなりたつ．このことは，図 7-8 に示されている．もしも，ここに引力がはたらいているということがわからないという人がいたら，愚かものである．これは天にみえるいちばんきれいなものの一つ——球状星団——である．小さな点

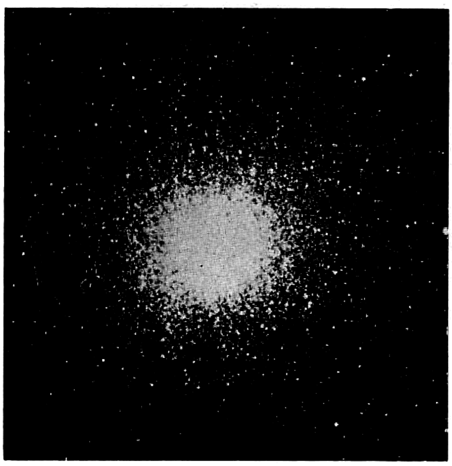


図 7-8 球状星団



図 7-9 銀河系

はみな星である．たくさんの星が中心の方ではぎっしりつまっているように見えるが，これは望遠鏡その他の装置がよくないからである．いちばん中心にある星でさえ，その相互の間の距離は厖大なものであって，互いに衝突するなどということは全くないといってよい．外側の方にくらべて内側の方に星がたくさんある．そして外側にいけばいくほどその数はだんだん減っている．これらの星の間に引力があることはこれで明らかである．このように厖大な，おそらく太陽系の大きさの十万倍というような距離においても，引力があることはたしかなのである．更にもっと遠くへ行って，図7-9に示したような**銀河系全体**をみてみよう．この銀河系の形をみると，その物質が集中しようとしている傾向が明らかにあらわれている．逆自乗の法則がここでも正しく成り立っていることを証明することはもちろんできないが，この厖大な距離においても引力があって，すべてのものをいっしょにひきとめていることは疑いない．“わかった，話はみんなうまい．しかし何故球にならないのか？”という疑問も出るだろう．そのわけはこれが**回転**していて，**角運動量**をもっているからであって，全体がちぢんでも角運動量を失うわけにはいかないからである：ちぢまるとしてもそれは主として1平面で起こるのである．（諸君がいい問題をさがしているなら，銀河系の腕はどのようにしてでき，銀河系の形は何によってきまるかということは，まだくわしくわかっていないといっておこう.）銀河系の構造の複雑な点はまだ完全にわかっていないとしても，銀河系の形が引力によるものであることは，疑いない．銀河系では，5万ないし10万光年のスケールが問題になる．太陽から地球まで光が届くのは**8分20秒**であるから，上のような距離がどんなに大きいものであるか想像できるであろう．

図7-10は“小さな”ものがたくさん集まっているところであるが，この図が示すように，引力はもっと大きい距離でもはたらいているのである．これは**銀河系団**であって，星が星団をつくるように，銀河系



図7-10　銀河系団

が銀河系団をつくっているのである．銀河系は，こんな距離でも引力を及ぼしあっていて，集まって群をつくろうとするのである．1千万光年以上の距離でも引力はおそらくはたらいているのだろう．我々の知る限り，引力は距離の自乗に反比例してどこまでも及んでいると考えられるのである．

引力の法則によって我々は，星雲について理解することができるばかりでなく，星の起源についてもなんらかの考えを得ることができる．図7-11に示したように，塵と気体からなる大きな雲があったとすると，塵の粒が他のものを引力によってひっぱって小さな塊ができるだろう．図では，やっと見えるくらいだが，“小さな”黒い点がある．これはおそらく塵や気体の集積のはじめであって，その引力によって星になりはじめているのだろう．星が形成されるところが観測されたといっていいかどうかは問題であるが，図7-12は，その一つの証拠にはなる．左の図は，星と気体域の写真で1947年に撮影されたもので

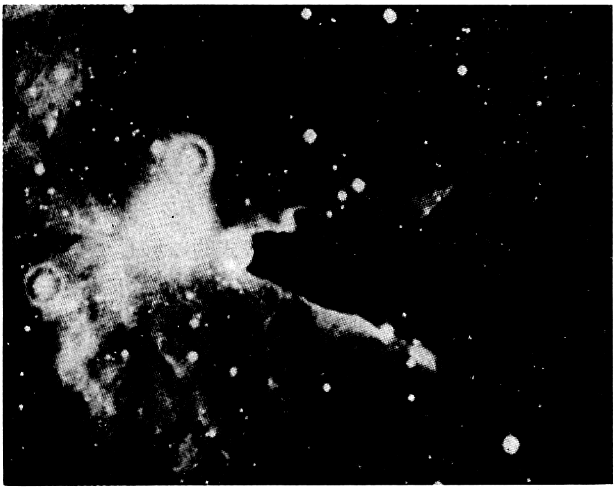


図7-11 星間塵雲

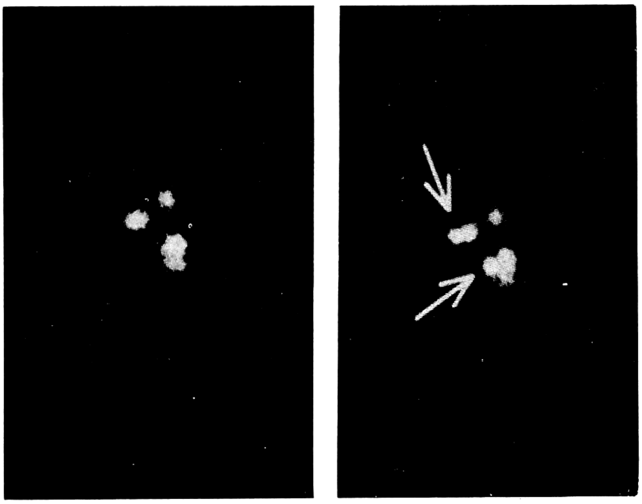


図7-12 新星誕生?

あり，右の図は僅か7年後に撮影されたものである．右の図には新しい明るい点が二つみえる．気体が集積したのだろうか，それとも引力がはたらいて，大きな球になり，その内部に原子反応がはじまって星になったのだろうか？　そうかも知れないし，そうでないかも知れない．たった7年の間に，一つの星が変化して，見えるようになったという偶然の幸運にめぐりあわせたと考えるのは，少々無理である；それが**二つ**も見えるというのも，ますます不思議なことである！

7-6　キャベンディッシュの実験

上に述べたように，引力は，厖大な距離にまで及んでいる．しかし，いかなる二つの物体の間にも力がはたらくというのならば，我々の身近かにあるものの間にも引力がはたらき，それを測ることができるはずである．二つの星が互いのまわりをまわっているのを観測する代りに，ナマリのタマと大理石とをもってくれば，大理石がナマリのタマの方にひきつけられるのが観測されないはずはない．このような簡単なやり方でこの実験を行なおうとするときにむずかしいところは，この力が微弱であるという点である．仕掛け全体におおいをかぶせて中の空気をぬき，またそれが帯電していないことを確かめるなど細心の注意をはらわなければならないが，しかしそうすればこの力を測ることができるのである．この測定はキャベンディッシュによってはじめて行なわれたが，その装置は図7-13に模式的に示してある．非常に細い吊糸——ねじれ糸——で腕をつり，その両端に小さなナマリのタマをつける．また大きなナマリのタマ二つを固定しておく．この大きなタマと小さなタマとの間に直接に力がはたらいていることが，この実験によってはじめて示されたのである．吊糸がどれくらいねじれるかを測ることによって，この力の強さが求められ，そしてこの力が距離の自乗に逆比例することが証明された．このようにして，次の式

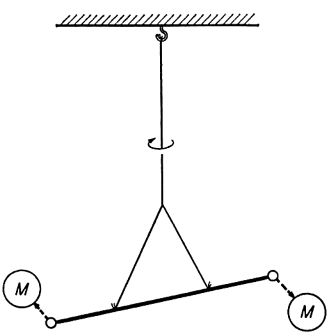


図7-13　キャベンディッシュの装置模式図
小物体間の万有引力の法則を確証し引力定数Gを測定するために使ったもの

$$F = G\frac{mm'}{r^2}$$

における係数Gの値が精確に求められた．質量も距離もみんなわかっている．諸君は“こんなことは地球について，もうとっくにわかっている”というかも知れぬ．そのとおりだが，しかし我々はまだ地球の**質量**は知らないのである．この実験からGがわかり，また地球の引力の強さがわかれば，地球の質量の大きさが間接にわかるのである！この実験は“地球の目方はかり”といわれ，キャベンディッシュは，これで地球の目方をはかったのだといっているけれども，彼が測ったものは，実は引力の法則における係数Gの値だったのである．これは地球の質量をきめる唯一の方法であって，Gは

$$G = 6.670\times10^{-11}\ \text{ニュートン}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$$

である．

この引力の理論の大成功は，科学の歴史に実に重大な影響を及ぼした．この影響はいかに強調しても強調しすぎるということはない．そ

れよりも以前には，はてることなき議論，パラドックスなどがあった．そのときの混乱，不十分な証拠，不完全な知識と，この引力の法則の明解さと単純さ——すべての衛星も惑星も恒星もこんな簡単な**同じ一つの法則**に左右され，更に人間がこれを**理解し**，惑星がどう動くはずかということを導き出すことができるというこの事実——この二つをくらべてもみたまえ．その後，多年にわたって科学が成功したのもみなこの理由である．何故ならば，このことによって，自然界における他の現象にも，またこのような美しく簡単な法則があるだろうという期待がもたらされたからである．

7–7 引力とは何か？

しかしこんな簡単な法則でいいのか？ そのからくりはどんなものなのか？ 今まで我々のしたのは，地球が太陽のまわりを**どのように**まわるかを記述することであって，**なぜまわるか**ということについては，全然ふれなかった．このことについては，ニュートンは何の仮説もおかなかった；ニュートンはそのからくりに立ち入ることなく，引力が**何をするか**ということを見出すだけで満足した．**それ以来，このからくりについてちゃんとした説をたてた人は1人もない**．このような抽象的性質をもっているということは，物理法則の特色である．エネルギー保存の法則も，計算して，たし算をすべき量に関する定理であって，そのからくりには立ち入っていない．これと同じように，力学におけるこの大法則は，定量的な数学的の法則であって，そのからくりはわからない．このように，その背後にあるからくりを知らないでも，数学を使って自然を記述することができるというのは，何故なのだろうか？ これは誰も知らない．しかしこのようにしていろいろのことがわかってくるのだから，それをつづけていくより他はない．

引力のからくりについては，昔からいろいろの説があった．そのうちの一つは，多くの人がときおり考えたものであるが，ここでそれにふれてみるのも面白かろう．まず，ある人は，それを“発見”したとき大いに興奮して，よろこんだのだったが，間もなくそれは正しくないことがわかった．最初の発見は1750年のころであった．あらゆる方向に非常に大きな速さで空間をとんでいるたくさんの粒を考える．そしてそれは物質をつきぬけるとき，ほんの少し吸収されるだけだとする．地球に**吸収される**と，それに撃力を及ぼすというのである．しかし，ある方向にとんでいく粒の数と他の方向にとんでいく粒の数とは同じであるから，撃力はみな打ち消しあってしまう．しかし太陽が近いところにあると，太陽を通って地球にむかってくる粒は一部分そこで吸収されているから，太陽の方から来る粒の数の方が反対側から来る粒の数よりも少ない．そのため地球の感ずる撃力は差引き太陽の方にむくことになる．また，この撃力が距離の自乗に逆比例することも明らかである．——距離が変わると太陽をはさむ立体角も逆自乗で変わるからである．ではこのからくりはどこがいけないか？ この理論をお

しすすめていくと，新しい結果が出てくるが，それが事実とあわないのである．この理論には次のような困難がある：地球は太陽のまわりをまわっているので，ぶつかる粒の数は前面で多く背面で少ないはずである．（雨の中をかけだすと，顔にあたる方がつよく，背中にあたる方が弱い！）だから，地球に加えられる撃力は前面の方が多く，地球は**運動に抵抗**を感じて，軌道上の運動はだんだんおそくなるはずである．どれだけ時間がたったらこの抵抗によって地球が止まってしまうかということを計算することができるが，それによると，地球はもう軌道上にいることはできない．このように，この粒のからくりではうまくいかないのである．引力を“説明”するからくりをいろいろと発明しても，どれもみな，同時に，実際には実在**しない**他の現象があるということになってしまうのである．

次に，引力とその他の力との間にあるかも知れない関係について考えてみよう．今日のところ，引力が他の力によって説明されるということはない．引力は，電気の力とかあるいはそういうものの一面ではないので，これは説明にはならない．しかし，引力と他の力との間には非常に似たところもあるので，その類似に注目してみるのも面白い．例えば二つの帯電体の間にはたらく電気の力は，引力の法則に似ている：電気の力は，電荷の積にある定数をかけたものであって，その大きさは距離の自乗に逆比例する．その力のむきは引力と反対であって——同種の電気は斥けあう．しかしそれにしても，引力の法則も電気の力の法則も，距離については同じ形の関数を含んでいるというのは，著しいことではないか．引力も電気の力も，ことによったら，我々が思っているよりももっと密接に関係しているのかも知れない．この二つを統合しようとした試みはたくさんある．いわゆる統一場の理論は，引力と電気の力とを結びつけようとしたたいへんエレガントな試みではあった．しかし，引力と電気の力とをくらべていちばん目立つことは，それらの力の**強さの対照**である．この二つの力に関するどんな理論があったにせよ，引力がどのくらいの強さであるかということが出てくるものでなければいけない．

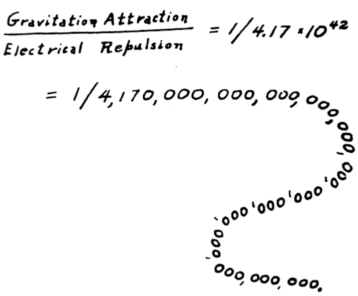


図7-14　2電子間の電気作用と引力作用の強さの比

二つの電子（自然界における普遍的電荷）の間の電気的斥力と，その質量による引力とを何かの単位であらわせば，二つの力の比を求めることができる．この比は距離に関係なく，自然界における一つの基本定数である．この比は図7-14に示してある．二つの電子の間の引力は，電気的斥力の $\dfrac{1}{4.17\times10^{42}}$ なのである．そこで，こんな大きい数がどこから出て来るかということが次の問題である．これは，地球の体積とノミの体積の比というような，偶然的のものではない．これは電子という同じ一つのものの両面なのである．このたいへんな数は一つの自然定数であって，自然の深奥にふれたものを含んでいる．この途方もない数はどこから来るのか？“普遍方程式”というものがいつか見出されて，その根の一つがこの数になるのだという人もある．こんな途方もない数をその根の一つとしてもつような方程式をみつけるの

は非常に困難なことである．また他の可能性を考えた人もある；その一つは，これを宇宙の年齢にむすびつけるのである．そうするには，どこかに大きな数を**もう一つ**見付けなければならないことは明らかである．しかし，ここで宇宙の年齢というのは年数をさすのだろうか．そうではない．年というのは“自然”のものではなく，人間が工夫したものだからである．自然のものの一例として，光が陽子のはじからはじまで伝わる時間 10^{-24} 秒を考えてみよう．この時間と**宇宙の年齢**，2×10^{10} 年，との比をとると，答えは 10^{-42} である．0のつづく数が前のとだいたい同じである．そこで引力の定数は宇宙の年齢と関係があるのではないかということが考えられる．もしもそうであるならば，引力の定数は時間的に変化するはずで，宇宙の年齢と，光が陽子のはじからはじまで伝わるに要する時間との比が，宇宙が年をとればとるほどだんだん大きくなるということになる．引力の定数はほんとに時と共に**変化する**だろうか？　もちろんその変化は非常に小さいだろうから，それを確かめることはとてもむずかしい．

このことを検証するには，いろいろの方法が考えられる．その一つは，地球に最初に生物があらわれてから今日までの10億年，すなわち宇宙の年齢の $\frac{1}{10}$ の間に，引力定数の変化があったとしたらどんな影響を生じたであろうかということを考えてみるのである．この間に，引力定数はおよそ1割大きくなったことになる．そこで，太陽の構造——それを構成している物質の目方とその内部で発生する輻射エネルギーとのかねあい——を考えると，引力が1割大きくなったのだとすると，太陽は1割どころではなく——引力定数の**6乗**で——もっと明るくなったことになる！　引力が変化したとすると，地球の軌道がどうなるか．それを計算すると，地球は太陽にもっと**近かった**ということになる．これらのことを考えあわせると，地球の温度は今よりも摂氏で100度以上も高く，水はすべて海になくて，大気の中に蒸気としてあることになる．こんなわけで，引力の定数が宇宙の年齢と共に変化するとは**信じられない**．しかし，いま述べたような議論も非常に説得力があるというわけでもなく，この問題はまだ完全に終わってはいない．

引力が**質量**——根本的には**慣性**の大小，すなわち円運動をしているものをひきとめておくのにはどのくらいの強さでなければならないかを示す量——に比例することは事実である．それゆえ，二つの物体があって，一つは重く一つは軽いとしても，それが別のもっと大きなもののまわりを引力に従ってまわるときには，同じ円に沿って同じ速さで運動することになって二つの物体はいっしょにいて離れない．何故ならば，円に沿って運動するには，重い方のものに対しては強い力が**必要**だからである．すなわち，引力の大小は，二つの物体がいっしょにまわるのにまさにちょうどよい割合になっているのである．一方の物体が他方の内部にあれば，それは内部に**ありつづけ**，うまくつりあっているのである．だから，ガガーリンやチトフがみれば，宇宙船の

中では，物は“無重量”であった．たとえば1本の白墨をはなしたとすると，それは宇宙船と全く同じように地球のまわりをまわるので，それはいつも目の前の同じところにいるようにみえるはずである．引力が高い精度で**正確に**質量に比例するということは，非常に重要なことである．何故なら，もしも正確に比例するのでなかったとしたら，慣性と重さとがちがうことになり，それの影響があらわれるはずだからである．このようなことがないということは，最初に1909年にエティボスによって，近くはディケによって，非常に精密な実験でたしかめられた．すべての物質について，質量と重さとは，10億分の1，あるいはもっと高い精度で正確に比例するのである．これは特筆すべき実験である．

7-8　引力と相対性理論

もう一つ述べておかなければならないのは，ニュートンの引力の法則がアインシュタインによって修正されたということである．ニュートンの引力の法則は，実に目をみはらせるようなものであったが，それにもかかわらずそれは正しくなかったのである！　そしてそれは相対性理論をとり入れてアインシュタインによって修正された．ニュートンによると，引力の影響は瞬間的に生ずる．すなわち，一つの物体を動かすと，それが新しい位置に来るので，直ちにその新しい力を感ずるということになる．このような方法によれば，無限大の速さで信号を送ることができる．しかしアインシュタインの理論によると，**光よりも速く信号を送ることはできない**ということになるので，引力の法則は正しくないにちがいないということになる．この信号のおくれを考えに入れて修正すると，アインシュタインの新しい引力の法則になる．この新しい法則でわかりやすい面はこういうことである：アインシュタインの相対性理論によると，**エネルギー**をもっているものはすべて質量——引力をうけるという意味における質量——をもっている．光でさえも，エネルギーをもっているので，“質量”をもっている．一つの光線もその中にエネルギーをもっているわけだが，それが太陽のそばを通ると，そこには太陽の引力がはたらいている．だから，光はまっすぐに進まないで，その方向が曲がる．例えば日食のとき，太陽のまわりに見える星は，太陽がそこになかったとした場合に見えるはずの場所から少しずれて見えるはずである．そして観測もまさにそのとおりであった．

最後に，引力というものを他の理論とくらべてみよう．近年，すべての物は小さい粒子からできていること，また核力などいろいろの相互作用がその間にあることが発見された．しかしこれらの核力も電気の力も，これまでのところ，引力を説明するまでに至っていない．自然を量子力学的にみるといっても，まだそれは引力には及んでいないのである．スケールが小さくて量子的効果を考える必要があるくらいになると，引力のはたらきも非常に小さく，引力の量子論というもの

は，まだ発展していない．ニュートンの法則が修正されてアインシュタインの法則になったものが，さらに不確定性原理とも協調するように修正されうるかどうか．物理理論の統一性という点からみて，このことを考えるのは重要なことである．しかしこの修正はまだ完成されていない．

第8章
運　　　動

8-1　運動の記述

時間がたつにつれて，物体というものには，いろいろの変化が生ずるが，これを支配する法則を見出すためには，まずそれらの変化を**記述**し，それを記録する方法がなければならぬ．物体に生ずる変化のなかで，いちばん観測しやすいのは，その位置が時間によってどう変わるかということ，すなわち運動といわれるものである．いま，何か一つの剛体があるとして，それに消えない目印をつける．これを点と呼ぶことにしよう．これからこの小さい目印——自動車のラジエーターキャップでもいいし，落下するタマの中心でもいい——の運動を取り扱って，それが運動しているということや，またそれがどんな運動かということを，どのように記述したらよいかを考えよう．

これらの例はべつだん大したことにはみえないかも知れないが，変化を記述するというのには微妙なところがいくつも入ってくるのである．例えば雲は全体としては非常にゆっくりただよっているように見えるが，その中では新しく雲ができたり，また蒸発がはやく行なわれたりしている．雲の流れの速さだとか，女の心の変化だとかいうようなものを記述するのは，固体の点の運動を記述するのよりもむずかしい．心の変化を調べるのに簡単な方法はありはしない．しかし，雲そのものは多数の分子のあつまりとしてこれをあらわし，あるいは記述することができるのだから，その個々の分子の運動を記述すれば，雲の運動を記述することが原理的には可能であるかも知れない．同じように，心の変化でも，それに相当して脳のなかの原子にも変化があるのかも知れない．しかし我々の知識はまだとてもそんなところにいってはいないのである．

ともかく，点の運動から始めようというのはこういう理由によるのである；この点というものは原子だとする方がいいのかも知れないが，はじめはもっと荒っぽいところからはじめて何か小さい物体——動いた距離にくらべて小さい——を考える方がよさそうである．例えば，自動車が100マイルの距離を走るとき，車の前部と尾部とを区別する必要はない．僅かな差があることは確かだが，荒っぽい目的に対してはただ“車”といっておけばよかろう．同じように，我々が点といっているものが，ほんとの点でなくてもかまわない．現在の目的にとっては，極端に精密に考える必要はない．それからまた，この問題を取り扱うのにあたって，我々の世界が3次元であることもまず忘れてしま

おう．1台の自動車が1本の道路を走るというように，一方向の運動だけを考えることにしよう．1次元の運動を記述することがわかってから，そのあとで，3次元に戻ることにしよう．諸君は，“みんな大したことでない”というかも知れない．まさにそのとおりである．このような1次元の運動——例えば自動車の運動——をどうすれば記述することができるか？　これ以上簡単なことはあるまい．その記述の方法はたくさん考えられるが，その一つは次のようなものであろう．いろいろな時刻に車がどこにいるかという位置をあらわすためには，出発点からの距離を測って，その観測をすべて記録する．表8-1において，sは出発点から車までの距離をフィートであらわしたものであり，tは時間を分であらわしたものである．表の第1行は距離ゼロ，時間ゼロとなっている——車はまだ動き出していない．出発してから1分たつと，車は1200フィート進んでいる．2分間にはもっと進んでいる——第2分に進んだ距離は1200フィートより長い．このことに注意してほしい——加速されたのである．3と4の間のところ，更にまた5のところでは何かが起こった——車が信号で止まったのだろうか？それからまた速くなって，6分の終りには13,000フィート，7分の終りには18,000フィート，8分の終りには23,500フィートのところまで進んでいる．9分にはたった24,000フィートまでしか進んでいない．最後は白バイに止められたのである．

表 8-1

t(分)	s(フィート)
0	0
1	1200
2	4000
3	9000
4	9500
5	9600
6	13000
7	18000
8	23500
9	24000

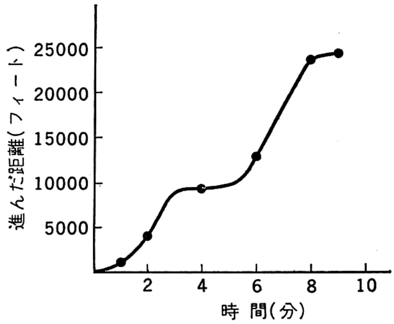


図 8-1　自動車の距離・時間グラフ

上のようにするのも運動を記述する一つの方法である．もう一つはグラフによる方法である．時間を横軸に，距離を縦軸にとると，図8-1に示したような曲線が得られる．時間がたつと距離が増す．距離の増し方は，はじめはゆっくりで，後でははやい．4分目になると，増加はしばらくまた非常にゆっくりになり，それから数分間はまた増加し，最後に9分目には増加しなくなったことがわかる．これらのことは，表がなくてもグラフから観察することができる．記述をさらに完全にするためには，30秒毎に車がどこにいるかということも知る必要があるが，このグラフには，そういう中間のすべての時刻の車の位置もあらわされている．

車の運動は複雑である．そこで，他の例として，簡単な法則に従って，より簡単に運動するものを考えよう：それは落体の運動である．表8-2はタマの落下運動について，時間を秒であらわし，距離をフィートであらわしたものである．0秒ではタマは0フィートから落ちはじめる．1秒たつと，16フィート落ちている．2秒たつと，64フィート，3秒たつと144フィート，…というように落ちている；表の値をプロットすると，図8-2に示したような，きれいな放物線になる．この曲線の式は

$$s = 16t^2 \tag{8.1}$$

である．この式によって任意の時刻に対する落下距離を計算することができる．自動車のグラフにも，式があるはずだと，諸君はいうだろう．たしかに，そのような式は抽象的に

表 8-2

t(秒)	s(フィート)
0	0
1	16
2	64
3	144
4	256
5	400
6	576

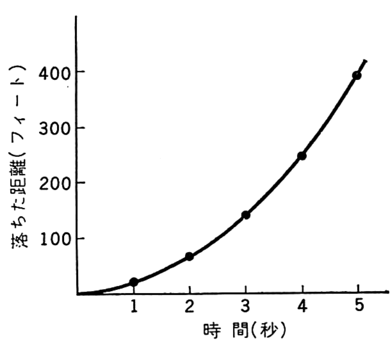


図 8-2　落体の距離・時間グラフ

$$s = f(t) \qquad (8.2)$$

と書くことができる．この式の意味は，sという量はtによってきまるということであって，数学的にいえば，sはtの関数であるということである．sがどんな関数であるかはわかっていないから，それをきちんとした代数式の形に書くことはできない．

上に，運動の例を二つ述べた．両方とも非常に簡単な考えでうまく記述でき，べつだん深奥なところはないようにみえる．しかし実は深奥なところが，いくつか**ある**のである．第一に，時間とか空間とかは何を意味するのか？　これらの深奥な哲学的の問題は，物理学において非常に慎重に考えなければならないのであるが，これは決してやさしいことではない．相対性理論によると，空間や時間の概念は，ちょっとみるほど簡単なものではないのである．しかし，我々の現在の目的にとっては，あるいは我々が最初に要求する精度にとっては，ものごとをそう神経質にきちんと定義する必要はない．諸君はこういうかも知れない，“それはひどい話です．——科学ではあらゆるものをきちんと定義しなければならないと習いました”と．しかし**どんなことでも**きちんと定義するということはできないのである．きちんと定義しようとすると，話が窮屈になってこんなことになる．2人の哲学者がむかいあって話をしていた．1人がこういう．“君は話していることが自分自身にもわかっていないんだ！”すると相手がいう．“**わかる**というのはどういうことなのか？　**話す**というのはどういうことなのか？　**君**とはどういうものなのか？”等々．建設的に話を進めるには，我々はだいたい同じ一つのことについて話しているということで意見が一致していなければならない．諸君はいま必要とすることはわかったと思うが，しかしまだ考えなければならぬ微妙なところがあることは忘れてはならない．これについて次に述べる．

微妙なところの一つは，前にもちょっとふれたが，我々がいまその運動を問題としている点というものは，いつもどこかにあると考えられるとしなければならないということである．(もちろん，我々が見ているときには，点はある，しかし目を離したときには，そこにないかも知れない.)原子の運動では，この考えも，成り立たない——原子には目印もなければ，それが動くのを見張っていることもできない．この微妙なところは，量子力学で処理しなければならない．しかし，いま我々は，そのような複雑なことにふれる前に，問題はどんなことであるかということを考えようというのであって，**こうすれば**，最近の考えに従って修正を加えるのもやりやすいというものである．そこで，ここでは時間や空間について単純な見方を採用することにしよう．時間とか空間というものが何であるかは，我々はだいたいわかっている．自動車を運転した人ならスピードとは何であるかがわかっているのである．

8–2　スピード

“スピード”とは何であるか，我々にはだいたいわかってはいるけれども，これには深奥で微妙なところがある．思ってもみたまえ．ギリシャの学者は，速度ということが入って来ると，問題をうまく記述することがどうしてもできなかったのである．“スピード”とは何のことであるかをはっきり理解しようとすると，そこへ微妙なところが顔を出してくるのである．これについて，ギリシャ人は大いに困惑した．そして，ギリシャ，アラビア，バビロニアの幾何学や代数学のほかに，新しい数学分野を考え出さなければならなかった．この困難を示す例として，この問題をただの代数だけでやってみよう：気球がふくらまされていて，その体積は1秒に100 cm^3 の割合でふえるとする；体積が1000 cm^3 であるとき，半径が大きくなるスピードはいくらか？　ギリシャ人はこのような問題に少なからず混乱した．もちろん，特に混乱していた数人のギリシャ人の影響をうけてのことである．スピードという考えに困難があることを示すために，そのころゼノンはたくさんのパラドックスを出してみせた．ここではその一つを取り上げて，運動を考えるときに明らかに困難があるとする彼の観点を示そう．彼はいう．“これから私のいうことによく耳を傾けたまえ：アキレスはカメよりも10倍も速く走るのに，カメに追い付くことは決してできないのです．カメはアキレスよりも100メートルも前のところから同時にスタートして競走するとします．アキレスが100メートル走ってカメがもといたところまで来ると，カメの速さは $\frac{1}{10}$ ですから10メートル進んでいます．カメに追い付くにはアキレスは更に10メートル走らなければなりません．しかしこの10メートルを走り終わったときには，カメはまだ1メートル前にいます．1メートル走れば，カメは10センチ前にいます．このようなことが無限につづきます．ですから，いつまでたっても，カメはいつもアキレスの前にいて，アキレスはカメに決して追付くことができないのです．”これはどこがまちがっているのか？　有限の長さの時間は，無限個の小片にわけることができる．これはちょうど，ある線の長さを半分にし，その半分にしたということをくりかえして無限個の小片にわけることができるのと，同じようなことである．だから(上の話で)アキレスがカメに追い付くのには無限個の段階があるのだけれども，それだからといって**時間**が無限になるということにはならないのである．この例からわかるように，スピードについて議論を進めるときには，いろいろ微妙なところがあるものなのである．

この微妙なところをはっきりさせるために，一つの冗談話をもち出そう．この話は諸君もきいたことがあるにちがいない．女の人の運転する自動車が白バイにつかまった．巡査が彼女のところへやって来て，こういう．“奥さんは時速60マイルで走っていましたね！”彼女はいう．“そんなはずはありませんよ．まだ7分間しか走っていないのですよ．おかしいですね——まだ1時間も走らないのに1時間60マイ

ル走れるはずはないじゃありませんか?" もしも諸君が警官だったら，何と答えるか？ もしも諸君がほんとの警官だったら，微妙なところは何もなく，はなはだ簡単である：こういう．"そんなことは裁判官にいいなさい！" しかし，このいいのがれはないことにして，問題をもっと正直に知的に取り扱い，1時間に60マイルで走っていたということの意味を彼女に説明しようとするとしよう．我々の意味することははたして何なのか？ 我々はこういう．"奥さん，我々がいうのはこういう意味なのです．あなたがいままでどおりに走りつづけていったら，次の1時間に60マイル行くだろうということなのです．" 彼女はいう．"さあ，私はアクセルをふんでいませんでした．車のスピードはだんだんおちていました．ですから今までどおりに走りつづけても，60マイル行くはずはありません．" タマが落ちているところを考えて，"いままでどおりに落ちつづけ" たら，3秒後にその速さはいくらかということを求めようとする．いままでどおりとはどういう意味か——加速をつづけ，速くなりつづけるということをつづける，という意味なのか？ そうではない——同じ**速度**をつづけるという意味なのである．しかしこの速度とは我々がまさにこれから定義しようとしているものではないか！ タマがいままでどおり落ちつづけるということは，タマはいままでどおり落ちつづけるというだけのことである．だから速度のもう少しいい定義が必要である．何が前と同じようにつづくのか？ さっきの女の人はこうもいえる："いままでどおりに1時間走ったら，街のつきあたりの塀にぶつかってしまいますよ！" 我々が意味するところを説明するのは，そんなにやさしいことではないのである．

何かを測定するということが，それを定義する唯一の方法なのだと考えている物理学者もたくさんいる．そうだとすれば，我々はスピードを測る道具——スピードメーター——を使うべきなのは当然であって，そしてこういう．"奥さん，これをごらんなさい．あなたのスピードメーターに60と出ていますよ．" 彼女はいう．"このスピードメーターはこわれていて，まるきり頼りにならないんです．" これは車が動いていなかったということなのか？ スピードメーターをつくる前に，我々はまず測るべきものが何かあると信じているわけである．そうでなければ，例えば "スピードメーターはうまくはたらいていない" とか，"スピードメーターはこわれている" とはいえないはずである．スピードメーターを離れては速度というものは考えられないといったら，これは無意味なことになる．我々の頭の中には，明らかに，スピードメーターを離れて，一つの概念があるのであって，スピードメーターはそのものを測るためのものであるに過ぎない．我々はいう．"あなたのおっしゃるとおり，1時間走らないうちに塀にぶつかってしまうでしょう．しかし1秒走ったら，88フィート進むのですよ；奥さん，あなたは1秒に88フィートのスピードで走っていたのですよ．このままだったら次の1秒に88フィートです．塀のあるのはこれよりは遠くです．" 彼女はいう．"ええ，だけれど，1秒に88フィートで走っ

てはいけないという法規なんかないじゃありませんか！ 1時間に60マイルで走ってはいけないという法規があるだけじゃありませんか．" 我々は答える．"でもこれは同じことですよ．" もしもほんとに同じことで**ある**ならば，この1秒88フィートなどとまわりくどいことをいう必要はなかったはずである．じっさい落ちるタマは速さが変わっているのだから，1秒間といえども落ち方が同じということはありえない．スピードを何とか定義する必要がある．

さて，我々の話は軌道に乗ったようである．話はこうである．車の女の人が $\frac{1}{1000}$ 時間走りつづければ，60マイルの $\frac{1}{1000}$ だけ進むはずである．いいかえれば1時間走りつづけるということはいらない；問題は，**ある瞬間**にこのスピードで走っていたというのは，何のことかということなのである．これの意味は，彼女が時間的にもうちょっと走ったら，その間に走る距離は，1時間に60マイルの**一定の**スピードで走る車の距離と同じであるということである．1秒88フィートという考えは正しい．最後の1秒間に走った距離を88フィートでわってその答が1になるならば，スピードは1時間に60マイルである．すなわち，スピードはこうやればわかるのである：ある非常に短い時間内にどれだけ進むかを求める．その距離を時間でわる．その答がスピードになる．しかし，この時間というのはできるだけ短くなくてはいけないのであって，短ければ短いほどよい．それは，この時間を短くしないと，その間にも何か変化が起こりうるからである．落体で時間を1時間にとったら，話にならない．車の場合には時間を1秒にとればかなりいいだろう．スピードにあまり変化がないからである．しかし落体の場合にはよくない；だから，スピードを正確に求めようとすればするほど，時間としていっそう短いものをとらなくてはならない．我々がなすべきことは1秒の100万分の1をとって，その間に進む距離をこの100万分の1秒でわるということである．その答が秒速になるのであって，これが我々が速度というものである．速度はこうして定義するのである．さっきの女の人に対して，これがいい返答になるというよりは，これがこれから使う定義なのである．

上の定義の中には，一般的の形でギリシャ人にはなかった新しい考えが入っている．それは**微小な距離**とそれに対応する**微小な時間**を考えてその比をつくり，時間を短く短く短くしたら，この比がどうなるかをみるということである．いいかえれば，進んだ距離をそれに要した時間で割って，時間が無限に短く短くなったときの極限を求めるのである．この考えは，ニュートンとライプニッツとによって独立に出されたものであって，**微分学**という数学の新分野のはじまりである．微分学は運動を記述するために発明されたものであって，その第一の応用は，"時速60マイル" で走るというのはどういう意味かということを定義する問題であった．

速度のもう少しうまい定義を述べよう．ある短い時間 ε の間に，自動車か何かの物体が短い距離 x だけ進むとする．そうすれば速度 v の

定義は

$$v = \frac{x}{\varepsilon}$$

である．これは近似であるが ε を小さくとればとるほど近似は高くなる．数学的表現がおのぞみなら，速度とは $\frac{x}{\varepsilon}$ の式で ε が小さく小さくなったときの極限，すなわち

$$v = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x}{\varepsilon} \tag{8.3}$$

であるといえる．さっきの女の人の車については表が不完全なので，これと同じことはできない．我々が知っているのは，1分毎の彼女の位置だけである；あらっぽくいって，第7分目には 5000 フィート/分のスピードで走っていたということはわかっているけれども，ちょうど7分目にスピードが上がっていたのか，6分目のはじめには 4900 フィート/分であったのが，いま 5100 フィート/分か何かになっているのか，中間のことはくわしくはわからない．だから，表に無限にたくさんのことがすっかりのっているときでなければ，それから速度を計算することはできないのである．一方，落体の場合(方程式 8.1)のように，数式がちゃんとわかっていると，どんな任意の時刻に対しても位置が求められるから，速度を計算することができる．

次に一例として，5秒後という特定の瞬間における落体の速度を求めるという問題を考えてみよう．このやり方の一つは，表 8-2 をみて，第5秒目にどうなっていたかを調べるということである．4秒目から5秒目までの1秒間に落体は 400−256=144 フィートだけ落ちた，だからその速度は 144 フィート/秒である，といったらこれは間違いである．それは速さが変わっているからである．この1秒の間隔内の**平均としては**速さは 144 フィート/秒であるが，タマはだんだん速くなって最後には 144 フィート/秒よりも速くなっているのである．**その速さをきちんと**求めよう．そのやり方はこうである．5秒目にタマがどこにいたかはわかっている．5.1 秒には，結局のところ $16(5.1)^2=416.16$ フィート(方程式 8.1 をみよ)のところにいる．5秒までには 400 フィート落ちていた．だからこの最後の 0.1 秒間には，416.16−400=16.16 フィート落ちた．0.1 秒に 16.16 フィートとは，161.6 フィート/秒と同じであるから，これがだいたいの速さである．しかしきちんと正確ではない．この速さというのは，5秒のときの速さか，5.1 秒のときの速さか，それともその中間の 5.05 秒のときの速さか，そもそもいつの速さで**ある**のか？　いやまだまだ――問題は**5秒目という瞬間**の速さを求めることであって，まだそれはわかっていないのである．もう少ししっかりやらなければならない．そこで5秒よりも $\frac{1}{1000}$ 秒だけよけいの，5.001 秒をとり，落ちた距離を計算すると

$$s = 16(5.001)^2 = 16(25.010001) = 400.160016 \text{ フィート}$$

となる，この最後の 0.001 秒にタマは 0.160016 フィート落ちた．この数を 0.001 秒でわれば，速さは 160.016 フィート/秒ということになる．これは前よりもほんとの値に近く，しかもたいへん近いのだけれども，

まだ正確ではない．速さを正確に求めるにはどうしなければならないかは，やっとはっきりした．その数学をやってみるのについて，問題をもう少し抽象的に述べることにしよう：ある指定された時刻 t_0，我々の問題では5秒における速度を求めよ．t_0 における距離 s_0 は $16t_0^2$ で，この場合には400フィートである．速度を求めるためにこう考える．“t_0＋(微小時間)，すなわち $t_0+\varepsilon$ のときには，物体はどこにいるか？” その場所は $16(t_0+\varepsilon)^2=16t_0^2+32t_0\varepsilon+16\varepsilon^2$ である．

前にはそれが $16t_0^2$ だけだったのだから前よりも遠くにまで来ている．この距離を s_0＋(微小距離) あるいは s_0+x (x は増分) とする．t_0 における距離を $t_0+\varepsilon$ における距離からひけば，増分 x がわかる．それは $x=32t_0\varepsilon+16\varepsilon^2$ である．第1近似で速度は

$$v=\frac{x}{\varepsilon}=32t_0+16\varepsilon \qquad (8.4)$$

である．真の速度とは，ε が無視できるくらい小さくなったときこの比 $\frac{x}{\varepsilon}$ のとる値である．いいかえれば，この比をつくってから，ε が小さく小さくなって0に近付いたときの極限をとるのである．方程式は

$$v(t_0\text{における})=32t_0$$

となる．$t_0=5$ 秒だから，答は $v=32\times5=160$ フィート/秒である．数行前で ε を0.1から0.001秒と順にとったが，そのとき v として得られた値は，この真の値よりも少し大きい．ほんとうの値は正確に160フィート/秒である．

8-3 微分係数としての速さ

いまやったような手法は，数学でたびたび出てくるので，便宜のために，この ε や x に独特の記号がついている．この記号では，上に使った ε は Δt であらわし，x は Δs であらわす．この Δt の意味は“t の増分”ということであって，その値をどんどん小さくすることができるという意味が含まれている．前についている Δ は，これを掛けるという意味ではない．ちょうど $\sin\theta$ が s・i・n・θ でないのと同じわけで——時間の増分というだけのことであり，その特性を示しているのである．Δs も s に対して同じような意味をもっている．Δ は因数ではないのだから，$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ で分母分子を約して $\frac{s}{t}$ としてはいけない．それは，$\frac{\sin\theta}{\sin2\theta}$ を約して $\frac{1}{2}$ としてはいけないのと同じことである．この記号では，速度は $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ で Δt が小さくなった極限に等しく，すなわち

$$v=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (8.5)$$

である．実のところ，これは ε と x とを使った前の式(8.3)と同じものであるが，これは何かが変化しており，その変化しているものに注意を向けていることをあらわしているという利点がある．

ところで，ここにもう一つ，近似のいい法則がある．それは，運動している物体の距離の変化は，速度と時間間隔をかけあわせたものに等しく，$\Delta s=v\Delta t$ だというのである．こういえるのは，その時間のあ

いだに速度が変化しないときにのみ限るのであって，この条件は Δt が0に近づく極限においてのみ正しい．物理学者が好んで用いる書き方は，$ds=vdt$ である．非常に小さくなった Δt を dt によって表わすのである：こう約束すればこの式は非常にいい近似で成り立つ．もしも Δt が長すぎると，この時間内で速度も変化するだろうから，近似は悪くなる．dt がゼロに近付けば，正確に $ds=vdt$ である．この記号によれば，(8.5)は次のように書ける．

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}.$$

上に述べた $\dfrac{ds}{dt}$ という量を，"t に関する s の導関数"という．(このいいあらわし方によると，何を変化させたのかがちゃんとわかる.) そしてこれを求めるめんどうな手段を，導関数を求めるとか，微分するとかいう．この言葉になれるためにいってみれば，$16t^2$ という関数の導関数，あるいは，$16t^2$ の(t に関する)導関数は $32t$ であるという．これらの言葉になれると，この考え方がよくわかるようになる．練習のために，もう少し複雑な関数の導関数を求めよう．$s=At^3+Bt+C$ という関数を考える．これがある点の運動をあらわしていると考えてもよい．A, B, C の文字は，定数であって，2次方程式の一般形によく出て来るのと同じことである．この運動の式から出発して，任意のときの速度を求めよう．エレガントな方法で速度を求めるために，t を $t+\Delta t$ に変える．したがって s は $s+$(或る Δs) に変わる；そして Δt を使って Δs をあらわす．すなわち

$$\begin{aligned}s+\Delta s &= A(t+\Delta t)^3+B(t+\Delta t)+C\\ &= At^3+Bt+C+3At^2\Delta t+B\Delta t+3At(\Delta t)^2+(\Delta t)^3\end{aligned}$$

であるが，

$$s=At^3+Bt+C$$

であるから，

$$\Delta s=3At^2\Delta t+B\Delta t+3At(\Delta t)^2+A(\Delta t)^3$$

である．我々が求めるのは Δs ではない，——Δs を Δt でわったものである．上の方程式を Δt でわって

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=3At^2+B+3At(\Delta t)+A(\Delta t)^2$$

が得られる．Δt が0に近付くと，$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ の極限は $\dfrac{ds}{dt}$ であって，それは

$$\frac{ds}{dt}=3At^2+B$$

に等しい．これが関数を微分する計算の基本的な手法である．これはちょっとみるよりもずっと簡単である．ここで注意してほしいのは，これらの展開が Δt の自乗とか3乗とか高次のものを含んでいると，そのような項はまっさきに落としてしまっていいということである．それは極限をとるとそれらは0になってしまうからである．少し練習すれば，どの項を落としてよいかがわかるから，計算はやさしくなる．

いろいろの関数を微分するのには，規則や公式がたくさんある．覚えるのもよし，表をみるのもよしである．簡単な表は表 8-3 に与えてある．

表 8-3　微分係数簡易表
s, u, v, w は t の任意の関数である；a, b, c, n は任意の定数である．

関　数	微 分 係 数
$s=t^n$	$\dfrac{ds}{dt}=nt^{n-1}$
$s=cu$	$\dfrac{ds}{dt}=c\dfrac{du}{dt}$
$s=u+v+w+\cdots$	$\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{du}{dt}+\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{dw}{dt}+\cdots$
$s=c$	$\dfrac{ds}{dt}=0$
$s=u^av^bw^c\cdots$	$\dfrac{ds}{dt}=s\left(\dfrac{a}{u}\dfrac{du}{dt}+\dfrac{b}{v}\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{c}{w}\dfrac{dw}{dt}+\cdots\right)$

8–4　積分としての距離

さて次には，上と逆の問題を考えなければならない．距離の表の代りに，0 からはじめていろいろな時刻における速度の表が与えられているとする．落ちるタマについての速さと時間とは，表 8-4 に示してある．自動車の速度についても，毎分あるいは 30 秒ごとにスピードメーターの読みを書きならべれば，同じような表ができる．このように任意の時刻における，自動車の速さがわかっていたとすれば，それから我々は距離を求めることができるか？ この問題は上に解いた問題のまさに逆である；速度が与えられて，距離を求めることが要求されているのである．

表 8-4
落ちるタマの速度

t(秒)	v(フィート/秒)
0	0
1	32
2	64
3	96
4	128

速度を知って距離を求めるにはどうしたらよいであろうか？ 自動車の速さが一定でなくて，さっきの女の人がある瞬間に時速 60 マイルで走り，それからおそくし，速くし等々であったら，我々は彼女がどれだけ走ったのか，それをどうやって求めることができるだろうか？ これはわけないことである．前と同じ考えを使って，距離を微小なものであらわすのである．まずこうやる．“第 1 秒に彼女の車のスピードはこれこれであった．$\Delta s=v\Delta t$ の式から，そのスピードで行けば第 1 秒にどれだけ走ったかがわかる.” さて第 2 秒には，スピードはほとんど同じだったが，少しはちがっていた．この新しい速さと時間とをかければ，第 2 秒に彼女がどれだけ走ったかがわかる．各秒について同じようにやっておしまいまでいく．こうして小さな距離がたくさん得られるが，車の走った全体の距離は，これらの小さい距離を全部加えた和である．すなわち，全体の距離は速度かける時間の和，すなわち $s=\sum v\Delta t$ である．ギリシャ文字の $\sum$（シグマ）は，和をあらわす．更に正確にいうならば，全体の距離は，ある時刻，たとえば i 番目の時刻における速度に Δt をかけたものの和である．

$$s=\sum_i v(t_i)\Delta t. \tag{8.6}$$

時間の番号のつけ方は，$t_{i+1}=t_i+\Delta t$ である．しかし，この方法によって求めた距離は正しくないこともある．それは，時間間隔 Δt の間にも速度が変わることがあるからである．時間を充分短くとればとるほど，和は正確になる．こうして，時間を短く短くとって，望みの精度に達するのである．真の s は

$$s=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_i v(t_i)\Delta t \tag{8.7}$$

である．数学者はこの極限値をあらわすのに一つの記号を考案した．ちょうど微分をあらわす記号を考案したのと似ている．Δ が d になって，できるだけ短い時間を示している；そして時刻 t における速度を v といい，加算は“大きな s”の字 $\int$（ラテン語の *summa* から）と書く．その後その字の形がかわってきて，今ではただ積分のしるしといわれているが，この名前はどうもあまり感心しない．ともかく

$$s=\int v(t)\,dt \tag{8.8}$$

である．これらの各項を全部加える演算を積分という．これは微分の逆算である．この積分を微分すれば v になる．すなわち d なる演算子は，一方の $\int$ をもとにもどす．微分と積分とは逆なのだから，微分の公式をもってきて，それを逆にみれば，積分の公式になる．だから，あらゆる種類の関数を微分することによって，積分の表をつくることができる．微分の公式をさかさまにすれば，積分の公式になるわけである．

あらゆる関数は解析的に微分することができる，すなわちその演算は代数的に行なわれて，その結果はきまった関数になる．しかし勝手な積分の解析数値を簡単に書き下ろすことはできないのである．諸君が例えば上に述べたような和を求め，Δt の間隔をだんだん小さくして計算し，正しい値に近くなるまでどんどん小さくすれば，それを計算することはできる．しかし，ある一つの関数が与えられたとき，その積分は何であるかを解析的に求めることは，一般には不可能である．それを微分すれば目的の関数になるようなものを求めればよいわけだが，それが見付からないこともあるし，またすでに何々関数という名前のついている関数であらわせないという意味で，それが存在しないということもある．

8–5 加 速 度

運動の方程式をおしひろめていく上に，次にやるべきことは，速度という概念をこえて速度の**変化**という概念にいたる考えを導入することである．そして“速度はどう**変わる**か？”ということを問題とする．前の章で，力が速度変化を生ずるという場合について論じた．止まっているところから動き出して，10 秒フラットで時速 60 マイルになる自動車の話をきいて，これはすばらしい車だと思ったことがあるだろ

う．このようなあらわし方で，速さがどんなにはやく変化するかがわかるのだが，これは平均の話である．そこでもう一段立ち入って速度がどのくらいはやく変化しているかということを問題にする．いいかえれば，速度の変化は1秒たつごとに，1秒について何フィートであるか，すなわち何フィート毎秒毎秒であるかということである．落体の速度の式は $v=32t$ であることは前に求め，表8-4に示してあるが，いま我々が求めようとするのは，1秒間に速度がどれだけ変わるかということである；この量を加速度という．

加速度の定義は，速度が変化する時間的の割合である．前に述べたことに従って我々は加速度を $\dfrac{dv}{dt}$ と書くことができる．これは速度が距離の導関数であるのと同じことである．落体に対する $v=32t$ の式を微分すると

$$a=\frac{dv}{dt}=32 \qquad (8.9)$$

となる．[$32t$ を微分するときに，前の問題で Bt の微分は単に B（定数）であったことを利用する．$B=32$ であるから，$32t$ の微分は直ちに32である．] この意味は，落体の速度はつねに32フィート毎秒毎秒ずつ変化しているということである．表8-4をみても，速度は1秒ごとに32フィート/秒ずつふえていることがわかる．一般には，加速度は一定でないのがふつうであるから，上の例は非常に簡単な場合である．ここで加速度が一定であるのは，落体にはたらく力が一定であるからであって，ニュートンの法則によると，加速度は力に比例するのである．

次の例として，速度について前に解いた問題で，加速度を求めよう．

$$s=At^3+Bt+C$$

から出発して，$v=\dfrac{ds}{dt}$ は

$$v=3At^2+B$$

であった．加速度は速度を時間について微分したものであるから，上の式を微分しなければならない．右辺の2項の微分は，各項の微分の和であることを思い出したまえ．第1項を微分するのに，いちいちもとの根本手法に立ち戻らないで，前に $16t^2$ という2次の項を微分したことを思い出す．やり方は数値係数を2倍にして，t^2 を t にかえるのであった．こんどの場合もそうであるとしよう．諸君は自分で験算してみるとよい．$3At^2$ の微分は $6At$ である．つぎに定数項 B を微分するのだが，前に述べた規則によってそれは0である．したがって，この項は加速度に何の影響も与えない．最後の結果は $a=\dfrac{dv}{dt}=6At$ である．

なお参考のために，積分によって得られる，非常に有用な式二つを述べておこう．一つの物体が静止の状態から一定の加速度 g で動くとすると，任意の時刻 t における速度 v は

$$v=gt$$

で与えられる．この時間内に動く距離は

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

である．導関数を書くのに，いろいろな数学的記号がある．速度は $\dfrac{ds}{dt}$ であり，加速度は速度を時間について微分したものであるから，

$$a=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)=\frac{d^2s}{dt^2} \tag{8.10}$$

と書ける．これが2階の導関数のふつうの書き方である．

速度は加速度を積分したものに等しい．これは $a=\dfrac{dv}{dt}$ のまさに反対である．前にみたとおり，距離は速度の積分であるから，加速度を2回積分すれば距離になる．

上の議論では，運動は1次元に限った．ページ数の関係で3次元の運動については簡単にふれるだけに止める．粒子Pを考えて，これが3次元に勝手な運動をしているとする．この章のはじめに，自動車が走っている1次元の場合を論じたが，そのとき，いろいろな時刻に自動車が出発点からどのくらいの距離にいるかを観測するということからはじめた．そしてこの距離が時間と共にどう変わるかということで速度を論じ，そしてまた速度がどう変わるかということで加速度を論じた．3次元の運動も同じように取り扱うことができる．まず運動を2次元の図に書いて考え，その考えを3次元に拡張するのが簡単であろう．互いに直交する2軸を考えて，任意の時刻における粒子の位置をきめるのには，それがこの2軸のおのおのからどれだけの距離だけ離れているかを測る．おのおのの位置は，x-距離と y-距離によって与えられ，両方の距離を時間の関数として与える表をつくれば，これによって運動が記述されるのである．(これを3次元に拡張するには，この2軸に直角な軸をもう一つ考えて，3番目の z-距離を測るだけでよい．このとき距離は座標軸からでなく，座標面から測る．) x-距離と y-距離の表ができたら，速度を求めるにはどうしたらいいか？　まず各方向における速度の成分を求める．速度の横成分，すなわち x 成分は，x-距離を時間で微分したもの，すなわち

$$v_x=\frac{dx}{dt} \tag{8.11}$$

である．同様に，速度の縦成分，すなわち y 成分は

$$v_y=\frac{dy}{dt} \tag{8.12}$$

である．第3番目の方向では

$$v_z=\frac{dz}{dt} \tag{8.13}$$

である．

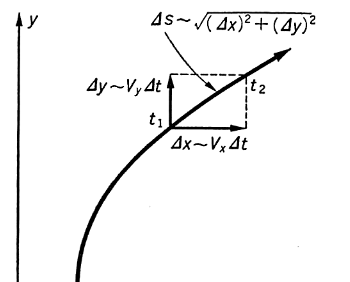


図8-3　2次元における物体の運動の記述とその速度の計算

さて，速度の成分が与えられたとき，現実の途に沿った速度を求めるにはどうしたらよいか？　2次元の場合に，粒子の相次ぐ二つの位置を考え，その二つの間の距離 Δs も小さく，またそのあいだの時間 $t_2-t_1=\Delta t$ も小さいとする．時間 Δt の間に，この粒子が横に動く距

離は $\Delta x \sim v_x \Delta t$ であり，縦に動く距離は $\Delta y \sim v_y \Delta t$ である．（"$\sim$" という記号は"ほとんど等しい"と読む.）実際に動いた距離は，図 8-3 に示すとおり近似的に

$$\Delta s \sim \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \tag{8.14}$$

である．この間隔内における速度の近似値を求めるには，この章のはじめに述べたように，これを Δt でわって，Δt を 0 に近付ければよい．

よって速度として

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2} \tag{8.15}$$

が得られる．

3 次元の場合の結果は

$$v = \sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2} \tag{8.16}$$

である．

速度を定義したのと同じように，加速度も定義される．加速度の x 成分 a_x は，速度の x 成分 v_x を微分したもの（すなわち，$a_x=\dfrac{d^2x}{dt^2}$ で，x を時間について 2 度微分したもの）であり，他の成分についても同様である．

1 平面内で起こる組合せ運動のいい例を挙げよう．タマが水平方向には一定の速度 u で動き，それと同時に鉛直方向には一定の加速度 $-g$ で下に落ちる；このときタマはどんな運動をするか？ $\dfrac{dx}{dt}=v_x=u$ である．速度 v_x は一定であるから，

$$x = ut \tag{8.17}$$

であり，下むきの加速度 $-g$ も一定であるから，タマの落ちる距離 y は次のように書ける．

$$y = -\frac{1}{2}gt^2. \tag{8.18}$$

この途はどんな形の曲線か，すなわち，y と x との間にはどんな関係があるか？ $t=\dfrac{x}{u}$ であるから，方程式(8.18)から t を消去することができる．このおきかえをやると

$$y = -\frac{g}{2u^2}x^2 \tag{8.19}$$

となる．y と x との間にあるこの関係は，運動するタマの途の方程式とみることができる．この方程式をプロットすると，放物線とよばれる曲線になる．任意の方向に投げ出されて自由に落下する物体は，図 8-4 に示したような放物線をえがくのである．

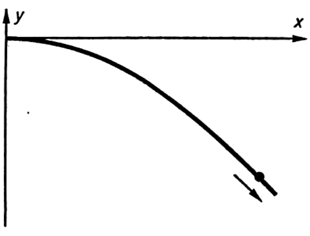


図 8-4 初速度が水平である場合に落体がえがく放物線

第9章

ニュートンの力学法則

9-1 運動量と力

力学の法則，すなわち運動の法則の発見は，科学の歴史上において，劇的な事件であった．ニュートン以前には，惑星のようなものの運動は一つの神秘であった．しかしニュートン以後，この運動は完全に理解されるようになった．他の惑星の影響によって，ケプラーの法則から僅かなはずれが生ずるが，それさえも，計算することができるようになった．ニュートンの法則が打ち立てられてから後は，振子の運動，バネとおもりから成る振動子の運動等々も，完全に解明することができるようになったのである．この章もやはりまさにそうなのである：この章までのところでは，バネのおもりの運動を計算することはできなかった．いわんや，木星や土星が天王星にどんな擾乱を及ぼすか，などということはとても計算することはできなかった．しかし，この章がおわれば，我々はおもりの振動に限らず，木星や土星によって天王星に生ずる擾乱も，計算できるように**なっていたいものである！**

ガリレオが**慣性の原理**を発見したことは，運動を理解する上の一大進歩であった．一つの物体が孤立していて外から擾乱を受けていなければ，はじめ動いていたものは直線に沿って一定の速度で動きつづけ，はじめ止まっていたものは止まりつづけるというのがこの原理である．もちろんこれは現実には決して起こりそうにない．例えば積木を机の上ですべらせれば，それはもちろん止まってしまう．しかしこれは積木が外界から孤立して**いない**で，机をこすっているからである．現実を超越して正しい法則を発見するには，やはり想像が必要なのであって，この想像がガリレオによって与えられたというわけであった．

何かが物体に影響を与えて**いる**とき，その速さはどう**変わる**か．これを求めるための規則が次に当然必要である．この規則を与えたのが，ニュートンの業績である．ニュートンの法則といわれるものは三つある：第1法則は上に述べたガリレオの慣性の原理の再述にすぎない．第2法則は，**力**と称せられるものの影響によって，物体の速度がどう変わるかを求める手段を与えるものである．第3法則は，力についてある程度述べているのであるが，これは別の機会に論ずる．ここで論ずるのは，第2法則だけであって，それは力によって物体の運動が変わるのは次のとおりだというのである：“運動量と称せられる量が時間的に変化する割合は力に比例する．”すぐにこれを数学的に述べるが，まずこの考えの内容を説明しておこう．

運動量と**速度**とは同じではない．物理学には言葉がたくさんある．同じ言葉で日常語でははっきりしていないものでも，物理学ではすべてはっきりした意味をもっている．運動量というのもその一例であって，我々はその意味をはっきり定義しなければならない．我々が軽いものを手でおしたとすると，それはわけなく動く；日常語でそれよりもずっと重いといわれるものを同じ強さでおすと，その動きはおそい．ほんとのことをいうと，“軽い”とか“重い”という言葉を使う代りに，質量が**小さい**とか**大きい**とかいう言葉にしなければならない．それは，ある物体の**重さ**とその**慣性**との間には，差違があることを忘れてはならないからである．（あるものを動かすことの難易と，その重さとは別のことである．）重さと慣性とは比例し，地球の表面では同じ数値をとることが多い．これが学生諸君に混乱をおこさせる原因になる．火星へ行ったとすると，重さは変わるけれども，慣性に打ち勝つに要する力の量は変わらない．

我々が**質量**という言葉を使うのは，慣性の大小を量的にあらわすためである．例えば物体を円に沿ってある速さでふりまわし，そのときどれだけの力がいるかということによって，その質量を測ることができる．このようにして，我々はあらゆるものはなにがしかの質量をもっていることを知る．さてある物体の**運動量**とは，二つのものの積である：二つのものとは**質量**と**速度**である．そこでニュートンの第2法則を，数学的に書けばこうなる；

$$F=\frac{d}{dt}(mv). \tag{9.1}$$

ここに考えるべきことがいくつかある．このような法則を書きおろすときに，我々は直感的な考え，含み，仮定などをいくつも使って，はじめはそれが我々の“法則”の中に漠然と取り入れられている．後になって我々は立ち戻って，おのおのの言葉のはっきりした意味をくわしく考えなければならなくなるのではあるが，あまり早くからそれをやると混乱してしまう．だから，はじめはいくつかのことを当然のこととして受け入れてしまうことにしよう．第一に，物体の質量は**一定**であるとする；実は一定ではないのだが，ニュートンの近似から出発することとして，質量は一定，つねに同じであり，そのうえ二つの物体をいっしょにすると質量はおのおのの質量の**和になる**とする．ニュートンがその方程式を出したとき，これらの考えが暗黙のうちに含まれていたことはいうまでもない．そうでなかったら方程式は無意味である．例えばもしも質量が速度に逆比例するということでもあったとしよう；そのときはどんな場合でも運動量は決して**変化せず**，速度によって質量がどう変わるかが解っていない限り，この法則は無意味である．だからまず第一に我々は，**質量は変化しない**としよう．

力というものについても暗黙のうちに了解されているものがある．あらっぽい近似として，力というと，我々の筋肉でおすとかひくとかいうことの一種だと考える．しかし，我々は運動の法則を知ったのだ

から，もっと正確な定義を与えることができる．いちばん大切なことは，この関係が運動量や速度の**大きさ**の変化に関係するばかりでなく，その**むき**の変化にも関係するということである．質量が一定ならば，方程式(9.1)は

$$F=m\frac{dv}{dt}=ma \tag{9.2}$$

とも書くことができる．加速度は速度が時間的に変化する割合であって，ニュートンの第2法則のいうところは，一つの力の影響が質量に逆比例するということだけでなく，速度変化の**むき**と力の**むき**とは同じであるというのである．だから，速度の変化とか加速度とかいうものは，日常語として使われているよりもひろい意味をもっていることを承知しなければならない：運動している物体の速度を変えるには，スピードアップしたりスローダウン(スローダウンのときは負の加速度があるという)してもできるし，またその運動の方向を変えてもできる．速度に直角な加速度については，第7章で論じた．そこでわかったように，半径Rの円に沿って，ある速さvで運動している物体は，tが小さいとすれば，接線の直線から$\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{R}\right)t^2$だけはずれ落ちる．だから運動に直角にはたらく加速度の式は

$$a=\frac{v^2}{R} \tag{9.3}$$

であって，速度に直角な力がはたらくと，物体の途は曲線になり，その曲率半径を求めるには，その力を質量でわって加速度を計算し，次に(9.3)を使えばよい．

9-2　速さと速度

我々の使う言葉をより厳密にするために，**速さ**と**速度**という言葉の使い方をもう一つ定義をしておこう．ふつう我々は，速さと速度とは同じものだと思い，日常語では同じものになっている．しかし物理学では，ここに言葉が二つあるということを利用して，二つの概念を区別するような使い方をすることにしている．速度には大きさとむきとがある．速さは，その大きさをあらわすだけでむきは考えない．このように速度と速さとをはっきり区別する．一つの物体のx, y, z座標が時間によってどう変化するかを記述することによって，この点の運動をより厳密に取り扱うことができる．例えば一つの物体が，ある時刻に，図9-1に示すような運動をしているとする．短い時間Δtだけたつと，この物体はx方向にΔx，y方向にΔy，z方向にΔzの距離だけ動く．これらの三つの座標の変化をみなあわせると，それは，$\Delta x, \Delta y, \Delta z$を3辺とする直方体の対角線に沿った$\Delta s$という変位になる．速度との関係をいうならば，速度のx成分にΔtをかけたものが変位Δxである．$\Delta y, \Delta z$についても同様である：

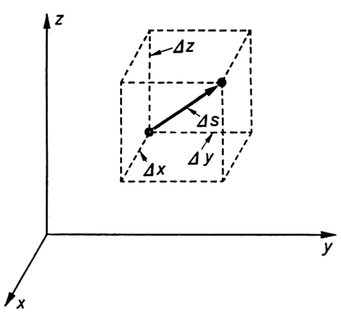


図9-1　物体の微小変位

$$\Delta x=v_x\Delta t,\quad \Delta y=v_y\Delta t,\quad \Delta z=v_z\Delta t. \tag{9.4}$$

9-3 速度，加速度，力の成分

方程式(9.4)においては，考えている物体が x 方向，y 方向，z 方向にどのくらい速く運動しているかを示すことによって，**速度を成分にわけた**のである．速度の直角成分の数値が与えられれば，速度の大きさもむきも完全にきまる：

$$v_x = \frac{dx}{dt},\quad v_y = \frac{dy}{dt},\quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{9.5}$$

一方，この物体の速さは

$$\frac{ds}{dt} = |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{9.6}$$

である．

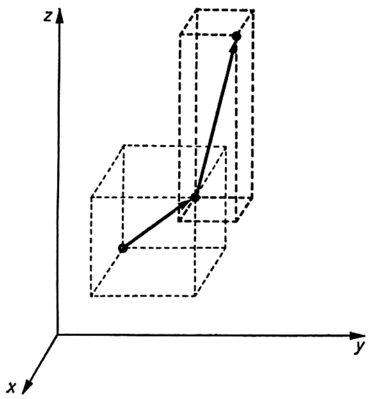


図 9-2 速度の大きさもむきもかわる場合

次に，力がはたらいているので，速度のむきと大きさとが図 9-2 に示すとおりに変わったとしよう．このちょっとめんどうな事態も，次のようにすれば，簡単に調べられる．すなわち，速度の x, y, z 成分の変化をみればよいのである．速度の x 方向の成分が，時間 Δt の間に変化するのは，$\Delta v_x = a_x \Delta t$ であって，a_x は加速度の x 成分と称するものである．同様に，$\Delta v_y = a_y \Delta t$，$\Delta v_z = a_z \Delta t$ である．こう考えると，力のむきと加速度のむきとが同じだというニュートンの第 2 法則は，実は三つの法則であって，x, y, z 方向の力の成分は，質量に，速度の対応する成分の変化の割合をかけたものになる：

$$\begin{aligned} F_x &= m\left(\frac{dv_x}{dt}\right) = m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = ma_x,\\ F_y &= m\left(\frac{dv_y}{dt}\right) = m\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = ma_y,\\ F_z &= m\left(\frac{dv_z}{dt}\right) = m\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = ma_z. \end{aligned} \tag{9.7}$$

速度や加速度は，その大きさとむきとを一つの線分であらわして，それを三つの座標軸に投影して，その成分にわけた．これと同じように，あるむきにはたらく力も，x, y, z 方向の次の成分によってあらわす：

$$\begin{aligned} F_x &= F\cos(x, F),\\ F_y &= F\cos(y, F),\\ F_z &= F\cos(z, F). \end{aligned} \tag{9.8}$$

ここに F は力の大きさであり，(x, F) は x 軸と力のむきとの間の角をあらわす．$(y, F), (z, F)$ についても同様である．

ニュートンの第 2 法則は方程式(9.7)で完全に与えられる．一つの物体にいくつもの力が同時にはたらいているときには，それらの力を x, y, z 成分に分解すれば，これらの方程式からこの物体の運動を求めることができる．簡単な例を考えよう．y 方向にも z 方向にも力ははたらいていないで，力は x 方向，たとえば上下方向だけにはたらいているとする．方程式(9.7)によれば，速度変化のあるのは上下方向だけであって，水平方向にはない．このことは第 7 章(図 7-3 を見よ)に述べた仕掛けによって，明らかに示される．落体は，水平には何の変

化もなく運動するが，上下方向の運動は，水平方向の運動がゼロであったときと同じである．いいかえれば，力の各成分の間に何か関係がない限り，x, y, z 方向の運動は独立なのである．

9-4　力とは何か？

ニュートンの法則を使うためには，力のはたらき方がわかっていなければならない；ニュートンの法則は，**力に注目せよ**という．もしも一つの物体に加速度があるなら，何かがはたらいているのである；それを求めよというわけである．これから力学をやっていくのに，まず必要なのは**力の法則を求めること**である．ニュートン自身も二,三の例を説いている．引力の場合にニュートンは特定の式を与えた．また他の力の場合には，ニュートンはその第3法則で一部分述べている．これは作用と反作用とが等しいということに関するのであって，このことは次の章で取り扱う．

前の例を拡張して次の問題を考えよう．地球の表面の近くでは物体にどんな力が働いているか？　地球の表面の近くでは，引力による上下方向の力はその物体の質量に比例していて，地球の半径 R にくらべて高さが小さいところでは，高さによって変わらない：$F=\dfrac{GmM}{R^2}=mg$ であって，$g=\dfrac{GM}{R^2}$ は**重力の加速度**といわれるものである．よって，引力の法則によれば，重さは質量に比例するということになる；力は上下方向であって，質量に g をかけたものである．また，水平方向の運動の速度は一定である．面白いのは上下方向の運動で，ニュートンの第2法則によれば，

$$mg = m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) \tag{9.9}$$

である．両辺の m を約すと，x 方向の加速度は一定で，g に等しいことがわかる．もちろんこれは重力による落体運動として有名な法則であって，これから

$$\begin{aligned} v_x &= v_0+gt, \\ x &= x_0+v_0t+\frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \tag{9.10}$$

という式が出てくる．

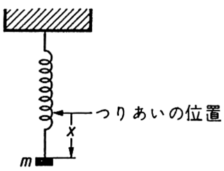


図 9-3　バネにつるしたおもり

また別の例として，図 9-3 のような仕掛けをつくって，距離に比例した力が変位と逆方向にはたらくようにすることができたとする――つまりバネである．重力は，バネのはじめののびで帳消しになっていることはいうまでもないから，これを無視して，**余分の**力だけを考えることにする．おもりを下にひっぱるとバネはそれを上にひっぱる，またおもりを上におし上げるとバネは下におしかえす．この仕掛けは，おもりをたくさん上げれば上げるほど力は大きく，つりあいの状態からの変位に正確に比例するようになっているとする．また同様に上むきの力もおもりをどれだけ下にひっぱったかに比例する．この装置の運動をみると，上,下,上,下,… というなかなかきれいなものである．

問題は，ニュートンの方程式によってこの運動は正しく記述されるか？ということである．そこでニュートンの法則(9.7)を使って，この周期的振動の運動を正確に計算することができるかどうかを調べよう．この場合，方程式は

$$-kx = m\left(\frac{dv_x}{dt}\right) \tag{9.11}$$

である．x 方向の速度変化の割合が x に比例するのである．いろいろの定数をそのまま残しておいても何の得にもならないから，時間の尺度が変わったとしてもいいし，あるいは単位がどうかしたと考えてもいいが，ちょうど $\frac{k}{m}=1$ になったとする．そこで

$$\frac{dv_x}{dt} = -x \tag{9.12}$$

という方程式を解くことになる．これから先へ進むには v_x がどんなものであるかを知らなければならない．もちろん速度は位置の変化の割合である．

9–5　運動方程式の意味

方程式(9.12)はそもそも何を意味しているのかを考えてみよう．与えられた時刻 t に，物体の速度は v_x で，位置は x であるとする．時間がちょっとたって $t+\varepsilon$ になったとき，速度は何で，位置は何であるか？　この問に答えられるならば，この問題はとけたことになる．何故ならば，こうすればはじめの与えられた条件から出発して，第一の瞬間，次の瞬間，次の瞬間等々に運動がどう変わっていくかを計算することができ，こうしてだんだんと運動を追跡していくことができるのである．具体的にいって，時刻 $t=0$ で，$x=1, v_x=0$ という条件が与えられたとする．さてそもそも何故この物体は運動するのか？　それは $x=0$ 以外の任意の位置では，それに**力**がはたらいているからである．$x>0$ ならば力は上に向いている．だからはじめゼロの速度は，運動の法則に従って変わりはじめる．動きはじめて速度が生じはじめると，この物体は上に進む．いま，任意の時刻 t において，ε が小さいとすれば，t における位置と速度とから，時刻 $t+\varepsilon$ における位置を求めることができる．

$$x(t+\varepsilon) = x(t) + \varepsilon v_x(t) \tag{9.13}$$

であって，この近似は非常にいい．ε が小さければ小さいほど，この式は正確であるが，ε が無視できるほど小さくなくても，この式はかなり正確で使いものになる．その後の速度，すなわち時刻 $(t+\varepsilon)$ における速度を求めるためには，速度がどう変化するか，すなわち加速度を知らなければならない．では加速度を求めるにはどうすればよいか？　ここに運動方程式が入って来る．力学の法則は加速度が何であるかを教える．それによれば，(9.12)から加速度は $-x$ であるから，

$$v_x(t+\varepsilon) = v_x(t) + \varepsilon a_x(t) \tag{9.14}$$

$$= v_x(t) - \varepsilon x(t) \tag{9.15}$$

である．方程式(9.14)は単に運動学であって，加速度のために速度が変わるということを述べているにすぎない．しかし，方程式(9.15)は**力学**であって，加速度を力に結び付けているのである；そして，この問題で，この時刻においては，加速度を $-x(t)$ でおきかえていいといっているのである．したがって，ある与えられた時刻における x と v とがわかっていれば，加速度がわかり，それによって次の速度がわかり，次の位置がわかる——これが我々のやり方である．速度は力によって少し変化し，位置は速度によって少し変化するのである．

9-6　運動方程式の数値解法

さてこの問題を実際に解いてみよう．$\varepsilon=0.100$ 秒ととる．すっかりやってみて，これではまだ充分小さくないことがわかったら，もとにもどって $\varepsilon=0.010$ 秒としてやり直さなければならないかも知れない．$x(0)=1.00$ という初期値から出発したら，$x(0.1)$ は何であろうか？それは，前の位置 $x(0)$ に速度(ゼロ)かける 0.10 秒をたしたものである．だからまだ動きはじめていないで，$x(0.1)$ はまだ 1.00 である．しかし 0.10 秒における新速度は，旧速度 $v(0)=0$ に，加速度の ε 倍を加えたものである．加速度は $-x(0)=-1.00$ である．よって

$$v(0.1)=0.00-0.10\times1.00=-0.10$$

である．0.20 秒では

$$\begin{aligned} x(0.2)&=x(0.1)+\varepsilon v(0.1)\\ &=1.00-0.10\times0.10=0.99,\\ v(0.2)&=v(0.1)+\varepsilon a(0.1)\\ &=-0.10-0.10\times1.00=-0.20 \end{aligned}$$

である．こういうことを順々につづけていけば，その後の運動を計算することができ，また我々はそれをやるべきなのである．しかし，実際問題としては，ちょっとしたうまい手があって，それを使うと精度を増すことができる．上にやりはじめたような計算をつづけていくと，$\varepsilon=0.100$ 秒があらかったので，運動がきちんときまらないのである．そして非常に小さい時間間隔，例えば $\varepsilon=0.01$ をとらなければならないことになる．そうすると，そうとうの時間の間の運動を調べるには，計算を何回も何回もたくさんくりかえさなければならないことになる．そこで $\varepsilon=0.10$ 秒という前と同じのあらっぽい時間間隔を使って，しかも計算の精度を増すようなやり方を考えよう．計算の手法にうまい改良を加えると，これができるのである．

物体の新位置は，旧位置に，時間間隔 ε かける速度を加えたものである．しかしその速度とは**いつの**速度か？　この時間間隔の始めと終りとでは速度がちがう．我々の改良というのは，**中間**の速度を使うことなのである．現在の速度はわかっているといっても，それは変化しているのだから，現在の速度と同じ速度を使ったら，正しい答にはならない．“現在”の速さと，時間間隔の終りの“そのとき”の速さとの間の速さをとるべきである．速度についても同じ考えがあてはまる：

速度の変化を計算するには，速度を求めるべき二つの時刻の中間における加速度を使うべきである．だから我々が実際に使う方程式は次のようなものになる：後の位置は，前の位置たす，**間隔の中央時刻における**速度の ε 倍である．同様に，この中間点における速度は，ε だけ前(一つ前の間隔の中央)の速度たす，時刻 t における加速度の ε 倍である．すなわち，次の方程式を使うのである．

$$\begin{aligned} x(t+\varepsilon) &= x(t)+\varepsilon v\left(t+\frac{\varepsilon}{2}\right), \\ v\left(t+\frac{\varepsilon}{2}\right) &= v\left(t-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\varepsilon a(t), \\ a(t) &= -x(t). \end{aligned} \tag{9.16}$$

まだ一つ小さい問題が残っている：$v\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ は何か？　一番はじめに与えられているのは $v(0)$ であって，$v\left(\frac{-\varepsilon}{2}\right)$ ではない．計算を始めるにあたっては，特に $v\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=v(0)+\frac{\varepsilon}{2}a(0)$ という方程式を使うのである．

表 9-1
$dv_x/dt=-x$ の解　間隔：$\varepsilon=0.10$ 秒

t	x	v_x	a_x
0.0	1.000	0.000	−1.000
		−0.050	
0.1	0.995		−0.995
		−0.150	
0.2	0.980		−0.980
		−0.248	
0.3	0.955		−0.955
		−0.343	
0.4	0.921		−0.921
		−0.435	
0.5	0.877		−0.877
		−0.523	
0.6	0.825		−0.825
		−0.605	
0.7	0.764		−0.764
		−0.682	
0.8	0.696		−0.696
		−0.751	
0.9	0.621		−0.621
		−0.814	
1.0	0.540		−0.540
		−0.868	
1.1	0.453		−0.453
		−0.913	
1.2	0.362		−0.362
		−0.949	
1.3	0.267		−0.267
		−0.976	
1.4	0.169		−0.169
		−0.993	
1.5	0.070		−0.070
		−1.000	
1.6	−0.030		+0.030

さて我々の計算を遂行する準備ができた．便宜のため，計算は表でやることにする．表 9-1 に示すように，それには時間，位置，速度，加速度の欄を設け，また速度には中間の行をつくっておく．このような表は，(9.16)の連立方程式から得られる数値を書き込んでいくための便宜のものであって，方程式そのものを書く必要はない．表の空欄を一つ一つ埋めていくだけでよいのである．この表から運動の様子がよくわかる：静止の状態から出発する，上向き(負)の小さい速度を得る，つりあいの点からの距離が少し減る．そうすると加速度は少し減るが，速さは大きくなる．やがて速さの増加はだんだんゆっくりになり，およそ $t=1.50$ 秒で $x=0$ を通るときまでは，運動をつづけることは確かである．それから後は物体は反対側に来る；位置 x は負になり，したがって加速度は正になる．こうして速さは小さくなる．図 9-4 のように，表の値と $x=\cos t$ という関数とをくらべてみると面白い．我々の計算の精度，小数以下 3 桁目まで一致している！　$x=\cos t$ が我々の運動方程式の厳密な数学的解であることは後に述べることにするが，上のような簡単な計算でこんな精密な結果が出るというのは，数値解法の威力をよく示す例である．

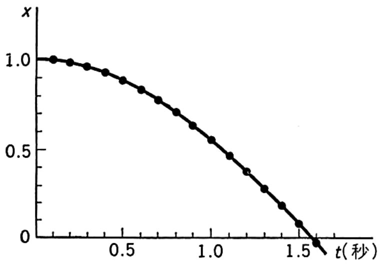


図 9-4　バネにつるしたおもりの運動のグラフ

9-7　惑星の運動

上に述べた計算は，振動バネの運動についてはたいへんうまくいったが，太陽のまわりを惑星がまわる運動にもあてはまるだろうか？　近似的に，楕円軌道が出てくるかどうかを調べてみよう．太陽の質量は無限大であるとする，という意味は，太陽の運動は考えに入れないということである．一つの惑星がある位置から出発し，ある速度で動いているとする．惑星はある曲線に沿って太陽のまわりをまわるが，ニュートンの運動の法則と引力の法則とを使って，これがどんな曲線であるかを調べてみよう．どうやればよいか？　ある与えられた瞬間に，惑星は空間のどこかにいる．太陽からこの点までの動径距離を r とすれば，内むきにはたらく力は，引力の法則によって，太陽の質量と惑星の質量とをかけ，距離の自乗でわったものにある定数をかけたものである．これを更に進めるためには，この力によって生ずる加速度が何であるかを求めなければならない．x および y という二つの方向に沿った加速度の**成分**が必要である．ある与えられた時刻に惑星のいる位置を x と y とで与えれば，(z 方向には力がはたらいていないから，z は常にゼロであるとする．また初速度 v_z もないから，z がゼロ以外のものになる理由はない.) 力は惑星と太陽とを結ぶ直線の方に向くことは図 9-5 に示すとおりである．

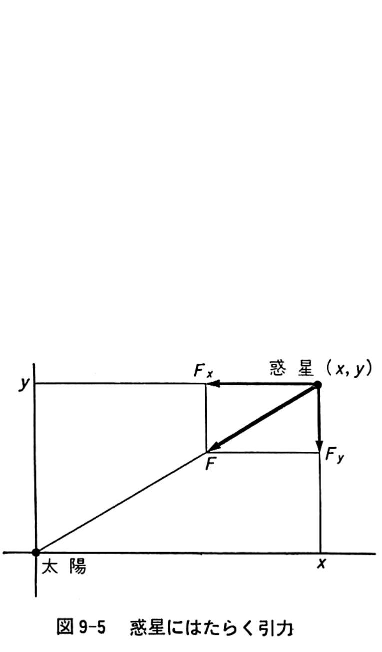


図 9-5　惑星にはたらく引力

この図からわかるように，二つの三角形は相似であるから，力の水平成分が全体の力に対する割合は，水平距離 x が全体の斜辺に対する割合に等しい．さらに，x が正ならば，F_x は負である．すなわち，$\dfrac{F_x}{|F|}=\dfrac{-x}{r}$，あるいは $F_x=\dfrac{-|F|x}{r}=\dfrac{-GMmx}{r^3}$ である．そこで力学法則によれば，この力の成分は，惑星の質量を，x 方向の速度変化の割合

にかけたものである．よって次の法則が得られる：

$$m\left(\frac{dv_x}{dt}\right)=\frac{-GMmx}{r^3},$$
$$m\left(\frac{dv_y}{dt}\right)=\frac{-GMmy}{r^3}, \tag{9.17}$$
$$r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

さて我々はこの連立方程式を解かなくてはならない．計算を簡単にするために，前と同じように，時間の単位か太陽の質量かをかえて，$GM\equiv 1$ になるように加減してある（あるいは偶然にそうなっている）とする．この例では，惑星の初めの位置は $x=0.500$，$y=0.000$ で，初めの速度は y 方向だけで，その大きさは 1.6300 であるとする．さて計算はどうやるか？　やはり前と同じように表をつくり，時間，x 位置，x 速度 v_x，x 加速度 a_x の欄を設ける．二重線の反対側には，y 方向の位置，速度，加速度の 3 欄を設ける．加速度を求めるために，方程式 (9.17) が必要になる．それは x 方向の加速度は $\frac{-x}{r^3}$ であり，y 方向の加速度は $\frac{-y}{r^3}$ であり，r は x^2+y^2 の平方根であるというのである．だから，x と y とが与えられても，わきでちょっと計算してその自乗の和の平方根をとって r を求めて，加速度の両成分を計算する準備をしておかなければならない．これは $\frac{1}{r^3}$ を求めるのにも役に立つ．この計算は，自乗，3 乗，逆数の表を使えばやさしくできる．あとは x と $\frac{1}{r^3}$ とのかけ算であるが，これは計算尺でできる．

時間間隔は $\varepsilon=0.100$ にとって，計算は次のようにやる．$t=0$ のときの初期値：

$$x(0)=0.500,\qquad y(0)=0.000,$$
$$v_x(0)=0.000,\qquad v_y(0)=+1.630.$$

これから次のことがでる：

$$r(0)=0.500,\qquad \frac{1}{r^3}(0)=8.000,$$
$$a_x=-4.000,\qquad a_y=0.000.$$

そこで，速度 $v_x(0.05)$ と $v_y(0.05)$ を計算する：

$$v_x(0.05)=0.000-4.000\times 0.050=-0.200;$$
$$v_y(0.05)=1.630+0.000\times 0.100=1.630.$$

ここで我々の計算の主要部分がはじまる：

$$x(0.1)=0.500-0.20\times 0.1=0.480,$$
$$y(0.1)=0.0+1.63\times 0.1=0.163,$$
$$r=\sqrt{0.480^2+0.163^2}=0.507,$$
$$\frac{1}{r^3}=7.67,$$
$$a_x(0.1)=-0.480\times 7.67=-3.68,$$
$$a_y(0.1)=-0.163\times 7.67=-1.250,$$
$$v_x(0.15)=-0.200-3.68\times 0.1=-0.568,$$
$$v_y(0.15)=1.630-1.26\times 0.1=1.505,$$

表 9-2

$dv_x/dt=-x/r^3$, $dv_y/dt=-y/r^3$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$ の解　間隔：$\varepsilon=0.100$

軌道 $t=0$ で $v_y=1.63$, $v_x=0$, $x=0.5$, $y=0$

t	x	v_x	a_x	y	v_y	a_y	r	$1/r^3$
0.0	0.500		−4.00	0.000		0.00	0.500	8.000
		−0.200			1.630			
0.1	0.480		−3.68	0.163		−1.25	0.507	7.675
		−0.568			1.505			
0.2	0.423		−2.91	0.313		−2.15	0.526	6.873
		−0.859			1.290			
0.3	0.337		−1.96	0.442		−2.57	0.556	5.824
		−1.055			1.033			
0.4	0.232		−1.11	0.545		−2.62	0.592	4.81
		−1.166			0.771			
0.5	0.115		−0.453	0.622		−2.45	0.633	3.942
		−1.211			0.526			
0.6	−0.006		+0.020	0.675		−2.20	0.675	3.252
		−1.209			0.306			
0.7	−0.127		+0.344	0.706		−1.91	0.717	2.712
		−1.175			0.115			
0.8	−0.245		+0.562	0.718		−1.64	0.758	2.296
		−1.119			−0.049			
0.9	−0.357		+0.705	0.713		−1.41	0.797	1.975
		−1.048			−0.190			
1.0	−0.462		+0.796	0.694		−1.20	0.834	1.723
		−0.968			−0.310			
1.1	−0.559		+0.858	0.663		−1.02	0.867	1.535
		−0.882			−0.412			
1.2	−0.647		+0.90	0.622		−0.86	0.897	1.385
		−0.792			−0.499			
1.3	−0.726		+0.92	0.572		−0.72	0.924	1.267
		−0.700			−0.570			
1.4	−0.796		+0.93	0.515		−0.60	0.948	1.173
		−0.607			−0.630			
1.5	−0.857		+0.94	0.452		−0.50	0.969	1.099
		−0.513			−0.680			
1.6	−0.908		+0.95	0.384		−0.40	0.986	1.043
		−0.418			−0.720			
1.7	−0.950		+0.95	0.312		−0.31	1.000	1.000
		−0.323			−0.751			
1.8	−0.982		+0.95	0.237		−0.23	1.010	0.970
		−0.228			−0.773			
1.9	−1.005		+0.95	0.160		−0.15	1.018	0.948
		−0.113			−0.778			
2.0	−1.018		+0.96	0.081		−0.08	1.021	0.939
		−0.037			−0.796			
2.1	−1.022		+0.95	0.001		0.00	1.022	0.936
		+0.058			−0.796			
2.2	−1.016		+0.96	−0.079		+0.07	1.019	0.945
					−0.789			
2.3								

2.101 秒のとき x 軸をよぎった，∴　周期＝4.20 秒

2.086 秒のとき　$v_x=0$

1.022 で x をよぎる，∴　長半径$=\dfrac{1.022+0.500}{2}=0.761$

$v_y=0.796$

予測時刻 $\pi(0.761)^{3/2}=\pi(0.663)=2.082$

$$x(0.2)=0.480-0.568\times 0.1 \fallingdotseq 0.423,$$
$$y(0.2)=0.163+1.50\times 0.1=0.313,$$
等々.

このようにして表 9-2 の値が得られ，20 段階くらいで，太陽のまわりを惑星が半まわりするのを追跡したことになる！ 図 9-6 は，表 9-2 に与えられた x, y 座標をプロットしたものである．点は，時間の単位の $\frac{1}{10}$ ごとの位置を示す；この図からわかるように，惑星の運動ははじめは速く，終りはゆっくりである．そしてこれで曲線の形がきまる．このように，惑星の運動を計算するにはどうやるかが，**たしかに**わかったわけである．

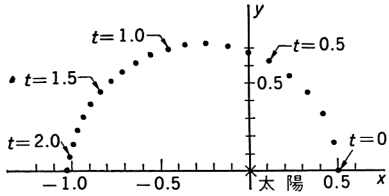


図 9-6 太陽のまわりをまわる惑星の運動(計算値)

次に，海王星，木星，天王星その他の惑星の運動を計算するにはどうやるかを考えよう．惑星が非常にたくさんあったとすれば，太陽もまた動くが，そんな場合にも，上と同じように計算できるだろうか？ もちろんできる．例えば i 番目の惑星で($i=1$ は太陽，$i=2$ は水星，$i=3$ は金星など)その位置が x_i, y_i, z_i であるものを考えれば，それにはたらく力を計算する．それにはすべての惑星の位置を知らなければならない．一つの惑星にはたらく力は，x_j, y_j, z_j にある他のすべての惑星による．それ故，方程式は

$$\begin{aligned} m_i\frac{dv_{ix}}{dt} &= \sum_{j=1}^{N} -\frac{Gm_im_j(x_i-x_j)}{r_{ij}^3}, \\ m_i\frac{dv_{iy}}{dt} &= \sum_{j=1}^{N} -\frac{Gm_im_j(y_i-y_j)}{r_{ij}^3}, \\ m_i\frac{dv_{iz}}{dt} &= \sum_{j=1}^{N} -\frac{Gm_im_j(z_i-z_j)}{r_{ij}^3} \end{aligned} \qquad (9.18)$$

である．r_{ij} は惑星 i と惑星 j との間の距離であって，

$$r_{ij}=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2} \qquad (9.19)$$

である．また $\sum$ はすべての j について加えあわせるという意味である——もちろん $j=i$ は除く．だから我々のなすべきことは，欄の数をふやす，**たくさん**ふやすということである．木星の運動に 9 欄，土星の運動に 9 欄等々が必要である．すべての惑星のはじめの位置とはじめの速度とがわかっていれば，まず方程式(9.19)を使ってすべての距離を計算し，次に方程式(9.18)からすべての加速度を計算することができる．しかしそれをやるのに，どれだけ時間がかかるか？ うちでやったら，とても長くかかる．しかし今日ではこういう算術を非常にはやくやる機械がある：非常にいい計算機は一つの和を求めるのに，マイクロセカンド，すなわち 1 秒の 100 万分の 1 ですむ．一つのかけ算をするにはもう少しかかるが，まず 10 マイクロセカンドとしよう．問題にもよるが 1 段階の計算のなかにかけ算が 30 くらいあるとすれば，1 段階の計算に 300 マイクロセカンドかかる．ということは，1 秒間に 3000 段階できるということである．精度を例えば 10 億分の 1 とするためには，一つの惑星が太陽のまわりを 1 まわりするのに対して 4×10^5 段階を要する．この計算時間は 130 秒，すなわちおよそ 2

分ということになる．この方法によれば，他のすべての惑星の影響を考えに入れ，かつ10億分の1の精度としても，木星が太陽のまわりをまわる運動を追跡するのにたった2分しかかからない！（誤差は時間間隔 ε の自乗に比例するということになる．だから間隔を $\frac{1}{1000}$ にすれば，精度は100万倍になる．間隔を1万分の1にすればなおよい.）

前にいったように，この章をはじめたときには，どうやってバネのおもりの運動を計算するのかということさえ知らなかった．しかし今は，ニュートンの法則というすばらしい武器によって，そんな簡単な運動ばかりでなく，算術をやってくれる機械がありさえすれば，惑星のおそろしく複雑な運動でも望みのとおりの高い精度で計算することができるのである！

第10章 運動量の保存

10-1 ニュートンの第3法則

ニュートンの運動の第2法則は，任意の物体の加速度とそれにはたらく力との間にある関係を述べたものであるが，運動に関する問題ならばどんなものでも，この法則を基礎にして，原理的には解くことができる．例えば粒子の数が少ないときには，前章で述べた数値的の方法を使って，その運動を求めることができる．しかし，もう少し立ち入ってニュートンの法則をよく調べておくことが望ましい．それは第一に，数値的方法だけでなく数学的方法で直接に解ける簡単な問題があるからである．例えば，落体の加速度は32フィート/秒^{2}であることはわかっているから，このことからその運動を数値的に解くことができるけれども，それよりも，この運動をしらべて，$s=s_0+v_0t+16t^2$という一般解を求める方がずっと簡単だし，またずっとよいのである．同じように，調和振動子の問題も，数値計算で求められるけれども，その一般解はtの余弦関数であることを証明することもできる．簡単でもっと正確な解法があるのに，いちいち前のようなめんどうな算術をする必要はない．一つの惑星が引力によって太陽のまわりをまわる運動についても同じことである．第9章の数値的方法によって，1点1点計算することができて，軌道の概観もわかるのだけれども，軌道の正確な形は完全な楕円であるということが数学的に求められればなお結構ではないか．

しかし残念なことには，数学的にきちんと解けるという問題の数は極めて限られている．例えば調和振動子のバネの性質が複雑で，力が変位に比例しないということになると，数値的方法にたよらざるをえない．また，惑星の問題で，太陽のまわりをまわっているものが二つで，太陽を含めて全体で三つあるということになると，数学的には簡単な式にならないので，実際には数値的に解かなければならない．これが有名な三体問題であって，長い間人間の数学能力に挑戦してきたのであった：数学の力には限度があり，数値的方法を使わなければ駄目だということをさとるまでには，ずいぶん長い年月がかかった．これは注目すべきことである．今日では，数学的には解けないでも，数値的に解けている問題の数はたくさんある．

三体問題も，従来はとても解けないと考えられていたのだけれども，今では，前章で述べたのと全く同じように，算術をたくさんやるという方法によって，頭を使わないで，いわば機械的に，解が求められて

いるのである．しかし数学的方法でも，数値的方法でも，どちらでもうまくいかないという場合もある：簡単な問題は数学で解ける，かなりむずかしい問題は数値的算術的な方法で解ける．しかし非常に複雑な問題となると，どちらの方法でも解けない．非常に複雑な問題というのは，例えば2台の自動車の衝突というようなことである．あるいは気体分子の運動というようなことである．気体の1 mm^3 の中には，粒子が数えきれないくらいたくさんある．変数がこんなにたくさん(およそ 10^{17}——10億の1億倍)あるのに，これを計算しようなどとするのは全くばかばかしいことである．気体だとか，鉄のかたまりだとかいうものの中の分子や原子の運動，球状星団の中にある無数の星の運動——こういう問題は，太陽のまわりを惑星が二つか三つまわっているのとはちがって，とてもまともに解くわけにはいかないから，何か別の方法を考え出さなければならない．

このように，くわしいところにまで立ち入ることができないような場合には，ニュートンの法則から出てくる何か一般的の定理とか原理というようなものを知っておく必要がある．その一つは，エネルギー保存の原理であって，これについては第4章で述べた．もう一つは，運動量保存の原理であって，これがこの章の主題である．ここで運動学に更に立ち入るのには理由があるのであって，その一つは，いろいろ事情がちがっていても，ある同じ運動形式がしばしばあらわれてくるということである．そこで，ある一つの例をとってこれらの形式を調べておくのがよいと思われる．例えば衝突の問題である．衝突の種類はちがっても，それには共通な面がたくさんある．また液体の流れを考えるときに，その液体の物質が何であっても大したちがいはなく，流れの法則はどれでも同じようなものである．振動の問題もそうであって，特に，音，棒の振動等の力学的波動は同じようなものである．

ニュートンの法則を論じたときに，これは“力に注意しろ”という段取りのようなものであって，ニュートン自身も力の本質については二つのことしかいっていないということを述べておいた．引力の場合については，ニュートンはちゃんと力の法則を与えている．原子間のように非常に複雑な力がはたらいている場合には，その力がどんな法則に従うかということについては，ニュートンは何の知識ももっていなかった；しかし彼は一つの法則，力の一般的性質の一つを発見した．これが，すなわちその第3法則に述べられているものなのである．そしてこれが力の本質についてニュートンの知識のすべてであった．——引力の法則とこの原理だけであり，それ以上立ち入ったものはなかったのである．この原理とは

作用と反作用とは等しい

というのである．

その意味は次のようなことである．ここに小さな物体，例えば粒子，が二つあるとして，第1の粒子がある力でおして，第2の粒子に力を及ぼしているとする．このとき，ニュートンの第3法則によれば，第

2の粒子も同じ力で第1の粒子を反対のむきにおすのである．そしてそのうえ，これらの力は同じ直線に沿ってはたらくというのである．これがニュートンの出した仮説あるいは法則ともいうべきものである．これはかなり正確ではあるが，厳密には正確でないようである．(このくいちがいのことは後に述べる.) さしあたり，作用と反作用とが等しいということはほんとであるとしておこう．いま第3の粒子があって，その位置が二つの粒子を結ぶ直線上ではないとする．このとき，上の法則は，第1の粒子にはたらく全力が第2の粒子にはたらく全力と等しいといっているのでは**ない**ことはいうまでもない．それは，第3の粒子が，第1の粒子にも第2の粒子にもそれぞれ力を及ぼしているからである．けっきょく第1の粒子と第2の粒子にはたらいている全力の方向はまた別であって，一般には，この二つの大きさが等しくむきが反対だというのではない．しかし，おのおのの粒子にはたらいている力はいくつかにわけて考えられるのであって，関係する他のそれぞれの粒子によるそれぞれの寄与なり部分なりというものがある．そこで粒子を二つずつ対にして考えれば，その間の相互の作用に相当する部分は，大きさが等しく，むきが反対だというのである．

10–2　運動量の保存

さて上に述べた関係からどんな大切な結果が出てくるだろうか？ 簡単のために粒子がたった二つしかなく，互いに力を及ぼしあっているとする．そしてその質量は同じでなくてもよく，(1)と(2)という番号をつけておこう．この二つの粒子の間の力は大きさは等しく，むきは反対である．その結果としてどういうことになるか？ ニュートンの第2法則によると，力とは運動量が時間的に変化する割合である．だから粒子(1)の運動量の時間的変化の割合は，粒子(2)の運動量の時間的変化の割合の符号を反対にしたものに等しいということになる．すなわち

$$\frac{dp_1}{dt}=-\frac{dp_2}{dt} \qquad (10.1)$$

である．もしも**変化の割合**がいつも大きさが等しくて符号が反対であるならば，粒子(1)の**運動量の全変化**は，粒子(2)の**運動量の全変化**と大きさが等しく，符号が反対である．だから，粒子(1)の運動量と粒子(2)の運動量との和をとれば，互いに及ぼしあう力(内力という)によってそれが変化する割合は，ゼロであるということになる；すなわち

$$\frac{d(p_1+p_2)}{dt}=0 \qquad (10.2)$$

である．ここでは，これ以外に力はないとしている．この和が変化する割合がいつもゼロであるというのは，いいかえれば，(p_1+p_2)という量は変化しないということである．(p_1+p_2は，$m_1v_1+m_2v_2$とも書くことができ，これを二つの粒子の**全運動量**という.) 二つの粒子の間に

どんな相互作用がはたらいていても，その全運動量は変化しないという結果が得られたわけである．これは，すなわち，この実例における運動量保存の法則である．二つの粒子の間にはたらいている力がどんな種類のものであっても，またそれがどんな複雑なものであっても，力がはたらく前と後とで運動量の和，$m_1v_1+m_2v_2$ を測るか計算するかすれば，それは同じ値になる．すなわち全運動量は一定であるというのが，我々の結論である．

もう少し話が複雑になって，粒子が三つ以上ある場合に議論をおしひろめても，内力が問題となる限り，すべての粒子の全運動量は一定で変化しないことは明らかである．そのわけは，一つの粒子の運動量が他の粒子の影響によって増したとすれば，それは第1の粒子の影響によって生ずる第2の粒子の運動量の減少でちょうど帳消しになるからである．すなわち，すべての内力は打ち消しあうので，したがって粒子の全運動量を変化させることはできないのである．外界からはたらく力(外力)がないならば，全運動量を変化させることのできる力はなく，したがって全運動量は一定である．

粒子間の相互作用以外の力がはたらいたら，どんなことがおこるか．これは重要で問題である：いま互いに作用を及ぼしあっている粒子だけをとり出したと考えよう．相互作用だけしかないならば，上に述べたように，その力がどんな複雑なものであっても，粒子の全運動量は変化しない．しかし，このとり出した粒子群以外の粒子から来る力もあると考えてみよう．外界にある物体が内部にある物体に及ぼす力を**外力**という．後に示すように，すべての外力の和は，内部にある全粒子の全運動量の変化の割合に等しい．これはたいへん有用な定理である．

相互作用を及ぼしあっている粒子がたくさんあって，外力ははたらいていないとき，その全運動量の保存をあらわす式は，

$$m_1v_1+m_2v_2+m_3v_3+\cdots=\text{一定} \tag{10.3}$$

である．粒子の質量とその速度とには，1, 2, 3, 4, … と番号がつけてある．ニュートンの第2法則の一般式

$$f=\frac{d}{dt}(mv) \tag{10.4}$$

は，おのおのの粒子に対して，任意の方向における力の**成分**と運動量の**成分**とに対して成立する；すなわち，一つの粒子にはたらく力の x 成分は，その粒子の運動量の変化の割合の x 成分に等しい，すなわち

$$f_x=\frac{d}{dt}(mv_x) \tag{10.5}$$

であり，y 方向，z 方向でも同様である．だから方程式(10.3)は実は三つの方程式であって，おのおのの方向について方程式が一つずつあるのである．

運動量保存の法則以外に，ニュートンの第2法則から出てくる大切な原理がもう一つある．これの証明は後にゆずり，ここではその内容

を述べるだけにしておく．この原理というのは，我々が静止していても，あるいはまた一直線の上を一様な速さで動いていても，物理学の法則は同じであるということである．例えば，飛行機の上でマリをついている子供からみると，マリは地面でついているときと同じようなはずみ方をするのである．飛行機は非常な速度で飛んでいるのだけれども，その速度が変化しない限り，この子供にとっては，法則は，飛行機がとまっているときと同じにみえるのである．これがいわゆる**相対性原理**である．ここではこれを"ガリレオの相対性"ということにする．これはアインシュタインの，より周到な考えと区別するためであって，それについては後に述べる．

さて我々は，ニュートンの法則から運動量保存の法則を導いたのであるが，ここから進んで，特に衝突現象を記述する法則を求めることもできるのである．しかしここでは全く別な見地からこの問題を論じてみよう．これは一つにはいろいろのことをやってみるためである．また，一つには，例えばニュートンの法則を知らないで，他のやり方をするような場合に，物理学ではどんな話のすすめ方をするかということの例とするためである．我々の議論の基礎は，上に述べたガリレオの相対性であって，これから出発して結局運動量保存の法則が出て来るのである．

まず，我々が一つの現象をみるのに，ある一定の速さで運動しながらみても，静止しているときにみても，自然は同じにみえるというところから出発する．二つの物体がぶつかっていっしょにくっついてしまうとか，ぶつかってはずんで離れるとかいう問題を論ずる前に，こんなことを考えよう．二つの物体がバネか何かでつながっていたのが，それが急にはずれて自由になり，バネの力，あるいは小さな爆発の力ではなれると考える．更に運動は一方向だけに沿って起こるとする．まずこの二つの物体は全く同じであって，きれいな対称形をしているとして，この二つの物体の間で小さな爆発がおこったとする．爆発が起こると，一方の物体は，例えば右の方へ速度 v で動く．このときもう一方の物体は速度 v で左に動くと考えられる．これは，この二つの物体が同じようなものであるから，右とか左とかどちらかが優先する理由はないからであって，二つの物体の運動は何か対称的なものになるであろう．これは多くの問題において非常に有用な考え方の一例であって，式からはじめただけでは，この有難味はわからない．

この二つの等しい物体の速さは互いに等しいというのが，我々の実験の第一の結果である．次に二つの物体はちがう物質，例えば銅とアルミニウムからできているが，その**質量**は等しいとする．そこで，こんどはこの物質は同じではないが質量は等しい二つの物体で実験したとき，その速度は等しかったと仮定しよう．ここでこういう反対が出るかも知れない："ちょっと待った，それは逆にいえることなので，**仮定する**必要はない．この実験で二つの物体が等しい速度を得るということを，二つの質量が等しいということの**定義にする**ことができる

のではないか”．そのとおりである．そこでこれに従ってこういうことをしてみる．こんどは銅と非常に大きいアルミニウムのかたまりとの間で小さい爆発を起こす．アルミニウムのかたまりは非常に重いのでビクともしないが，銅はとんでいってしまう．これではアルミニウムが多すぎた．そこでこんどはアルミニウムの分量を減らして，非常に小さな粒だけにする．そうすると爆発が起こるとアルミニウムはとんでいってしまい，**銅**はビクともしない．これではアルミニウムが少なすぎた．中間にちょうどよいところがあるにちがいない；そこで分量を加減して，速度が等しくなるようにまでやる．よろしい――ここで話を逆にして，速度が等しいとき質量は等しいということにしよう．これは単なる定義にすぎないようにみえる．そしてまた，物理法則が単なる定義に書きかえられるというのは大切なことである．しかし実はここにも物理法則は入っているのであって，この等質量の定義を採用すれば，次のようにして一つの法則が直ちに出てくるのである．

前の実験からAとB(銅とアルミニウム)の二つの物体の質量が等しいことがわかったとして，第3の物体，例えば金，を上と同じようにして銅とくらべ，その質量が銅の質量と等しいことを確かめたとする．さて次にアルミニウムと金とで実験したとしたときには，**これら**の質量が等しくなければならぬということは論理的にはいえないのである；しかし**実験**によれば，これらの質量は実際には等しいのである．そこで，実験によって，一つの新しい法則が得られたのである．この法則はこういえるだろう：二つの質量がそれぞれ第3の質量に等しいならば(この実験では速度の等しいことによって確かめたが)，この二つの質量は互いに等しい．(**数学的な**量に関する仮定として同じようなことが述べられているが，上のことはそれから出てくるものでは決して**ない**.) この例からわかるように，我々が不注意だととかく物事を早急に結論しがちのものなのである．速度が等しいときに，質量が等しいというのは，決して単なる定義ではない．何故ならば，質量が等しいというからには，等しいということの数学的法則を思わせるのであって，これが実験についての予測につらなるのである．

第二の例として，ある強さの爆発を起こす実験によって，ある速度を与えてみて，AとBとが等しいということがわかったとしよう．それなら爆発を強くしたら，こんど得られる速度も同じだとしてよろしいか，よろしくないか？　ここでも論理からこの問題を決定する何物もない．しかし実験によれば**よろしい**のである．そこで次のような法則が得られる：ある一つの速度のところで，同じ速度であるということによって二つの物体の質量が等しいということがわかったならば，他の速度で測っても質量は等しい．これらの例からわかるように，単に定義であるとしかみえないものも，実は物理法則を含んでいるのである．

これからの議論では，質量の等しい物体の間で爆発を起こすと，その速度は大きさは等しくむきは反対であるとして話を進めよう．更に

運動のむきが逆の場合については，他の仮定をおく．二つの同じ物体が同じ速度で反対のむきに動いていたのが衝突して，ノリか何かでくっついたら，衝突後に全体としてどちらへ動くか？ この場合も対称であって，右も左もどちらが優先するということはないから，全体として静止すると仮定する．更に，物質がちがっている二つの物体でも質量が等しければ，同じ速度で反対のむきに運動していたのが衝突してくっつくと，衝突の後には静止してしまうと考える．

10-3 運動量は保存する！

上にのべたいろいろの仮定は，実験によってこれを立証することができる：第一に，質量の等しい二つの物体が静止していて，その間で爆発が起こって間がはなれるときには，同じ速さではなれる，第二に，質量の等しい二つの物体が同じ速さで近付いてきてくっつけば，それは静止するということである．この実験をやるには，摩擦を逃れるために，空気溝*というすばらしい発明を利用する．この摩擦というものはガリレオをたえず悩ましたものである(図10-1)．ガリレオは物体をすべらせて実験することができなかった．それは物体が自由にすべってくれなかったからである．しかしうまくちょっと工夫を加えると今日では摩擦を逃れることができるのである．そしてガリレオがいったとおり物体は一定の速度で，どんどん平気ですべっていく．物体が空気で支えられてこうなるのである．空気自身の摩擦は非常に小さいから，外力がはたらかない限り物体はほとんど一定の速さですべるのである．まず二つの滑りブロックをつくり，注意してその重さ，すなわち質量を同じにする．(実際に測るのは重さであるが，重さが質量に比例することはわかっている．) そして，その二つの間に筒をおき，その中に小さな爆薬キャップを入れる(図10-2)．ブロックを線路の中央に静止させて，電気スパークでキャップを爆発させ，二つをはなさせる．どんなことが起こるはずだろうか？ はなれてとんでいくときの速さが同じならば，線路のはじに届くのは同時であるはずだ．はじに届くと両方ともほとんど同じ速度で逆方向にはねかえり，またいっしょになって始めのところで止まる．これはなかなかいい検証である；実際にやってみると，その結果はまさに上に述べたようになる(図10-3)．

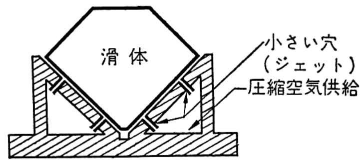


図 10-1 直線状空気溝を端からみたところ

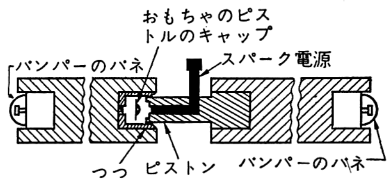


図 10-2 爆発筒をつけた滑体を横からみたところ

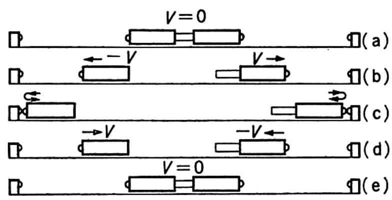


図 10-3 等質量による作用反作用実験の模式図

もう少し簡単でない場合にはどんなことが起こるか．質量の等しいものが二つあって，一方は速度 v で運動し，他方は静止していて，それが衝突してくっつくとする；どんなことがおこるだろうか？ 最後には全体として質量 $2m$ のものがあるわけだが，その動く速度はまだわからない．その速度はどのくらいであろうか？ これが問題である．この答を求めるためにこういう仮定をする．すなわち，自動車に乗っていてその上からみても，あるいは静止しているままでみても，物理

* H. V. Neher and R. B. Leighton, Amer. Jour. of Phys. **31**, 255(1963).

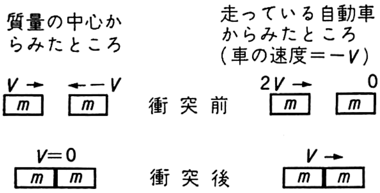


図10-4　等質量の非弾性衝突の二つの見え方

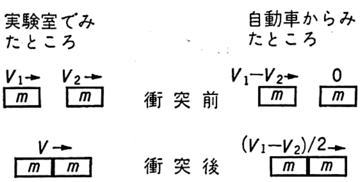


図10-5　また別の等質量の非弾性衝突の二つの見え方

は，同じにみえるというのである．そして二つの相等しい質量が反対のむきに同じ速さで走っているとき，それが衝突すると，ピッタリ静止するという知識から出発する．こういう現象が起こっているとき，我々は自動車に乗って $-v$ という速度で走っているとする．そうしたら，この現象はどのように目にうつるか？　我々は互いに近付いている二つのもののうちの一方と同じ速度で動いているのだから，それの速度はゼロであるようにみえる．しかしもう一方の質量は，速度 v で逆に運動しているのだから，$2v$ の速度でむかって来るようにみえるだろう(図10-4)．そして衝突後は二つの質量はいっしょになって速度 v で遠ざかっていくようにみえるだろう．だから我々の結論はこうなる．速度 $2v$ のものが，それと質量が等しくて静止しているものに衝突すると，その最後の速度は v になるというのである．数学的にはこれと全く同じであるが，速度 v の物体が，静止しているものにぶつかってくっつけば，その速度は $\dfrac{v}{2}$ になる．衝突前の質量と速度とをかけて加えると，$mv+0$ で，衝突後は全体の $2m$ と $\dfrac{v}{2}$ とをかけると，やはり同じ答になることに注意してほしい．これで，速度 v の質量が静止しているものにぶつかったとき，何事が起こるかがわかった．

これと全く同じようにして，質量の等しい二つの物体が，それぞれ勝手な速度でぶつかるとき，何事が起こるかを求めることができる．

質量の等しいものの速度をそれぞれ v_1, v_2 とし，これが衝突してくっつくとする．衝突後の速度 v は何か？　ここでも我々は，速度 v_2 の自動車にのっているとするから，一方のものは静止してみえる．もう一方のものの速度は v_1-v_2 とみえ，前と同じようなことになる．すべてのことが終わると，自動車からみて $\dfrac{1}{2}(v_1-v_2)$ で動く．それならば，地面に対する実際の速さは何か？　それは $v=\dfrac{1}{2}(v_1-v_2)+v_2$ すなわち，$\dfrac{1}{2}(v_1+v_2)$ である(図10-5)．ここでも

$$mv_1+mv_2=\frac{2m(v_1+v_2)}{2} \tag{10.6}$$

となっていることに注意する．

このように，この原理を使うと，どんな衝突でも，二つの相等しい質量が互いにぶつかってくっつくときの現象を取り扱うことができる．これまでは1次元の問題だけを考えてきたのだけれども，我々の乗っている自動車がある斜めの方向に進んでいると考えれば，もっとずっと複雑な衝突についても，いろいろのことがわかるのである．原理は同じであるが，ことがらはだいぶ複雑になる．

速度 v で運動している物体が，それと質量が等しくて静止している物体に衝突すると，全体の速度が $\dfrac{v}{2}$ になるかどうかを実験的にためすために，例の空気溝の仕掛けを利用して次のような実験をすることができるだろう．線路に質量の等しい物体三つをおき，そのうちの二つはくっつけ，その間に爆薬筒をつけておく．第3の物体はこれのすぐそばにおくが，少しすきまをあけておき，ベタベタしたものをぬっておいて，他の物体がそれにぶつかると，くっついてしまうようにし

ておく．さて，爆発の直後には，質量 m のものが二つ，大きさは同じで反対の速度 v で運動している．それから時間がちょっとたつと，そのうちの一つが第 3 の物体に衝突して質量 $2m$ のものとなり，速度 $\frac{v}{2}$ で動くだろう．はたして $\frac{v}{2}$ であるかどうかをためすには，どうすればよいか？　はじめ質量を線路の上にならべるときに，両端までの距離を同じにしないで，2:1 の比にしておく．だから速度 v で運動しつづける第 1 物体は，第 2 物体と第 3 物体とがいっしょにくっついているものとくらべて，同じ時間に 2 倍の距離を動かなければならない（第 2 物体が第 3 物体に衝突するまでの小さな距離を考えに入れて）．質量 m と質量 $2m$ とは同時にはじに届くべきであるが，やってみると確かにそうなる（図 10-6）．

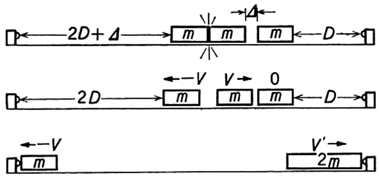


図 10-6　質量 m 速度 v の物体が質量 m 速度ゼロの物体にあたると質量 $2m$ 速度 $\frac{v}{2}$ になることを示す実験

次に取り扱ってみようという問題は，二つの質量がちがっていたら，どんなことが起こるかということである．m の質量と $2m$ の質量とをとり，例の爆発をやらせる．そのときには，何事が起こるか？　もしも，爆発によって m が速度 v で動くとしたら，$2m$ の方の速度は何であろうか？　上にやった実験で，第 2 物体と第 3 物体とのすきまをゼロにしてやってみる．そうすると，結果は同じで，m と $2m$ の速度は，それぞれ v と $\frac{v}{2}$ である．だから m と $2m$ との間の直接作用は，二つにわけてまず m と m との間に対称的な作用があり，次に m と第 3 物体 m との間に衝突が生じてくっついたと考えるのと同じ結果になる．更にそのうえ，m と $2m$ とは，線路のはじから，（近似的に）大きさは同じで逆むきの速度でかえって来て，互いにくっつくようになっているならば，そこでピッタリ静止するのである．

さて次の問題はこうである．質量 m で速度 v のものが質量 $2m$ で静止しているものにぶつかって，くっついたとしたら何事が起こるか？　ガリレオの相対性原理を使えば，これに答えるのは，極めてやさしい．上に述べた衝突を，速度 $\frac{v}{2}$ で走っている自動車からみさえすればいいのである（図 10-7）．自動車からみれば，それぞれの速度は

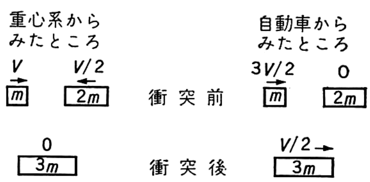


図 10-7　m と $2m$ との非弾性衝突の二つの見え方

$$v_1' = v - v(\text{自動車}) = v + \frac{v}{2} = \frac{3v}{2},$$

$$v_2' = -\frac{v}{2} - v(\text{自動車}) = -\frac{v}{2} + \frac{v}{2} = 0$$

である．衝突の後には，質量 $3m$ は，自動車からみれば $\frac{v}{2}$ で動くようにみえる．これで答が得られた．すなわち，衝突前後の速度の比は 3:1 である：質量 m の物体が，質量 $2m$ で静止している物体に衝突すると，全体がくっついて，$\frac{1}{3}$ の速度で動くのである．一般的に，やはり，質量と速度との積の和はいつも同じだということになる：すなわち $mv+0$ は，$3m$ かける $\frac{v}{3}$ に等しい．こうやって我々は一歩一歩，運動量保存の定理をだんだんに築き上げているのである．

いままでの話は，1:2 であった．同じような論法を使って，1:3，2:3 等々の結果を予測することができる．2:3 の場合で，はじめ静止しているのは，図 10-8 に示してある．

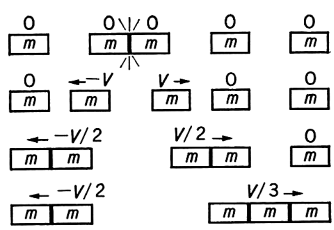


図 10-8　$2m$ と $3m$ との間の作用と反作用

どんな場合でも，第1の物体の質量かけるその速度，たす第2の物体の質量かけるその速度は，最終の全質量かけるその速度に等しい．つまりこれらはみな運動量保存の例である．こうして，簡単な対称的な場合からはじめて，より複雑な場合に対する法則を示したわけだ．事実，質量の比がどんな有理数であってもこのとおりにやれるのであって，どんな比でも有理数比に近いのだから，どんな比でも思うとおり精密に取り扱うことができる．

10-4　運動量とエネルギー

上に述べたのはすべて物体が衝突してくっつくとか，はじめくっついていたのがあとで爆発によって離れるというような簡単な場合であった．しかし物体がいっしょになってもくっつか**ない**場合もある．例えば，質量の等しい物体二つが同じ速さで衝突して，はねかえるというような場合である．ちょっとの間は，この二つの物体は，接触していて圧縮しあっている．圧縮が極大の瞬間には，両方とも速度はゼロで，バネをちぢめたように，この弾性体にエネルギーが蓄えられている．このエネルギーは，衝突前に物体がもっていた運動のエネルギーから来たものであって，その運動エネルギーは速度がゼロになった瞬間にゼロになる．しかし運動エネルギーが失われるのは，瞬間的のことである．圧縮の状態というのは，爆発によってエネルギーを放出するキャップに似ている．そして，爆発の一種ともいうべきようにすぐ圧縮がもどり，二つの物体は離れてとび去る．しかも，二つの物体は同じ速さでとび去るということをすでに我々は知っている．しかしこの反撥の速さは，はじめの速さよりも，小さいのが一般である．それは，物質の種類によって，すべてのエネルギーが爆発に使えるとは限らないからである．もしもその物質がパテだったら，運動エネルギーはすっかりなくなってしまうだろう．しかし，もう少しかたいものだと，ある量の運動エネルギーが戻って来るのがふつうである．衝突の際に，運動エネルギーの残りは熱や振動のエネルギーになる——物体は熱くなり，振動している．振動のエネルギーは間もなく熱になってしまう．鋼のように非常に弾性的な物質で衝突体をつくり，またバネバンパーを注意して設計すれば，衝突によって熱や振動をほとんど生じないようにすることができる．このような場合には，反撥の速度は，はじめの速度とほとんど等しい；このような衝突を**弾性**衝突という．

弾性衝突の**前**と**後**とで速度が等しいというのは，運動量保存の問題ではなく，**運動エネルギー**保存の問題である．しかし対称的衝突後の物体の反撥速度が**互いに**等しいというのは，運動量保存の問題である．

物体の質量がちがっていても，はじめの速度がちがっていても，あるいは弾性の程度がいろいろであっても，我々は同じようにしてその衝突の問題を取り扱い，終局の速度や運動エネルギーの消滅を求めることができる．しかしここでこれらの現象に深入りすることはやめる．

弾性衝突が特に大切なのは，内部に“歯車も円輪もその他の部品”

もないような系の問題である．このときには，衝突が起こっても，エネルギーをたくわえるところがどこにもない．何故ならば，物体は衝突したときと全く同一の状態で離れ去るからである．だから，非常に単純な物体の間では，衝突はつねに弾性衝突か，またはそれに非常に近いものである．例えば，気体内における原子や分子の衝突は完全に弾性衝突であるといわれている．これは非常によい近似ではあるけれども，そのような衝突でさえも**完全な**弾性衝突ではないのである．もしも完全衝突であったとしたら，気体からエネルギーが光や熱の形になって出て来ることの説明がつかない．気体の衝突では，低エネルギーの赤外線が出ることがある．もっともこれは珍らしいことで，出るエネルギーも非常に小さい．だから，たいていの目的には，気体内の分子の衝突は，完全に弾性的であると考えられる．

興味ある一例として，質量の等しい二つの物体の**弾性**衝突を考えよう．二つが同じ速さでやって来てぶつかったならば，対称性から考えて，それは同じ速さで遠ざかるであろう．次に条件を変えて，一方が速度 v で運動し，他方は静止しているとしよう．何事が起こるだろうか？ このことは前に調べた．対称的な衝突を，一方の物体と同じ速度で走っている自動車からみる．そうすれば，静止している物体にそれと質量の等しい物体が弾性的にぶつかったときには，動いていた方の物体が静止し，静止していた方の物体は，動いていた方がもっていたのと同じ速さで動き去るように見える；二つの物体は速度を交換するだけである．この有様は，適当な衝突装置でわけなくやってみることができる．より一般的にいえば，質量の等しい二つの物体が異なる速度で動いていて衝突すれば，速度を交換するだけである．

磁気も，ほとんど弾性的といってもよい作用を示す例である．U 形磁石を二つ，すべりブロックにのせて，一方を相手に近付け互いに斥けあうようにしてやると，それは相手をおしやって止まり，摩擦がなければ，相手の方が遠ざかっていく．

運動量保存の原理は非常に役に立つ．内部のこまかいことがわかっていなくても，この原理を使って解ける問題がたくさんあるのである．爆薬キャップの中で気体がどんな運動をするか，そのこまかいところはわかっていなくても，例えば二つの物体がどんな速度で離れ去るかを予測することができた．もう一つ面白い例は，ロケットの推進である．大きな質量 M をもったロケットが，ロケットに対しておそろしい速度 V で質量 m の小さな片をふき出す．はじめ静止していたロケットは，低速度 v で動きだす．運動量保存の原理を使って，この速度を計算すると，

$$v=\frac{m}{M}\cdot V$$

となる．ロケットが噴出をつづけていると，その速さはだんだん速くなる．ロケット推進の本質は，銃の反動と同じである；おす相手としての空気はいらないのである．

10-5 相対論的運動量

近年になって，運動量保存の法則は若干の修正をうけた．しかし，修正は主として定義の問題であって，今日でもこの法則はそのままの形でなりたっているのである．相対性理論でも運動量保存則は成立する；粒子は質量をもち，運動量は質量と速度との積で，やはり mv で与えられる．**しかし質量は速度によって変化し**，運動量も変化するのである．

質量が速度によって変化する関係は

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{10.7}$$

であって，ここに m_0 は物体が静止しているときの質量，c は光の速さである．この式からすぐわかるように，v が非常に大きくない限り，m と m_0 との差は小さく，通常の速度に対しては，運動量の式は従来のものと同じになる．

一つの単独の粒子の運動量の成分は，

$$p_x=\frac{m_0v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad p_y=\frac{m_0v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad p_z=\frac{m_0v_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{10.8}$$

であり，$v^2=v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2$ である．相互作用を及ぼしあっているすべての粒子の運動量の成分を加えあわせると，衝突の前後で，その和は等しい：すなわち，x 方向で運動量は保存されている．任意の方向についても，このことは成立する．

第4章で述べたように，エネルギー保存の法則が成立するためには，エネルギーが，電気エネルギー，機械エネルギー，輻射エネルギー，熱エネルギーなど，いろいろの形をとるということを認める必要がある．そのうち，例えば熱エネルギーの場合などでは，エネルギーがいわば“姿をかくす”のである．この例からみて次の疑問が生まれる．“運動量にも姿をかくす――熱運動量というようなもの――というようなことがあるだろうか？”それに対する答は，運動量をかくすのは非常にむずかしいということであって，その理由は次のとおりである．

一つの物体内の原子は不規則に運動しているが，その速度の**自乗**を加えあわせて和を求めれば，これによって熱エネルギーを測ることができる．これには方向性がないから，加えあわせた結果はいつも正である．この物体が全体として運動していてもいなくても，熱はそこにあるのであって，熱エネルギーの保存は一見して目には見えない．一方，むきをもっている**速度**を加えあわせて，答がゼロにならなかったら，それはこの物体が全体として，ある運動をしていることを意味するのであって，そのような全体としての運動量はすぐ観測される．物体は全体として運動するときにのみ正味の運動量を有するのであるから，行方不明の不規則な内部運動量というものはない．それ故，機械的の量である運動量をかくすことはむずかしい．しかし運動量をかくすことの**できる**場合もあるのであって，これは例えば電磁場の中である．この結果は相対性理論から出てくる．

ニュートンが前提としたことの一つは，遠隔作用は，瞬間的にその影響が及ぶということであった．しかし実際はそうでないことがわかってきた；例えば電気の力が関係している場合で，1カ所にある電荷が突然運動したとすると，他の点にある他の電荷に及ぼす影響は，瞬間的にはあらわれない——少しおくれがある．このような場合に，力は等しくても，運動量はキチンとあわない，短時間の間めんどうなことが起こる．それは，ちょっとの間，第1の電荷はある反作用的の力を感じ，若干の運動量を得るが，第2の電荷はまだ何も感じないで，運動量もまだ変化していないからである．二つの電荷の間の距離をこの影響が伝わってくるのには時間がかかるのであって，その速さは1秒に186,000マイルである．この短時間の間には，粒子の運動量は保存しない．第2の電荷が第1の電荷の影響を感じて，すべてのことが落付いた後には，運動量が等しくなるのは，もちろんのことである．しかしその短時間の間は，運動量は保存しない．このことを我々は次のようにいいあらわす．すなわち，この短い時間の間，粒子の運動量 mv の他に，別の運動量があって，それは電磁場内における運動量だとするのである．この場の運動量と粒子の運動量とを加えるならば，いかなる時いかなる瞬間にも，運動量は保存する．運動量やエネルギーをもつことができるということは，この電磁場をはなはだ現実的なものにする．そして理解をよくするために，粒子の間にただ力があるという古い考えを修正して，粒子が場をつくり，場が他の粒子に作用し，そして場それ自身が，粒子と同じように，エネルギーや運動量というようなおなじみの性質をもつとするのである．もう一つ例をとろう：電磁場には波があり，これを我々は光と称する；光もまた運動量をもつことになるので，光が物体にあたるときには，毎秒ある量の運動量を与える；これは力と同じことである．何故ならば，光があたって，物体が毎秒ある量の運動量を受け取るならば，その運動量は変化し，そしてその状況はそれに力がはたらいているのと全く同一であるからである．光もものにあたって圧力を生じうる；この圧力は非常に小さいけれども，充分敏感な装置を使えば，それを測ることができる．

さて，量子力学によると，運動量は上に考えたのとは，ちがったものであるということになる——それはもはや mv ではない．一つの粒子の速度というものが何を意味するかをはっきり定義することは困難である．しかしそれでも運動量は存在するのである．量子力学ではどこにちがいがあるかというと，粒子を粒子と考えれば，運動量はやはり mv であるが，粒子を波動と考えれば，運動量は1 cm あたりの波数によって測られるというところにある；この波数が大きければ大きいほど，運動量は大きいのである．このようなちがいがあるにかかわらず，運動量保存の法則は量子力学でも成立する．量子力学では $f=ma$ の法則は成り立たず，ニュートンが運動量保存について導き出したことは全部正しくないのだが，それでも，この保存の法則はそのままいきているのである！

第11章
ベクトル

11-1 物理学における対称性

この章で取り扱う問題は，物理学で専門的に，**物理法則の対称性**といわれているものである．ここで“対称”という言葉を使うとき，それにはある特定な意味をもたせる．だからまずその定義をくだす必要がある．ものはどういうときに対称であるというのか――それをどうやって定義することができるのだろうか？ ここに一つの絵があって，それが対称であるというなら，その片側と，他側とで何かが同一である．ヘルマン・ワイル教授は，対称を次のように定義した：一つのものにある操作を施したとき，もとと全く同一にみえるならば，そのものは対称であるという．例えば左右対称な花瓶があるとき，それを鉛直軸のまわりに180°まわすと，前と同じに見える．我々は，このワイルの，より一般的な形における対称の定義を採用して，それによって物理法則の対称性を論じよう．

いまある場所に複雑な器械を組み立てたとする．この器械の内部は，複雑に関連しあい，たくさんのタマが力を及ぼしあいながらぶつかりあっているなど，こみいったものであるとする．次にこれと同じ器械を別の場所に組み立てたとする．どの部分も同じ，大きさも同じ，むきも同じ，横に少し離れているだけで，そのほかはあらゆるものが同じであるとする．そこで，両方の器械を同じ状態から相呼応して動かしはじめたとする；我々の問題はこうである；両方とも全く同じように動くだろうか？ すべての運動が全く並行して行なわれるだろうか？ 答はもちろんノーでありうる．何故ならば，器械をおくのにまずい場所をえらんで，例えば壁の中などにしたら，壁が邪魔して器械ははたらかないからである．

物理学において我々が抱いているいろいろの考えを応用するときには，ある程度の常識が必要である；それは純粋に数学的な考えでもなく，抽象的な考えでもない．器械を新しい位置に動かして，同じ現象が起こるというとき，それはいったい何を意味するのかということを理解しておく必要がある．器械を新しい位置に動かすというのは，我々が重要だと信ずるものをすべて動かすという意味である；もしも同じ現象が起こらないならば，重要なものがまだ動かされないでいるということになるのであって，我々はそれは何だろうということを探すわけである．もしもそれがどうしても見付からないならば，物理法則はこの対称性をもっていないという．一方，もしも，物理法則がこの

対称性を持っているのならば，それは見付かるだろう——また見付かるはずである；よくみれば，例えば壁が器械におしかかっているということが見付かる．物事をはっきり定義して，重要な力がすべて器械の内部にあり，そして重要な部分がすべて一つの位置から他の位置へ動かされているとしたら，法則は同じだろうか，ということが我々の根本的の問題である．仕掛けは同じようにはたらくだろうか？

いまここで我々がしようとしていることは，**重要な**影響を器械といっしょにすべて動かすということであって，自然界のあらゆるもの——惑星も恒星もすべても——を動かしてしまうというのでないことはもちろんである．それはもしもそうやったとすれば，はじめとすっかり同じ状態だというだけの理由で，同じ現象が起こるにきまっているからである．しかり，我々は**あらゆるもの**を動かすことはできないのである．しかし，実際には，何を動かすかということにある程度頭を使いさえすれば，器械ははたらくのである．いいかえれば，我々が壁の中に入り込まないなら，また外力のよって来るところを知っていて，それもまたいっしょに動かすなら，器械は，位置を変えても同じように動くのである．

11-2　平行移動

力学については我々の知識はすでに豊富になったから，ここでは力学的の問題だけを取り扱うに止めよう．前章で述べたとおり，力学法則は，それぞれの粒子に対して，次の三つの連立方程式にまとめられる：

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=F_x,\quad m\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)=F_y,\quad m\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)=F_z. \tag{11.1}$$

このことは，三つの直交軸にそって x, y, z を**測る**方法があり，またその方向の力を**測る**方法があって，そしてその間にこれらの法則が成り立っているということを意味している．x, y, z はある原点から測らなければならないが，**その原点はどこにおくのか？**　ニュートンがいうところは，まず，そういう場所，宇宙の中心か何か，が**存在する**ということであって，その点から x, y, z を測るとして，これらの法則が成り立つというのである．しかし，すぐ後で述べるように，他の原点を使っても何のちがいも起こらないのだから，中心を見付けるということは決してできないのである．いいかえれば，ここに2人の人間がいるとする——太郎の原点はある場所にあり，次郎の軸はそれと平行であるがその原点は別のところにあるとする(図11-1)．さて，太郎が，この点の空間位置をきめると，それは x, y, z のところにある．(z を入れて考えると図があまり複雑になるから，ふつうには z を省くことにしよう.) 一方，次郎が同じ点を測ると，ちがう x (区別するために x' とする)を得る．y も一般にはちがうはずであるが，ここでは同じ数値になっている．よって

$$x'=x-a,\quad y'=y,\quad z'=z \tag{11.2}$$

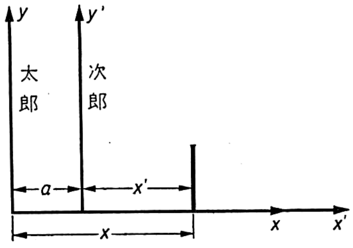


図11-1　平行な二つの座標系

である．さて我々の議論を進めるためには，次郎に対して力はどのようになるかを求めなければならない．力はある直線にそってはたらいているとし，x 方向の力というのは，全力のうちで x 方向にある部分，すなわち力の大きさと，この直線と x 軸との間の角の cos をかけたものである．次郎が使う角関係は，太郎が使うのと全く同じであるから，次の方程式が得られる．

$$F_{x'} = F_x,\quad F_{y'} = F_y,\quad F_{z'} = F_z. \tag{11.3}$$

太郎にみえる量と次郎にみえる量との間の関係は上のようなものである．

そこで問題は，太郎にはニュートンの法則がわかっていて，次郎がそれと同じニュートンの法則を書いたとしたら，それは次郎にとって正しいものであるかどうかということである．どちらか一方の原点からみた点の位置を使うということによって，何かちがいが生じるだろうか？ いいかえれば，(11.1)が正しいものとし，また(11.2)と(11.3)が，太郎の量と次郎の量との関係を与えるものであるとしたとき，

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \qquad m\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\right) = F_{x'},\\
&\text{(b)} \qquad m\left(\frac{d^2y'}{dt^2}\right) = F_{y'},\\
&\text{(c)} \qquad m\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right) = F_{z'}
\end{aligned} \tag{11.4}$$

は正しいだろうか，それとも正しくないだろうか？

これらの方程式の正否をみるために x' の式を 2 度微分する．まず

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dt}(x-a) = \frac{dx}{dt} - \frac{da}{dt}$$

である．次郎の原点が，太郎の原点に対して固定している(動いていない)とすると，a は定数で $\frac{da}{dt}=0$ であるから

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt}.$$

よって

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

である．したがって方程式(11.4a)は

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = F_{x'}$$

となる．(質量は太郎が測っても，次郎が測っても同じであるとする.) このように加速度かける質量は，太郎のと同じである．また方程式(11.1)を使って

$$F_{x'} = F_x$$

であるから，$F_{x'}$ の式もわかる．

それゆえ，次郎からみても法則は同じである．次郎はちがう座標についてニュートンの法則を書くことができ，しかもそれは正しいのである．どの位置からみても法則が同じにみえるのだから，これは世界

の原点を一義的にきめる方法はないということを意味する．

ところで，次のこともまた真である：ある仕掛けをもった装置がある一つのところにあってはたらくならば，他のところにある同じ装置も同じようにはたらく．これは何故か？ 次郎が調べる装置は，太郎の調べるもう一方の装置と全く同じ方程式になるからである．**方程式**が同じだから，起こる**現象**も同じなのである．一つの装置が新しい位置に来ても，前の位置のときと同じようにはたらくという証明は，方程式を空間的に動かしても同じものになるという証明と同じなのである．そこで我々は，**物理学の法則は平行移動に対して対称である**，我々の座標に平行移動をさせても法則は変わらないという意味で対称であるという．もちろんこれが正しいということは直観的にも明らかである．しかし，これの数学を考えることはなかなか面白い．

11-3 回　　転

一つの物理法則の対称性に関する話はまだまだたくさんあるが，上に述べたのは，まずその第一歩である．次の話は，軸をどの方向にむけても，ちがいが生ずることはないということである．いいかえれば，我々がある装置をある場所に組み立て，それがはたらくのをみる．次にその近くに同じ装置を組み立ててある傾きを与える．そうしたら，この装置は同じようにはたらくであろうか？ もしもこれが例えば大振子時計だったら同じようにははたらかないにきまっている！ 振子時計がまっすぐになっているなら，うまく動く，しかしもしこれを傾ければ，振子は箱の横にあたって止まってしまう．振子をひっぱっている地球もいっしょに傾けない限り，振子時計の場合には対称性は成り立たない．だからもしも我々が回転に対しても物理法則の対称性が成り立つと信ずるならば，我々は振子時計について次のような予測をすることができる：すなわち，この振子時計のはたらきには機械仕掛けの他に，何か別のものがそのそとにあるのであって，それを我々は忘れてはならないのである．またこういうことも予測される．すなわち，この神秘的な非対称の源は，おそらく地球であろうが，地球に対してちがう場所にある振子時計は同じようには動かないであろう．実際そのとおりで，例えば振子時計を人工衛星にのせていっしょに高いところをとばしたら，動かない．何故なら動かす力がないからである．また火星の上だったら動く速さがちがう．振子時計には，機械内部以外のもの，何か外部のものが関与して**いるのである**．これがわかれば，時計といっしょに地球も傾けなければならないことがわかる．しかし心配することはない，それはわけなくできる：ちょっと待っている間に地球がまわってくれる；振子はこの新しい位置に来ても前と同じように動く．我々は空間で回転しているのだから，絶対角度はつねに変化しつづけている；しかしこれは我々にとって大した影響はない，新しい位置に来ても前と同じ状態にあるように感ぜられるのである．このことは，いささか混乱を生じやすい．というのは，回転後の新位置

と回転前の旧位置とで法則は同一であるということは真であるが，一つのものを**回転させている**ときにも回転させていないときと同一の法則が成り立つということは，真でないからである．精密な実験を行なえば，地球は**回転しつつある**ということはわかる．しかし，地球が**回転した**ということはわからない．いいかえれば，角位置をきめることはできないが，それが変化しつつあることはわかるのである．

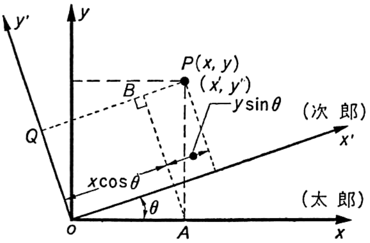


図 11-2　むきの角度がちがう二つの座標系

さて，ここで軸がどちらの方向をむいているかということが，物理法則にどのような影響を及ぼすかを考えよう．前の，太郎と次郎の話がこんどはどうなるかを調べよう．不必要な混乱を避けるために，太郎の原点も次郎の原点も同じであるとする．(軸は平行移動することができることは，前に述べた.) 次郎の軸が，太郎の軸に対して角 θ をなしているとする．この二つの座標系は図 11-2 に示してある．話を 2 次元に限る．任意の点 P を考えて，それが太郎の座標系では座標 (x, y)，次郎の座標系では座標 (x', y') であるとする．まず前と同じように，座標 x', y' を，x, y, θ であらわそう．そのため，P から 4 軸にみな垂線を下ろし，また PQ に垂直に AB を引く．この図からすぐわかるように，x' は，x' 軸上の二つの長さの和としてあらわされ，y' は AB 上の二つの長さの差としてあらわされる．これらの長さはみな，式(11.5)の x, y, θ によってあらわされる．式(11.5)には第 3 次元の方程式も加えてある．

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\theta + y\sin\theta,\\
y' &= y\cos\theta - x\sin\theta, \qquad (11.5)\\
z' &= z.
\end{aligned}
$$

次に，前と同じような一般的方法に従って，2 人の観測者からみたら，力がどういう関係になっているかということを論じよう．さて一つの力 F があって，その成分は(太郎からみて) F_x, F_y であることがわかっていて，この力が図 11-2 の点 P にある質量 m の粒子にはたらいているとする．簡単のために，図 11-3 に示すように，両方の座標系を動かして，原点が P に来るようにする．次郎にとっては，F の分力はその軸に沿って $F_{x'}, F_{y'}$ である．F_x は x' 軸に沿った成分も，y' 軸に沿った成分もあり，また F_y もやはり両軸に沿った成分がある．$F_{x'}$ を F_x と F_y とであらわすには，x' 軸に沿った成分を加えればよい．同様にして，$F_{y'}$ を F_x と F_y とであらわすことができる．結果は

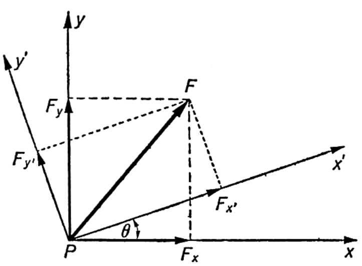


図 11-3　二つの座標系における力の成分

$$
\begin{aligned}
F_{x'} &= F_x\cos\theta + F_y\sin\theta,\\
F_{y'} &= F_y\cos\theta - F_x\sin\theta, \qquad (11.6)\\
F_{z'} &= F_z
\end{aligned}
$$

である．面白いことに，いわば偶然だが非常に重要なことがある：それは，P の座標の式(11.5)と，力の分力の式(11.6)とが，**全く同じ形をしている**ということである．

前と同じように，太郎の座標系ではニュートンの法則は真であり，方程式(11.1)によってあらわされるとする．問題は，次郎もニュートンの法則を使ってよいか――回転した彼の軸についても，結果は正し

いか，ということである．いいかえれば，両者の測定の関係が方程式(11.5)と(11.6)とによって与えられるとしたとき，

$$
\begin{aligned}
m\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\right) &= F_{x'},\\
m\left(\frac{d^2y'}{dt^2}\right) &= F_{y'},\\
m\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right) &= F_{z'}
\end{aligned}
\tag{11.7}
$$

は真であるかどうかということである．これらの方程式の真否をみるために，左辺と右辺とを別々に計算して，その結果をくらべてみる．左辺を計算するために，方程式(11.5)に m をかけ，時間について2度微分する．角 θ は一定であるとする．その結果は次のとおりである．

$$
\begin{aligned}
m\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\right) &= m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\cos\theta+m\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\sin\theta,\\
m\left(\frac{d^2y'}{dt^2}\right) &= m\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\cos\theta-m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\sin\theta,\\
m\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right) &= m\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right).
\end{aligned}
\tag{11.8}
$$

方程式(11.7)の右辺を計算するには，方程式(11.1)を(11.6)に代入する．その結果は

$$
\begin{aligned}
F_{x'} &= m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\cos\theta+m\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\sin\theta,\\
F_{y'} &= m\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\cos\theta-m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\sin\theta,\\
F_{z'} &= m\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)
\end{aligned}
\tag{11.9}
$$

である．

見給え！ 方程式(11.8)の右辺と(11.9)の右辺とは全く同じである．だから，我々の結論は，こうなる．もしもニュートンの法則がある座標系に対して成り立つならば，他のいかなる座標系についても成り立つのである．このことは，座標系の平行移動と回転とについて成立するのであるが，それから次の結果も出てくる：すなわち，誰も自分の軸が唯一無二のものだと主張することはできないのである．もっともある具体的の問題には，その軸が他のよりも**便利だ**ということがあるのはもちろんである．例えば，重力の方向を一つの軸にとるということは便利ではあるが，これは物理的に必要ではない．また，すべての仕掛けが内蔵され，力を出す装置も全部内に入っているような機械は，ある角度だけまわしても，同じようにはたらくということになる．

11-4 ベクトル

ニュートンの法則ばかりでなく，今日我々が知っている限りの物理学上の他の法則も，軸の平行移動と軸の回転との二つに対して不変(あるいは対称)であるという性質をもっている．この性質は非常に大切なので，これを利用して物理法則を書いたり使ったりする一つの数

学が発達している．

上に述べたようなやり方では，数学がまことにめんどうくさい．このような問題を考えるときにめんどうなことをできるだけ少なくするために，非常に有力な数学が工夫されている．これが，**ベクトル解析**であって，それがこの章の表題になっている；しかし，実をいえばこの章で論ずる主題は，物理法則の対称性なのである．上に述べたような方法によれば，我々が求めている結果を得るために，あらゆることを行なうことができた．しかし，実際問題としては，もっとたやすく速くやりたいので，そこでベクトル算法を使うのである．

まず，物理学において重要な量が2種類あるが，その性質に注意しておこう．（実際には2種類以上あるのだが，まず2からはじめよう．）その一つは，袋の中のジャガイモの数というようなものであって，これを普通の量，あるいは方向のない量，すなわち**スカラー**という．温度もスカラーの例である．また物理学で重要な量，例えば速度はむきをもっている：一つの物体の運動の有様をみるとき，そのスピードだけではなく，どちらに動いているかということを問題にする．運動量も力も，変位と同じようにむきをもっている：誰かが空間において1カ所から他の所へ歩くとき，どれだけ遠くに行くかはわかるとしても，**どこへ**行ったかをも知りたいというならば，むきを指定しなければならない．

空間における1歩のように，むきをもっている量をすべて**ベクトル**という．

一つのベクトルというのは，三つの数である．空間において，例えば原点から，(x, y, z) にある特定点 P までの歩みをあらわすのには，実は三つの数が必要である．これから発明しようとするのは，ただ一つの符号 $\mathbf{r}$ であって，それはこれまで我々が使った他の数学符号と異なるものである.* これは**一つの数ではなく**，**三つの数** x, y, z をあらわすのである．三つの数をあらわすのだが，**それらの**三つの数をあらわすだけではない．というのは，別の座標系を使うならば，この三つの数は，x', y', z' に変わるからである．しかし，我々の数学を簡単にしたいので，(x, y, z) という三つの数をあらわすのにも，(x', y', z') という三つの数をあらわすのにも，**同じ符号**を使うことにする．すなわち，同じ符号を使うのであるが，それは一つの座標系のときは (x, y, z) をあらわし，他の座標系を使うならば (x', y', z') をあらわすとするのである．この利点は，座標系を変えても，方程式の中の文字を変えないでよいというところにある．x, y, z を使って一つの方程式を書き，次に他の座標系を使うとすると，x, y, z を x', y', z' に変えなければならないのであるが，ベクトル解析ではただ $\mathbf{r}$ と書き，ある軸系を使うならばこれは (x, y, z) をあらわし，他の系を使うならばこれは (x', y', z') をあらわすと約束するのである．ある与えられた座標系において，この

---

*　印刷ではベクトルは肉付活字であらわす；書くときには $\vec{r}$ のように矢を使う．

量を示す三つの数を，この系の座標軸の方向における，**ベクトルの成分**という．すなわち，**相異なる軸からみた同一の対象**に対応する三つの数をあらわすのに同じ符号を使うのである．空間における1歩というものは，その成分によって測るのであるが，上のように"同一の対象"などということができるのは，それがその成分などとは無関係に実在のものであるとする物理的直観が言外に含まれている．$\mathbf{r}$という符号は，軸をどんなにまわしても同じものをあらわすのである．

さて，ここに何でもいいがむきをもっている他の物理量，例えば力があり，それが三つの数をもっていて，軸を変えるとその三つの数がある数学的規則に従って他の三つの数に変わるとする．この規則というのは(x, y, z)を(x', y', z')に変えるのと同じものでなければならない．いいかえれば，ある物理量が三つの数をもっていて，それが空間における1歩の成分の変換と同じ変換をうけるならば，その量はベクトルである．だから

$$\mathbf{F} = \mathbf{r}$$

というような方程式が，一つの座標系において真であるならば他のいかなる座標系においても真である．この方程式はもちろん次の三つの方程式

$$F_x = x,\ \ F_y = y,\ \ F_z = z,$$

あるいはまた，

$$F_{x'} = x',\ \ F_{y'} = y',\ \ F_{z'} = z'$$

ということをあらわしている．一つの物理的の関係がベクトル方程式によって書きあらわされるということは，この関係は座標系を回転しただけでは変わらないということを示している．ベクトルが物理学において大いに有用だという理由はここにある．

次にベクトルの二,三の性質を調べよう．ベクトルの例としては，速度，運動量，力，加速度などをあげることができる．多くの目的にとって，ベクトル量を矢であらわし，それによってそれがはたらいている向きを示すのが便利である．例えば力を矢によってあらわすことができるというのは何故であろうか？ それは力が，"空間における1歩"と同じ数学的変換性をもっているからである．だから，力もちょうど1歩であったように図にあらわし，力の1単位，すなわち1ニュートンがある適宜な長さに対応するようにとるのである．ひとたびこうきめさえすれば，力はすべて長さによってあらわされる．何故ならば，kを定数とするとき

$$\mathbf{F} = k\mathbf{r}$$

という方程式が，ちゃんと成り立つからである．このように，力はいつも線によってあらわすことができる．これは非常に都合のよいことである．というのは，ひとたびこの線をひいてしまえば，もう軸はいらなくなるからである．軸をまわすにつれて三つの成分がどう変化するかということは，単なる幾何の問題であるから，すぐ計算することができる．

11-5 ベクトル代数

次に，二つ以上のベクトルをいろいろに組み合わせるための，法則とか規則とかいうものを述べる必要がある．まず第一は，二つのベクトルの加法である：**a** は一つのベクトルであって，ある座標系についての 3 成分が (a_x, a_y, a_z) であるとする，また **b** は，別のベクトルで，成分は (b_x, b_y, b_z) であるとする．そこで $(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)$ という三つの新しい数をこしらえる．これらは一つのベクトルになるだろうか？ “そうだな，これらは三つの数であり，あらゆる三つの数はベクトルを形成する”というかも知れない．ところがそれは正しくない．あらゆる三つの数がベクトルを形成するとは限らないのである！ それがベクトルであるためには，三つの数があるということだけではなく，次のように座標系と関連していなければならないのである．すなわち，座標系をまわすと，この三つの数がすでに述べたきちんとした法則に従って互いに“めぐりあい”，互いに“まざりあう”ものでなければならないのである．だから，我々の問題は，座標系をまわして (a_x, a_y, a_z) が $(a_{x'}, a_{y'}, a_{z'})$ になり，(b_x, b_y, b_z) が $(b_{x'}, b_{y'}, b_{z'})$ になるとしたら，$(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)$ は何になるだろうかということである．$(a_{x'}+b_{x'}, a_{y'}+b_{y'}, a_{z'}+b_{z'})$ になるか，ならないか？ 答はもちろんイエスである．それは方程式(11.5)の原型的変換が，いわゆる**一次変換**だからである．$a_{x'}+b_{x'}$ を求めるために，a_x と b_x とにこの変換をほどこすと，変換された a_x+b_x は，$a_{x'}+b_{x'}$ とまさに等しいことがわかる．**a** と **b** とをこの意味で“加えれ”ば，一つのベクトルになり，これを **c** とする．このことを

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$$

と書く．**c** は

$$\mathbf{c}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$$

という重要な性質をもっている．その成分から考えてこのことはすぐわかる．したがってまた

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$$

である．ベクトルはどんな順で加えてもよい．

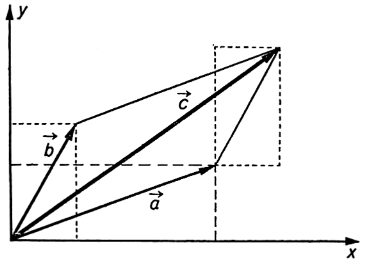


図 11-4　ベクトルの加法

a+**b** は，幾何学的にどんな意味をもっているか？ **a** と **b** とをあらわす線を紙の上にひけば，**c** は何になるか？ これは図 11-4 に示してある．**b** の成分を **a** の成分に加えるには，図に示したように，**b** の成分をあらわす長方形を，**a** の成分をあらわす長方形のとなりにもっていけば，いちばん便利である．**a** がその長方形に“はまっている”ように，**b** もその長方形にはまっているのだから，上のようにするということは，**b** の“尾”を **a** の“頭”にもっていくということと同じであり，**a** の“尾”から **b** の“頭”にいく矢がベクトル **c** をあらわす．逆に **a** を **b** に加えるのならば，**a** の“尾”を **b** の“頭”にもっていくのだが，平行四辺形の性質によって，**c** は同じものになる．このように，ベクトルは座標軸にたよらないで加えることができるのである．

一つのベクトルに α という数をかけるとしたら，これはどういう意

味になるだろうか？ これは，$\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z$ という成分をもつベクトルであると**定義する**．これが**ベクトルである**ということの証明は，諸君の問題として残しておこう．

次にベクトルの減法を考えよう．これは加法と同じように定義すればよく，ただ成分を加える代りに引けばよい．あるいは，負のベクトル $-\mathbf{b}=-1\mathbf{b}$ を定義し，減法はこの負のベクトルを加えることだと定義してもよい．結果は同じことである．これは図 11-5 に示してある．この図は $\mathbf{d}=\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ を示している：また $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ という差は，これと同じ意味の $\mathbf{a}=\mathbf{b}+\mathbf{d}$ という式を使えば，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ とからわけなく求められることにも注意する．このように，差を求めるのは和を求めるのよりもやさしい：$\mathbf{b}$ から $\mathbf{a}$ にベクトルを書くだけでよい．それが $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ である！

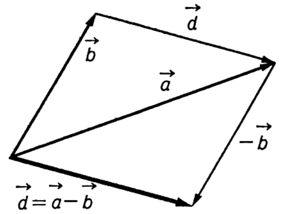


図 11-5 ベクトルの減法

次に速度を考える．速度がベクトルであるのは何故か？ 位置の座標が (x, y, z) であるなら，速度とは何か？ 速度は $\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}$ によって与えられる．これはベクトルであるか，ないか？ 方程式(11.5)の式を微分してみれば，$\dfrac{dx}{dt}$ がベクトル的に変換するかどうかがわかる．成分 $\dfrac{dx}{dt}$ も $\dfrac{dy}{dt}$ も，x や y の変換と同じ規則に従って**変換する**ことがわかるので，この時間微分係数もベクトルである．よって速度は**ベクトルなのである**．速度をベクトル的に次のように書く：

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

速度とは何か，何故それはベクトルなのか，というようなことは，図式で考えてもわかる：短い時間 Δt の間に，粒子はどれだけ動くか？ 答は $\Delta\mathbf{r}$ である，すなわち粒子がある瞬間に“ここ”にあり，次の瞬間に“そこ”にあるならば，位置のベクトル差 $\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ は図 11-6 に示したむきにあり，これを時間間隔 $\Delta t=t_2-t_1$ でわれば，それが“平均速度”ベクトルである．

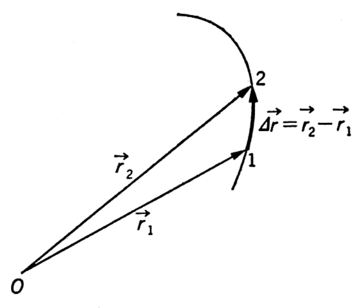


図 11-6 短時間間隔 $\Delta t=t_2-t_1$ における粒子の変位

いいかえれば，速度ベクトルとは，時刻 $t+\Delta t$ における位置ベクトルと，t における位置ベクトルとの差を Δt でわったものが，Δt が 0 になったときの極限である：

$$\mathbf{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\right)=\frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{11.10}$$

このように，速度は二つのベクトルの差であるから，ベクトルである．そしてその成分は $\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}$ であるから，この定義は正当である．じっさい，上の議論からすれば，任意のベクトルを時間で微分すれば，また別のベクトルになる．このように，新しいベクトルを作るのにいろいろな方法がある：(1) ある定数をかける，(2) 時間で微分する，(3) 二つのベクトルを加えるかひくかする．

11-6 ベクトル記号によるニュートンの法則

ニュートンの法則をベクトルの形で書くためには，更にもう一歩を進めて，加速度ベクトルを定義する必要がある．加速度ベクトルは，

速度ベクトルの時間的微分係数であって，その成分はそれぞれ x, y, z の時間に関する2階の微分係数である．このことを示すのは容易である：

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \tag{11.11}$$

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2},\quad a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2},\quad a_z=\frac{dv_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}. \tag{11.12}$$

この定義に従えば，ニュートンの法則は次のように書ける：

$$m\mathbf{a}=\mathbf{F} \tag{11.13}$$

または

$$m\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)=\mathbf{F}. \tag{11.14}$$

さて座標を回転してもニュートンの法則は不変であることを証明するという問題はこうである：$\mathbf{a}$ がベクトルであることを証明する；これはいますませた．$\mathbf{F}$ がベクトルであることを証明する；これは**そうらしい**．だから，もしも力がベクトルであるとすると，加速度がベクトルであることはわかっているのだから，方程式(11.13)は，どの座標系でも同じになる．x や y や z があらわには出て来ない形に書くということは，これからニュートンの法則その他の物理法則を書くときに，いちいち**三つの**法則を書かないでもよいという利点がある．我々が書くものは**一つの**法則であるようにみえるが，しかし実は任意にきめた軸に対する三つの法則であることはいうまでもない．何故ならばどんなベクトル等式も，**三つの成分がそれぞれ等しい**ということを意味しているからである．

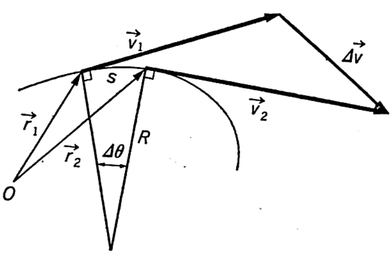


図 11-7　曲 線 路

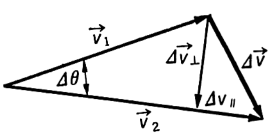


図 11-8　加速度を計算するための図

加速度は速度ベクトルの変化の割合であるが，このことを考えると，かなり複雑な条件の下における加速度を計算することができる．例えば，粒子が何か複雑な曲線に沿って運動しているとし(図11-7)，ある瞬間 t_1 には速度は v_1 であったが，ちょっと後の瞬間 t_2 には v_2 であったとする．このとき加速度は何か？　答：加速度は速度の差を短い時間間隔でわったものであるから，この二つの速度の差が必要である．速度の差を求めるにはどうすればよいか？　二つのベクトルの差を求めるには，$\mathbf{v}_2$ と $\mathbf{v}_1$ の頭を結ぶベクトルを書く；そして Δ を二つのベクトルの差とする．これでよいか？　**いけない**！　これが許されるのは，ベクトルの**尾**が同じところにあるときだけに限るのである！　ベクトルをどこか他のところに動かして，その頭を結んでも，意味をなさない．気を付け給え！　ベクトルのひき算をするのには図を新しく書かなければならないのである．図11-8では，$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ は両方とも，図11-7の $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ と平行に，しかも同じ長さに書いてある．それでこそ，加速度を論ずることができるのである．もちろん，加速度とは $\dfrac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$ というだけのものである．速度の差を二つの部分にわけて考えることができるということは，重要である；加速度は**二つ**の成分，すなわち，図11-8に示すように，運動の途に接する方向における $\Delta\mathbf{v}_\parallel$ と，それ

に直角な方向における $\Delta \mathbf{v}_{\perp}$ とである．途に接する方向の加速度は，ベクトルの長さの変化，すなわち**スピード** v の変化であることはいうまでもない：

$$a_{\parallel}=\frac{dv}{dt}. \tag{11.15}$$

加速度のもう一方の成分は，曲線に垂直であって，図 11-7 と図 11-8 を使って，わけなく計算することができる．短時間 Δt がたったとき，$\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ との間の角度の変化は小さく，$\Delta\theta$ であるとする．速度の大きさを v とすると，当然

$$\Delta v_{\perp}=v\Delta\theta$$

であって，加速度 a は

$$a_{\perp}=v\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)$$

である．そこで $\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ を求めなければならないが，それはこうすればよい：ある瞬間に，曲線を近似して，半径 R の円であるとすると，時間 Δt の間の距離 s は，$v\Delta t$ である．ここに v はスピードである．

$$\Delta\theta=v\left(\frac{\Delta t}{R}\right),\quad \text{または}\quad \frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{v}{R}.$$

したがって

$$a=\frac{v^2}{R} \tag{11.16}$$

であって，前のとおりである．

11-7 ベクトルのスカラー乗積

ベクトルの性質についてもう少し調べよう．空間における 1 歩というものの長さは，どんな座標系からみても同じであることはすぐわかる．すなわち，ある 1 歩 $\mathbf{r}$ を一つの座標系では x, y, z であらわし，他の座標系では x', y', z' であらわすならば，距離 $r=|\mathbf{r}|$ は，どちらでもたしかに同じである．さて

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$
$$r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$$

とする．我々が証明しようとするのは，この二つが等しいということである．平方根をとるというめんどうなことをしない方がずっと便利であるから，距離の自乗について論ずることにしよう；すなわち

$$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2 \tag{11.17}$$

であるかどうかを調べようとするのである．そうでないと困ることになる——これに方程式(11.5)を代入すれば上の式が成立することがわかる．ここで，どんな二つの座標系に対しても成り立つような別の種類の方程式があることがわかった．

ここには，新しい点が若干含まれている．x, y, z の関数で，しかも方向をもたず，両方の座標系で同一であるような新しい量，**スカラー関数**を作ることができる．ベクトルからスカラーを作ることができる

のである．その一般規則を求めなければならない．上に論じたような場合には，この規則はどんなものであるかは明らかである：成分の自乗を加えれば，スカラー関数になる．次に新しいものを定義しよう．それは $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$ というものである．これはベクトルではなく，スカラーである；これは一つの数であって，その数はすべての座標軸で同じである．その定義は，ベクトルの3成分の自乗の和

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = {a_x}^2+{a_y}^2+{a_z}^2 \tag{11.18}$$

である．“でも，どの軸についてですか？”と諸君はいうだろう．ところがこれは軸に関係しない．あらゆる軸について答は同じなのである．一つのベクトルを“自乗する”と，ここに新しい種類の量，**不変でスカラー**であるものができた．任意の二つのベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ とについて次の量を定義する：

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{11.19}$$

これを ′ のついている系とついていない系について計算すると，これもまた同一であることがわかる．これを証するには，$\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ であるとして，これが $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$, $\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}$ について真であることに注意する．それゆえ，自乗の和 $(a_x+b_x)^2+(a_y+b_y)^2+(a_z+b_z)^2$ は不変である：

$$\begin{aligned}&(a_x+b_x)^2+(a_y+b_y)^2+(a_z+b_z)^2\\&\quad=(a_{x'}+b_{x'})^2+(a_{y'}+b_{y'})^2+(a_{z'}+b_{z'})^2.\end{aligned} \tag{11.20}$$

この方程式の両辺を展開すると，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の成分の自乗の和のほかに，方程式(11.19)に出て来たのと同じようなクロス積が出てくる．方程式(11.18)の形の項が不変ならば，(11.19)の積の項も不変だということになる．

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ なる量を二つのベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ との**スカラー乗積**という．スカラー乗積は重要で有用な性質をたくさんもっている．例えば，

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} \tag{11.21}$$

を証明することはわけない．また $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ を計算するのに，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の成分を求めないで，簡単に幾何学的にやる方法もある：$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ は，$\mathbf{a}$ の長さと $\mathbf{b}$ の長さとの積に，その間の角のコサインをかけたものである．どうしてか？　ある特別な軸を選んで，x 軸を $\mathbf{a}$ の方向と一致させたとする；そのときには，$\mathbf{a}$ の成分としては a_x があるだけで，それは $\mathbf{a}$ の全長であることはもちろんである．だから，方程式(11.19)はこの場合 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_xb_x$ となり，これは $\mathbf{a}$ の長さに，$\mathbf{a}$ の方向における $\mathbf{b}$ の成分，すなわち $b\cos\theta$ をかけたものである：

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\theta.$$

それ故，この特別な系では，$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ は，$\mathbf{a}$ の長さかける $\mathbf{b}$ の長さかける $\cos\theta$ であることが証明された．しかも，**これがある一つの座標系で真ならば，すべての座標系でも真である**．何故ならば，$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ は座標系に無関係だからである；これが我々の議論である．

この積を使うと何かいいことがあるのか？　物理学において，これが必要になる場合があるのだろうか？　そのとおり．いつも必要なのである．例えば第4章で，運動のエネルギーは $\frac{1}{2}mv^2$ であった，しか

し物体が立体的に運動しているならば，これは x 方向，y 方向，z 方向で速度を自乗したものでなければならない．だからベクトル法では，運動のエネルギーは

$$\text{K.E.} = \frac{1}{2}m(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = \frac{1}{2}m(v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2) \qquad (11.22)$$

である．エネルギーには方向はない．運動量には方向があってベクトルである．それは質量かける速度ベクトルである．

スカラー乗積のもう一つの例は，何か物が一つの場所から他の場所におしやられたとき，力のした仕事である．まだ我々は仕事の定義をしていなかったが，力 $\mathbf{F}$ が距離 $\mathbf{s}$ だけはたらいていたときのエネルギーの変化(例えば，おもりを持ち上げる場合)と同等なもので，

$$\text{仕事} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} \qquad (11.23)$$

である．ある一つの方向の(例えば重力の方向だから鉛直方向を考える)ベクトルの成分をとり出して考えるとたいへん便利なことがある．そのような目的には，我々が特に考えようとする方向における**単位ベクトル**と称するものを導入すると便利である．単位ベクトルというのは，それ自身とのスカラー乗積が1に等しいようなベクトルである．この単位ベクトルを $\mathbf{i}$ とすれば，$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1$ である．あるベクトルの $\mathbf{i}$ 方向成分を求めたいならば，$\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}$ なるスカラー乗積は $a\cos\theta$ であり，これは，$\mathbf{i}$ 方向における $\mathbf{a}$ の成分である．これはこの成分を求めるうまい方法である；こうやればすべての成分が求められ，また面白い式が書ける．いま与えられた座標系 x, y, z で，x 方向の単位ベクトル $\mathbf{i}$，y 方向の単位ベクトル $\mathbf{j}$，z 方向の単位ベクトル $\mathbf{k}$ を導入する．まず第一に，$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1$ である．$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}$ はどうなるか？　二つのベクトルが互いに垂直ならば，そのスカラー乗積はゼロである．だから

$$\begin{aligned}&\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1,\\ &\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1,\\ &\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1\end{aligned} \qquad (11.24)$$

である．これらの定義を使えばどんなベクトルも次のように書ける：

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}. \qquad (11.25)$$

このようにして，ベクトルの成分からベクトル自身へ行くことができるのである．

ベクトルに関する議論は決してこれですんだわけではない．しかし，いまこの問題に深入りすることはやめて，物理学のいろいろな場合に，これまで論じた考えをどういうように使うかということを勉強しよう．この基礎的の道具を正当にマスターした後には，この問題に混乱することなく深入りすることは困難ではない．後にわかるように，二つのベクトルのもう1種類の積を定義すると便利である．それはベクトル乗積といい，$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ と書く．しかし，そのような議論は，後の章ですることにしよう．

第12章 力の性質

12-1 力とは何か?

物理法則というものは,我々が自然を理解し,また自然を利用するのに役に立つものである.だから物理法則を調べるということは大切だし,またそれに値する.しかし,我々はときどき立ち止まって,“いったいこれらの法則はどういうことを意味しているのだろうか?”と考えてみるべきである.ある命題の意味ということは,ずっと昔から哲学者の興味をひき,かつ彼らを悩ましたものであるが,物理法則の意味というのは更に興味のある問題である.というのは,これらの法則は,何か真の知識というものをあらわしていると一般に信ぜられているからである.知識とは何であるかということは,哲学における深遠な問題であって,“それは何を意味するのか?”という疑問を抱くのは,つねに大切なことである.

さて次の問題を考えよう.“ニュートンの物理法則は $F=ma$ と書かれるが,これの意味するところは何であろうか? 力とか質量とか加速度とかいうものの意味は何なのであろうか?”さて我々は質量の意味は直観的にわかる.また,位置や時間の意味がわかっていれば,加速度というものを**定義する**こともできる.それらの意味を論ずることはやめて,**力**という新しい概念に話を集中しよう.答は同じように簡単である:“もしも一つの物体に加速度があるなら,それには力がはたらいているのである.”これがニュートンの法則のいうところなのであって,力の定義はいろいろ考えられるが,その中でもっとも厳密で美しいのは,単に力とは物体の質量と加速度とをかけたものであるというのであろう.外力の和がゼロならば,運動量保存がなりたつという法則がある:そうだとすると次の疑問がおこる.“すべて外力の和がゼロであるとは,どういう意味か?”この命題をはっきりさせるには,こういえば気持がいい:“全運動量が一定であるならば,外力の和はゼロである.”こういっても何も新しいことをいっているわけではないから,何かすっきりしないところがあるにちがいない.我々が力は質量かける加速度であるという基礎法則を見出したとして,その後に力とは質量かける加速度であると**定義**しても,何も発見したことにはならない.また力の定義として,力のはたらいていない物体は,一定の速度で一直線の上を運動するということもできる.そうすれば,一直線の上を一定の速度で運動しているのでは**ない**物体があったとすれば,我々はそれに力がはたらいているということができる.こんな

ことをいっても，定義がグルグルまわりをするだけだから，物理学の内容にはなりえない．上に述べたニュートンの命題は，力の定義の中でもっとも厳密なものであって，数学者の気に入る定義である；しかし定義から何かが予測されるわけではないのだから，この定義は全く何の役にも立ちはしない．一日中膝掛椅子に腰をおろして，勝手に言葉の定義に耽っているのもよかろう．しかし，二つのタマがぶつかったらどうなるか，あるいはまた，バネにおもりを下げたらどうなるか，を求めるということは別問題である．物体がどのように**ふるまう**かということは，どんな定義を選択するかということの完全に埒外にある．

例えば，外から何もしないと物体はその位置に静止していて運動しないということを述べ，そして何かが運動しているのをみたとき，我々はそれは“チカリ”がはたらいているためである――チカリとは位置の変化の割合である――ということもできよう．ここで，チカリがはたらいていないときにはあらゆる物体は静止しているという，新しいりっぱな法則ができる．これは上に述べたチカラの定義と同様で，何の内容もないことは，諸君のみるとおりである．ニュートンの法則の真意はこうなのである：力は，$F=ma$ という法則以外に，**特有の性質**をもっているものだというのである．しかし力がもっているその特有な性質というものは，ニュートンによってもまた他の人によっても完全に与えられてはいない．だから $F=ma$ という物理法則はこれで完全だというものではない．質量と加速度とを調べてその積を力とよび，そして，この力の性質を叙述するならば，力というものはある程度すっきりしているものだということを，この法則は暗示している．この法則は自然を取り扱うのにとって，適切な叙述であり，力というものは，すっきりしているものだということの示唆である．

さてそのような力を叙述した最初の例は，ニュートンの完璧な引力の法則である．そしてこの法則を述べて，ニュートンは“力とは何か”という疑問に答えたのである．引力以外に何もないならば，この法則と，力の法則(運動の第２法則)とを組み合わせれば完全な理論になるわけである．しかし引力以外にもいろいろの力がたくさんあるのだし，またニュートンの法則をいろいろちがった場合にも使いたいものである．だから話を進めるために，力の性質についてもう少し述べなければならない．

例えば，力の問題を取り扱うときに，何か物体が実在していない限り力はゼロであるとか，力がゼロに等しくないならばその近所に何かがあって力の源になっているとかいうことが，いつも暗黙のうちに仮定されている．この仮定は，上に述べた“チカリ”の場合とは全然ちがう．力の特性のなかでいちばん大切なことは，それが現実の源をもっているということであり，単なる**定義ではない**ということである．

ニュートンは，また力についてもう一つの規則を与えている：二つの物体が互いに力を及ぼしあっているとき，その大きさは等しく，むきは反対である――作用があれば，それだけの反作用がある；この規

則は実は厳密には正しくはないのである．$F=ma$ という法則も厳密には正しくない；もしもこれが定義であるならば，これは**つねに**正しいといわなければならないところなのだが，そうではないのである．

これに抗議する学生もいるだろう，“このように厳密でないのはいやです．あらゆるものは厳密に定義されていてほしいものです．科学というものは，**あらゆるもの**が定義されている厳密なものだと，本にも書いてあるではありませんか．”諸君がどうしても力の厳密な定義を下すのだとがんばっても，それは決して成功しない！　それは第一に，ニュートンの第2法則が厳密なものではないからであり，第二に，いろいろの物理法則を理解するためには，それらはすべてなんらかの近似であることがわからなければならないからである．

簡単な概念というものは，どれも近似である．そのもう一つの例として，一つの物体というものを考えよう，……物体とは**何であるか**？哲学者がいつもいうのはこうである．“さあ例えば椅子のようなものである．”しかしそのことばを聞くや否や，もはや何についていっているのか彼らにはわかっていないということがわかる．椅子とは何であろうか？　まあ，椅子とはあるきまったもののかたまりであるとでもいおうか．きまったとは？　どのくらいきまったものか？　原子は——たくさんではないにしても若干の——それから時々刻々とび出している，またほこりがその上に落ち，塗料にとけこむ．このように，厳密に一つの椅子というものをきめ，どの原子が椅子で，どの原子が空気で，どの原子がほこりで，どの原子が椅子についている塗料であるか，をはっきりいいきることは不可能である．このように，一つの椅子の質量をきめるといってもそれは近似的である．同様に一つの物体の質量をきめるということも不可能である．世の中にたった一つで，それだけしかないというものはないのである——あらゆる物体はたくさんのものがまじりあったものなのであって，それを取り扱うにしても，それは近似や理想化をくりかえしてのみ可能なのである．

細工は理想化というところにある．おそらく椅子の原子の数は1分間たっても 10^{10} について1というようなすばらしい近似で，変わることはない．あまり厳密すぎることはいわないことにするというならば，これを理想化して質量は一定であるとしてよいだろう；力の特性についても同じで，厳密すぎることはいわないことにするならば，これも理想化して考えることができる．物理学がこのように近似という立場で自然をみる（近似の精度を上げることは絶えず努力している）ことに不満で，数学的定義を好む人もあるだろう；しかし数学的定義は現実の世界ではどうにもならないのである．数学というものには，数学的定義で結構であり，すべて論理で完全に事が運ぶ．しかし，海の波だとか，一杯の酒などの例で示したように，物理世界というものは複雑である．酒とグラスがあるとき，それを別々に区別して取り扱おうとしても，一方が他へとけこむということがあったら，どちらがどちらであるのか我々にわかるだろうか？　一つのものにはたらく力という

ものが，すでに近似を含んでいる，そして現実の世界について議論の体系があるとしても，それは少なくとも今日のところでは，何かの近似を含まざるをえないのである．

この体系は数学とはたいへんに違うのであって，数学ではあらゆることを定義することができ，我々が現実に何のことを問題にしているか**知らない**のである．じっさい数学の栄光は，**我々が現実に何を問題としているかということにふれる必要がない**というところにある．その栄光は，法則も議論も論理も，“それ”が何であるかということに無関係だというところにある．ここにもう一つ物体の系があって，それがユークリッド幾何学の公理と同じ体系に従うとし，我々が新しい定義を下して正しい論理で議論を展開するならば，結果はすべて正しいだろうし，そしてまたそのものが何であるかによらない．しかし自然界では，我々が線をひき，あるいは測量でやるように光線と経緯儀とを使って直線を設けたとき，我々はユークリッドの意味において線を測っているのだろうか？　そうではない，我々は近似をやっているのである；望遠鏡の中の十文字の線にはいくらか幅があるが，幾何学的の線には幅はない，だからユークリッド幾何学が測量に応用できるかどうかというのは物理の問題であって，数学の問題ではない．しかし，数学の立場ではなく物理の立場からいうならば，我々が土地を測量するときに使っているような幾何学に，ユークリッドの法則があてはまるかどうかを知る必要がある；そこで我々はあてはまると仮定する，そしてそれはなかなかうまくいくのである；しかし厳密にそうではない，というのは，測量の線は幾何学的の線ではないからである．ユークリッドの線というのは実に抽象的なものだが，これが現実の線にあてはまるかどうかということは，現実の問題である；頭の中の理屈だけで答えられる問題ではない．

これと同じように，$F=ma$ を単に定義であるとし，あらゆることをこれから数学だけで演繹し，また自然を記述する力学を数学的理論とすることはできない．ユークリッドがやったように適当な仮定をおくことによって，ある一つの数学体系をつくることは常に可能である．しかし我々は自然界の数学をつくることはできない．何故ならば，我々はおそかれ早かれそれらの公理が自然界のものにあてはまるかどうかを知らなければならないからである．こうして我々は，これら自然の複雑な“どろくさい”対象にやがてまきこまれるのである．しかしその近似はだんだん精確に精確にとなっていくのである．

12-2　摩　擦

上に述べたところからわかるように，ニュートンの法則をほんとに理解するには，力というものについて論じなければならないのである．そこでこの章の目的はそのような議論をして，ニュートンの法則をいわば完全なものにすることにある．我々はすでに，加速度やそれに関係した概念について論じたが，こんどは力の性質について論ずる．力

というものはたいへんこみ入ったものであるから，前のいくつかの章とちがって，この章は非常に精密というわけにはいかない．

まず一つの具体的の力として，空中を飛んでいる飛行機にはたらく抵抗からはじめよう．この場合，力の法則は何であろうか？（あらゆる力には法則があることはたしかである．ここにも法則があるにちがいない！）この力に対する法則は簡単なものだとは考えられない．空中を飛んでいる飛行機に何が抵抗になるか考えてもみたまえ——翼にぶつかる空気，後にできる渦，胴体のまわりに生じている変化，その他多くのこみいったことがあり，簡単な法則ではなさそうである．ところが著しいことには，飛行機にはたらく抵抗は近似的に定数かける速度の自乗，すなわち $F\sim cv^2$ なのである．

さてこのような法則の性格は何であるのか，$F=ma$ と同じようなものなのか？　それは全然ちがう．その第一の理由は，この法則は風洞実験によって近似的に得られた実験式であるからである．“でも $F=ma$ だって実験式ではありませんか”と諸君はいうかも知れない．上の二つに差があるという理由は，これではない．差があるというのは，この法則が実験的に得られたものだというところにあるのではなく，実際の飛行機では，その法則はたくさんのことがらがおそろしく複雑にくみあわさっているものの結果なのであって，根本的に一つの単一のものではないからである．測定をどんどんくわしくして，このことをよく調べれば調べるほど，法則は**簡単になる**どころか，ますます複雑になるのである．いいかえれば，飛行機にはたらく抵抗をくわしく調べれば調べるほど，この簡単な法則は正しくなくなり，深く調べれば調べるほど，また測定を精密にすればするほど，事実はますます複雑になる；この意味で，これは我々がはじめから推察できるような単純な基本的の現象によって生ずる結果ではないと考えられるのである．例えば，速度が非常に小さくて，ふつうの飛行機だったら飛べないくらいおそく，空気中でゆっくりひっぱるとすると，この法則は変わって，摩擦抵抗は速度の1乗によってきまるという方が事実に近い．他の例でいうならば，タマとか，アワとか，何かが，蜜のようなねばりけのある流体の中をゆっくり動くとき，それに働く摩擦抵抗は，速度の一乗に比例するが，運動が速くて流体がそのまわりで渦をつくるようになると(蜜には渦はできないが，水や空気にはできる)，抵抗は速度の自乗に比例するという方が事実に近い($F=cv^2$)．そして，速度がそれよりも大きくなると，この法則も成り立たなくなる．“それは係数が少しかわるのだ”という人があったら，大切な点を忘れているのである．第二に，この他にもっとずっとめんどうなことがある；飛行機にはたらくこの力は，翼にはたらく力，機首にはたらく力，等々にわけて調べることができるか？　もしもここの点あそこの点にはたらく力だけを問題にするのなら，これはもちろん可能である．しかしその場合には，翼なら翼の力というように，それぞれ特有の法則を求めなければならない．ところが驚くべきことには，片側の翼にはた

らく力は，もう一方側の翼にはたらく力に関係するのである：いいかえれば，飛行機をバラバラにして，一つの翼だけを空気中におくと，それにはたらく力は，もう一方の翼がいっしょにあるときの力と同じではないのである．この理由は，いうまでもなく機首にあたった風の一部が翼のところをまわってそれに力を及ぼすからである．上のように簡単な，大ざっぱな実験的法則があって，しかもそれが飛行機の設計に役に立つということは，一つの奇蹟である．しかし，この法則は，物理学の基礎法則とは別種のものであって，調べれば調べるほど，ますます複雑になる．cという係数が飛行機の機首の形にどう関係するかを調べるということは，控え目にいっても，あまり役に立つことではない．飛行機の形からこの係数をきめる簡単な法則などというものはない．これに反して，引力の法則は単純であって，調べれば調べるほど，実に単純であることがわかるのである．

上には，空気の中における速い運動によって生ずる摩擦と，蜜の中におけるおそい運動によって生ずる摩擦とについて述べた．この他に乾いた摩擦とか，滑りの摩擦とかいうものがあって，これは一つの物体が他の物体の上を滑るときに生ずる．この場合には，運動を持続させるのに力がいる．この力を摩擦の力というのであるが，その原因もまた非常に複雑である．接触している面は両方とも，原子的スケールでみれば，不規則きわまるものである．面はたくさんの点で互いに接触しているが，そこでは原子がくっつきあっているらしい．一方をひっぱって滑らせると，原子はポツンとはなれて振動が起こる；起こって然るべきことである．以前は，この摩擦メカニズムは非常に簡単に考えられていて，両面いっぱいに不規則な凹凸があり，滑体をひっぱり上げてこれらの凸出をこえさせるために摩擦が生ずるとしていた；しかし，そのはずはない．何故かというと，こういう現象なら，エネルギーの損失はないことになるが，実際には動力が消費されるからである．動力が消失するメカニズムは，滑体が凸出にあたると，凸出が変形し，波と原子運動とを生じ，そしてやがて両方の物体に熱を生じるということなのである．しかし，実験的にはこの摩擦がまた簡単な法則によって近似的に記述できるということは注目すべきことである．この法則というのは，摩擦にうちかって一つの物体を他の物体とすべらすに要する力は，接触している2面の間の(面に垂直な)法線方向の力によってきまるというのである．じっさい，摩擦の力はこの法線方向の力にかなりよく比例し，その係数はほぼ一定である；すなわち

$$F = \mu N \tag{12.1}$$

であって，μは**摩擦係数**といわれるものである(図12-1)．この係数は正確にいえば定数ではないが，この公式は実験法則としてはいいので，実際的ないし技術的の場合に必要な力の大きさを近似的に見積もるのに都合がいい．面の間の圧力やすべらせる速さがあまり大きくなると，熱がもっと余分に出ることになるので，この法則は成立しなくなる．このような実験法則はそれぞれ応用限界があるのであって，そ

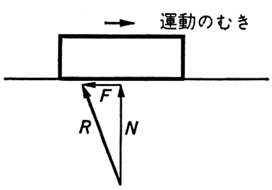


図12-1　接触面に滑りがある場合の摩擦力と圧力との関係

れを超すと駄目になる．このことを承知しておくのは大切なことである．

$F=\mu N$ の公式が近似的に正しいということは，簡単な実験によって示すことができる．1枚の板を用意し，小さい角 θ だけ傾けておく．そしてその面の上に，重さ W のブロックをおく．そして，傾きをだんだん大きくしていってそのブロックが自分の重さでまさにすべり出すようにする．面にそって下むきにはたらく重さの分力は $W\sin\theta$ であって，ブロックが一様にすべっているならば，これは摩擦の力 F に等しいはずである．面に垂直な重さの成分は $W\cos\theta$ であって，これは圧力 N に等しい．これらの値から，上の式は $W\sin\theta=\mu W\cos\theta$ となり，これから $\mu=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$ となる．もしもこの法則が正確に正しいならば，物体がすべりはじめる角度はきまっている．上に使ったブロックの上に余分の目方をのせると，W はふえるけれども，上の式に出てくる力もみな同じ割合でふえて，W は消える．もしも μ が一定であるならば，この目方をのせても，ブロックはやはり同じ傾きですべり出すことになる．はじめの重さで実験的に角 θ をきめてみると，重くしたブロックもだいたいその同じ角ですべることがわかる．はじめの何倍も重くしてもこのことは成り立つので，摩擦係数は重さに無関係であるということになる．

この実験をやるのに，面を正しい角のあたりに傾けておくと，ブロックは連続的にすべらないで，止まったり動いたりしながらすべることに気が付く．ある点では止まり，また他の点では加速されて動く．このことが示すように，摩擦係数はだいたい一定だというだけのことであって，この係数は面の場所場所でちがうのである．ブロックにおもりをのせてあってもなくても，この変動はあらわれる．このような変動の原因は，面のなめらかさや，硬さがいろいろであったり，あるいはまたゴミ，酸化物，その他の夾雑物があったりすることである．“鋼と鋼”，“銅と銅”などの間の μ の値と称するものが物理定数表にのっているが，あれはみな正しくない．それは，上に述べたような，ほんとに μ を決定する要素を無視しているからである．摩擦というものは，決して“銅と銅”などによるのではなくて，その銅にくっついている不純物によってきまるのである．

上に述べたような種類の実験では，摩擦はほとんど速度に関係しない．物をすべらしはじめるために打ち勝つべき摩擦(静止摩擦)は，つづけてすべらせるために必要な力(動摩擦)よりも大きいと考えている人が多いが，乾燥している金属では，この差はほとんどない．それが上のように考えられたのは，多分，油か減摩剤が少しついている場合とか，例えばブロックがバネとか変形する支えとかに支えられていて，あたかもそれがひき付けているようにみえる場合とかの経験から来たのであろう．

摩擦に関して，正確な定量的実験を行なうことは非常にむずかしい．また摩擦の法則を正確に調べることは工学的にも大いに価値があるの

だが，まだよく調べられていない．$F=\mu N$ という法則は，ひとたび表面の条件をちゃんときめればそうとうに正確なのであるが，それが何故このような形になるかという理由はよくわかっていない．係数 μ が速度にほとんど無関係であることを示すのには，よほどこまかい注意をはらった実験が必要である．というのは，下の面が非常に速く振動しているとすると，見掛け上，摩擦が非常に減るからである．この実験を非常な高速でやるときには，物体が互いに対して振動しないように注意しなければならない．高速度において摩擦が見掛け上減るのは，振動のためであることが多い．ともかく，この摩擦の法則は，まだ充分にわかっていない半実験的の法則の一つである．そして，これまでいろいろのことが調べられたのに，この現象の理解が進んだということがないのは，驚くべきことである．じっさい現在では，二つの物質の間の摩擦係数を見積もることさえ不可能なのである．

上に述べたように，銅の上に銅というように純粋な物質をすべらせて μ を測定するというやり方では，ほんとのことはわからない．それは接触している両面が純粋な銅ではなく，酸化物やほかの不純物がまざっているからである．ほんとに純粋な銅にしようとして，表面をきれいにし，磨き，真空内で気体をぬき，考えられるあらゆる注意を払っても，まだ μ は得られない．この仕掛けを鉛直な位置まで傾けても，のせたものはすべらない——両方の銅片はくっついているのである．かなり堅い表面同士の摩擦係数 μ は，1よりも小さいのが普通であるが，上のような場合には，1の数倍になる！　これは思いがけないことであるが，それの理由は，接触している原子がみな同種のものであるとすると，原子は自分はどちらの銅に属しているかということを“知る”ことはできないからである．間の面に，酸化物やグリースや，複雑な薄いよごれの表面膜など，他の原子があって，原子がどちらかの銅に属しているなら，そのことをちゃんと“知って”いる．銅を一つの固体として保つのは，原子の間の力であることを考えるならば，純粋な金属の摩擦係数の正しい値を得るのが不可能であることは明らかである．

これと同じような現象は，平らなガラス板と，ガラスのコップとを使って，うちでも簡単に実験してみることができる．コップを板の上にのせて，それに糸を輪にしてかけてひっぱると，かなりよくすべり，摩擦係数を手に感ずる；それは多少大きくなったり小さくなったりするが，ともかく一つの係数である．ところが，ガラス板とコップの底とをぬらして，ひっぱってみると，こんどはくっついてしまう．そしてよくみると，すべったあとにひっかききずが見える．これは，面についていたあぶらや他のよごれが水によって表面からとり去られて，真にガラス対ガラスの接触になるからである．この接触は非常によいので，ガラスはしっかりくっつき，はなすのに大いに抵抗する．それで，ガラスを無理にひっぱり放すと，ひっかききずがつくのである．

12-3　分 子 力

次には，分子力の特性を論じよう．これは原子の間の力であって，摩擦の生じる原因の大もとである．分子力が古典物理学を基礎としてよく説明されたということはない；分子力を十分に理解するには量子力学を俟たねばならない．しかし，実験的には原子間の力は，図 12-2 に模式的に示したようなものであって，二つの原子の間の力Fを，その間の距離rの関数としてプロットしてある．これにはいろいろの場合がある：例えば水の分子でいえば，負の電荷は酸素の方にたくさんあって，負の電荷の平均位置と正の電荷の平均位置とは同じところにはない；したがって，近くにいる他の水の分子は，比較的大きい力を感ずるわけで，この力をダイポール-ダイポールの力という．しかし多くの物質においては，正負の電荷は水の場合よりもずっとよく釣合っている．完全に対称な酸素気体において特にそうである．この場合には，マイナスの電荷とプラスの電荷とは分子全体にひろがっているのだが，マイナスの電荷の中心とプラスの電荷の中心とは一致するような分布になっている．中心が一致していない分子を極性分子といい，電荷に中心間の距離をかけたものをダイポール・モーメント(双極子モーメント)という．非極性分子ではすべての電荷が中和していて，距離の大きいところに及ぼす力は引力である．そしてそれは距離の7乗に逆比例する．すなわち$F=\dfrac{k}{r^7}$であって，kは分子の種類によって異なる定数である．何故こうなるのかということは，量子力学を勉強するときにはじめてふれる．ダイポールがあると，ないときにくらべて力は大きい．原子や分子があまり近くによると，非常に大きい力で斥けあうようになる；そのおかげで我々は床下に落ちないのである！

このような分子力は，ある程度直接的な方法によって示すことができる：その一つは摩擦の実験であって，ガラスのコップをすべらせてやるのもそれである．もう一つは，表面をよくすってみがきをかけ，非常に正確に平面にしたものを密着させるのである．そのような面の一例は，ヨハンソン・ブロックであって，これは工作場で，長さの精密測定の標準として使われているものである．そのブロック一つをもう一つのブロックの上で非常に注意してこすりつけ，そして上のブロックをもちあげると，下のブロックは密着して，分子力によってもち上げられる．これは一方のブロックにある原子と，他のブロックにある原子との間に，引力が直接にはたらいていることを示すのである．

こうはいうものの，質量による引力が基本的であるというような意味からいえば，これらの分子引力は基本的ではない；分子引力は，一つの分子の中にあるすべての電子や原子核と，相手の分子の中にあるすべての電子や原子核との間にはたらいている非常に複雑な相互作用の結果なのである．一見簡単に見える法則が得られても，それは，いろいろ複雑なことが綜合された結果なのであって，我々は基本的現象に達したのではない．

分子力は，図 12-2 に示すように，距離の大きいところでは引力，近くでは斥力である．だからこそ，固体というものができるのである．固体では，すべての原子が引力によってひっぱられるが，あまり近くなると斥力があるのでくっつききれない．ある距離 d(図 12-2 のグラフが軸と交わるところ)では力はゼロで，すべてつりあい，分子は互いにその距離だけはなれて静止しているのである．分子を距離 d よりも近くおしつけると，グラフの r 軸よりも上にある部分に相当する斥力があらわれる．分子を少しだけ近付けるにも，大きな力が必要である．それは，距離が d よりも小さくなると，斥力は急激に大きくなるからである．分子を少しひっぱってその間をひろげると，引力ははじめのうちはそれほど大きくないが，ひろがりが大きくなるにつれてこの引力は大きくなる．ひどくひっぱると，分子は永久にはなれてしまう——結合が断たれるのである．

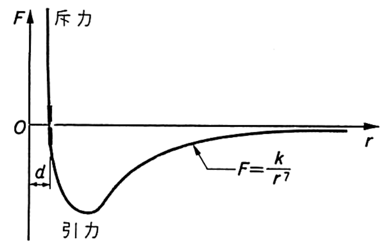


図 12-2　二つの原子間の力とその間隔との関係

分子をおしつけたり，ひっぱったりする距離が，d にくらべて**非常に小さい**とすると，図 12-2 の曲線でこれに対応する距離も非常に小さく，近似的に直線とみることができる．だから，多くの場合に，変位があまり大きくなければ，**力は変位に比例する**ということになる．これはフックの法則とか，弾性の法則とかとして知られているものであって，変形した物体がもとの状態に戻ろうとする力は，その変形に比例するというのである．この法則が成り立つのは，もちろん，変形が比較的小さいときに限る；変形があまり大きくなると，変形の仕方によってこの物体はいろいろなこわれ方やつぶれ方をする．フックの法則の成り立つ力の大きさは，物質の種類によってちがう．例えば，ねり粉やパテではその力は非常に小さく，それにくらべれば鋼では大きい．鋼でつるまきバネをつくりまっすぐに下げると，フックの法則がきれいに示される．バネの下に適当なおもりを下げると，針金の全長にそって小さなねじれが生じ，その結果として，バネはひとまきごとに少しずつ下がり，いくまきもあるとそれが積みかさなって大きな変位になる．例えば，おもり 100 g で，全体としてどれだけののびが生じたかを測っておくと，おもりを更に 100 g ふやすごとに，同じだけずつのびることがわかる．この力とのびとの比は，はじめのうちは一定であるが，バネにおもりをかけすぎると，この比は変わりはじめる．すなわち，フックの法則は成り立たなくなる．

12-4　基本的の力．場

基本的な力で，まだふれていかなった力がある．ここではそれについて論じる．これらの力を基本的というのは，その法則が基本的に単純であるという意味である．まず，電気力を考えよう．物体は電子と陽子とからなり，電荷をもっている．二つの物体が帯電すると，その間には力がはたらく．電荷の大きさがそれぞれ q_1, q_2 であるとすると，この力はその二つの電荷の間の距離の自乗に反比例する．すなわち，$F=(\text{定数})\frac{q_1q_2}{r^2}$ である．二つの電荷の符号が反対だと，この法則は引

力の法則に似たものであるが，正負の符号が同じならば，この力は斥力になり，力の符号(むき)は反対になる．電荷 q_1, q_2 はがんらい正でも負でもありうるのであって，この式を実際問題にあてはめるときには，q に適当にプラスやマイナスの符号を与えれば，力のむきは正しく出てくる；力は二つの電荷を結ぶ方向にはたらく．上の式における定数は，力や電荷や距離をどんな単位を使ってあらわすかによってきまることはもちろんである．現在では，電荷はクーロンで，距離は m で，力はニュートンで測るのが，ふつうになっている．こうすると，力がニュートンでちょうどよい値になるためには，この定数(歴史的理由で $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ と書く)の数値は，

$$\varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12}\ \text{クーロン}^2/\text{ニュートン}\cdot\text{m}^2$$

すなわち

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99\times10^{9}\ \text{ニュートン}\cdot\text{m}^2/\text{クーロン}^2$$

である．よって，静電荷に対する力の法則は

$$\mathbf{F} = \frac{q_1q_2\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{12.2}$$

となる．

自然界において，いちばん重要なのは，一つの電子の電荷であって，1.60×10^{-19} クーロンである．大きな電荷でなく，基本粒子の間にはたらく電気力を問題とするときには，$\dfrac{(q_{\text{電子}})^2}{4\pi\varepsilon_0}$ のようにひとまとめにする人が多い．$q_{\text{電子}}$ は一つの電子の電荷である．この組合せはしばしば出てくる．そして計算を簡単にするために，これを e^2 と書くことにする．その数値は mks 単位系で $(1.52\times10^{-14})^2$ ということになる．定数をこの形にして使う利益は，二つの電子の間にはたらく力をニュートン単位であらわすことにして，r を m であらわすと，それは単に $\dfrac{e^2}{r^2}$ となり，個々の定数は何もいらないというところにある．しかし電気力というものは，この単純な式が示すよりもはるかに複雑なものである．というのは，この式は，二つの帯電体が静止している場合だけにしか通用しないからである．もっと一般の場合についてはやがて論ずることにしよう．

基本的な力(摩擦のような力ではなく，電気力とか引力とかいうような)を取り扱うに際して，非常に興味あり非常に重大な考えが展開された．一見するとこれらの力は逆自乗の法則が示すよりもはるかに複雑なものであり，これらの法則は力を及ぼしあっている物体が静止しているときにだけ成り立つに過ぎない．だから二つの物体が複雑な運動をしはじめるとき生ずる非常に錯雑した力を取り扱うのには，何か改良した方法が必要である．このような種類の力を取り扱うには，“場”といわれている考え方が非常に有効である．たとえば電気力についていうならば，二つの電荷 q_1 と q_2 とがそれぞれ点 P と点 R にあるとする．二つの電荷の間にはたらく力は

$$\mathbf{F} = \frac{q_1q_2\mathbf{r}}{r^3} \tag{12.3}$$

によって与えられる．場の考えによってこの力を取り扱うのに，P にある電荷 q_1 は，R に一つの“状態”をつくるというのである．その状態というのは，電荷 q_2 を R におくと，それがこの力を“感ずる”というのである．これは，奇妙にもみえるだろうが，このことを記述する一つの方法なのである．R における q_2 にはたらく力 $\mathbf{F}$ は二つの部分から成り立っているというのである．すなわち q_2 と $\mathbf{E}$ との二つをかけたものであって，$\mathbf{E}$ は q_2 があってもなくても，存在するものである(他の電荷がすべてその場所を動かないとして)．$\mathbf{E}$ は，いわば q_1 によってつくられる状態であり，$\mathbf{E}$ に対する q_2 の反応が $\mathbf{F}$ なのである．$\mathbf{E}$ は**電場**といわれるものであって，一つのベクトルである．P にある電荷 q_1 によって R に生ずる電場 $\mathbf{E}$ の式は，電荷 q_1 かける定数 $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ わる r^2(r は P から R までの距離)であって，動径のむき(動径 $\mathbf{r}$ をその長さでわったもの)にはたらく．よって $\mathbf{E}$ の式は

$$\mathbf{E} = \frac{q_1\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{12.4}$$

である．そこで

$$\mathbf{F} = q_2\mathbf{E} \tag{12.5}$$

と書けば，これは力と電場とそのなかにある電荷の三つを結ぶ式になる．これは要するにどういうことなのか？ 大切な点は問題を二つにわけたというところにある．まず第一に，あるものが場を**生ずる**とする．第二に，あるものがこの場によって**はたらかれる**とする．この二つの部分を別々にみることによって，問題を計算するのが簡単になる場合が多い．もしも電荷がたくさんあるときには，そのすべての電荷によって R に生ずる全電場を求め，次に R にある電荷を知って，それにはたらく力を求めるのである．

引力の場合も全く同じようにできる．このとき力は $\mathbf{F}=-\dfrac{Gm_1m_2\mathbf{r}}{r^3}$ であるから，次のように取り扱うことができる．引力の場にある一つの物体にはたらく力は，その物体の質量かける場 $\mathbf{C}$ である．m_2 にはたらく力は，m_1 によって生ずる場と m_2 との積，すなわち $\mathbf{F}=m_2\mathbf{C}$ である．質量 m_1 の物体によって生ずる場 $\mathbf{C}$ は，$\mathbf{C}=-\dfrac{Gm_1\mathbf{r}}{r^3}$ であって，電場の場合と同じように，m_1 からの半径方向にはたらく．

二つの部分にわけて考えるというこのことは，ちょっとみてどう見えようとも，決して小さいことではないのである．もしも力の法則が単純なものであったならば，これは同じことをちがう書き方をしただけで，小さなことに過ぎないだろう．しかし，力の法則というものがたいへん複雑であるのに対して，場というものは，それを生ずる物体とほとんど関係なく現実性をもっているのである．例えば電荷を振動させると，その影響として，はなれたところに場を生ずる；振動を止めても，この場は過去にあったことすべてを記憶している．それは二つの物体の間の相互作用は瞬間的なものではないからである．前にあったことを記憶する方法があるということは都合のいいことである．ある電荷にはたらく力が，他の電荷が昨日どこにあったかということ

によってきまるのならば，そして実際そのとおりなのだが，我々は，昨日何が起こったかを覚えておく方法がなければならない．これが場の特性なのである．こうして，力が複雑なものになればなるほど，場というものはますます現実的のものになり，このやり方は単なる人為的の分離というものでなくなるのである．

場の考えを使って力を取り扱うにあたっては，場に関する2種類の法則が必要になる．その第1は，場に対する反応であって，これは運動方程式を与えるわけである．例えば，引力の場に対する1質量の反応に関する法則は，力は質量と引力の場との積に等しいというのである．またこの物体が電荷ももっているならば，電場に対する電荷の反応は，電荷と電場との積に等しい．このような場合に自然を取り扱う第2段は，その場の強さがどのようにしてきまるのか，またそれがどのようにして生ずるのかということに関する法則を求めるということである．このような法則を**場の方程式**ということがある．それについてのくわしいことはいずれ述べるが，ここではそれについて二,三のことを述べておこう．

まず第一に，何よりも著しいことは，源がたくさんある場合に，それによって生ずる全電場は，第1の源によって生ずる電場，第2の源によって生ずる電場等々をベクトル的に加えたものだということである．このことは厳密にそうなのであって，理解しやすいことである．いいかえれば，たくさんの電荷が一つの場をつくっているとき，その一つの電荷がそれだけで $\mathbf{E}_1$ という場をつくり，次の電荷がそれだけで $\mathbf{E}_2$ という場をつくり，等々であるならば，全体の場を求めるのには，単にこれらのベクトルを加えればよいのである．この原理は次のようにあらわすことができる:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \cdots. \tag{12.6}$$

あるいは，上に述べた定義によって

$$\mathbf{E} = \sum_i \frac{q_i \mathbf{r}_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i{}^3} \tag{12.7}$$

である．

同じ方法を引力にもあてはめることができるだろうか？　二つの質量 m_1 と m_2 との間に働く力は，ニュートンによれば $\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2\mathbf{r}}{r^3}$ である．しかし場の考えによれば，こういってよい．m_1 がそのまわりの空間に場 $\mathbf{C}$ をつくり，m_2 にはたらく力が

$$\mathbf{F} = m_2\mathbf{C} \tag{12.8}$$

になるようになっている．電場と全く同じように

$$\mathbf{C} = -\frac{Gm_i \mathbf{r}_i}{r_i{}^3} \tag{12.9}$$

であり，質量がいくつもあるときに生ずる引力の場は

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3 + \cdots \tag{12.10}$$

である．第7章で，惑星の運動の問題を取り扱ったとき，我々は実はこの原理を使ったのであった．すべての力ベクトルを加えて，一つの

惑星にはたらく合力を求めたのであった．いま問題にしている惑星の質量をどけて考えれば，方程式(12.10)が得られる．

方程式(12.6)と(12.10)は場の**重ね合わせの原理**として知られていることである．この原理のいうところは，すべての源による全体の場は，おのおのの源による場の和であるというのである．今日までわかっているところでは，これは電場に対して絶対に保証されているのであって，電荷が運動していて力の法則が複雑な場合にも成立する．みかけ上成り立たないようにみえる場合もあるが，それもよく調べてみると，ある電荷が運動しているのを見落していたためであったりすることがわかる．この重ね合わせの原理は，電気の力に対しては厳密にあてはまるのであるが，引力の場に対しては，それがあまり強い場合には厳密には成立しなくなる．アインシュタインの引力理論によると，ニュートンの方程式(12.10)は，近似的に成立するにすぎない．

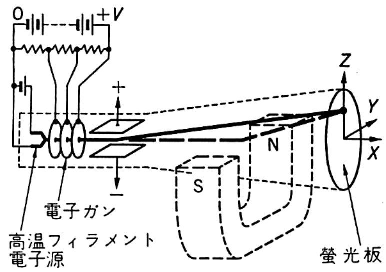


図 12-3 電子線管

電気の力に密接に関連して，磁力と称する別の力があるが，これも場の考えによって取り扱うことができる．電気力と磁力との間には，ある定性的の関係があるが，これは，電子線管(図 12-3)を使って，実験的に示すことができる．この管の一方のはじには，電子の流れを放出する源がある．管の内には仕掛けがあって，電子を高速に加速し，その一部を細い線にして他端にある螢光板にあてる．電子がこの螢光板のまんなかにあたるとそこが光って点になり，それで電子の途がわかる．螢光板に達する途中で，電子線は，例えば水平におかれた2枚の平行な金属の間のせまいところを通る．この板に電圧をかけて，そのどちらの一方でもマイナスにすることができるようになっている．そのような電圧がかかっていれば，2枚の板の間には電場がある．

実験第1段として，まず下の板に負の電圧をかける．すなわち下の板に電子が余分にあることになる．同種の電荷は斥けあうから，螢光板の光点は上に上がる(次のようにいってもよい——電子がこの電場を感じて，それに反応して上方にふれた)．次に電圧を逆にして，**上の板**を負にする．螢光板の光点はこんどは中心よりも下に下がって，電子線の電子が上の板にある電子によって斥けられたことを示す(電場が逆になったのだが，電子がそれに反応したといってもよい)．

実験の第2段として，板にかかる電圧をきって，こんどは磁場が電子線にどのような影響を与えるかを調べる．これにはU字型磁石で，その極の間がひらいていて，電子線管をまたげるようなものを使えばよい．Uの字にみえるようなふうに電子線管の下のところにこの磁石をもってきて，磁極が上にむき，電子線管の一部がその間にくるようにしたとする．こうすると，磁石が下の方から電子管に近付くにつれて，光点は(例えば)上にふれることがわかる．あたかも，磁石が電子線を斥けるようにみえる．しかし事柄はそう簡単ではない．磁石の極の左右は同じにしておいたまま上下をさかさまにして，こんどは上から電子管に近付けると，光点はやはり**上に**動く．だから電子線は斥けられるのでは**ない**；こんどは引きつけられるようにみえる．こんどは

またもとにもどって，磁石をはじめのU字のむきにして，前と同じように電子線管の下にくるようにする．光点はやはり上にふれる；こんどは，磁石を上下軸のまわりに180°まわして，Uの字にはなっているが，磁極が左右さかさまになるようにする．見給え，こんどは光点は下に移る．そして磁石の上下だけをさかさまにして上から近付けても，前と同じように光点はやはり下に動く．

この奇妙な点の動き方を理解するためには，我々は力の新しい組合せを考えなければならない．説明はこうである：磁石の一つの極から他の極までのところに**磁場**があるというのである．この磁場にはむきがあって，それはいつも一つの特定の極(印をつけることができる)から出て他の極に至るのである．磁石の上下を反対にしても，磁場のむきは変わらない．しかし，極の左右をさかさまにすると磁場のむきは変わる．これは上の実験で見たとおりである．例えば，電子の速度が水平方向で x 軸，磁場がやはり水平で y 軸であるとすると，**運動している電子**にはたらく磁力は，z 方向，すなわち上か下かである．そのいずれであるかは，磁場が y 方向に正のむきであるか負のむきであるかによってきまる．

相対的に勝手な運動をしている電子相互の間にはたらく力をあらわす正確な法則は，たいへん複雑だからここには述べないが，その一面だけを述べておこう．それは，**場がどういうものであるかがわかっている場合**における力に関する完全な法則である．一つの帯電体にはたらく力は，その運動に関係する；その物体がある与えられた場所に静止しているとき，力があるならば，この力は電荷に比例するとし，その係数が**電場**と称せられるものである．物体が運動すれば力は変わる．その補正というか，新しく加わる“部分”は，**速度の1乗**に正確に比例し，そのむきは $\mathbf{v}$ にも，**磁気誘導B**と称する別のベクトル量にも直角である．電場 $\mathbf{E}$ の成分と，磁気誘導 $\mathbf{B}$ の成分がそれぞれ (E_x, E_y, E_z) と (B_x, B_y, B_z) であり，速度 $\mathbf{v}$ の成分が (v_x, v_y, v_z) であるとすると，運動している電荷 q にはたらく全電気磁気力の成分は

$$
\begin{aligned}
F_x &= q(E_x+v_yB_z-v_zB_y),\\
F_y &= q(E_y+v_zB_x-v_xB_z), \qquad (12.11)\\
F_z &= q(E_z+v_xB_y-v_yB_x)
\end{aligned}
$$

である．例えば，磁場に B_y 成分だけしかなく，速度には v_x 成分だけしかないとすると，磁力で残るただ一つの項は，z 方向，すなわち $\mathbf{B}$ にも $\mathbf{v}$ にも直角な方向における力だけである．

12-5　見かけの力

次に論ずる力は，見かけの力ともいうべきものである．第11章においては，別々の座標系にいる太郎と次郎の2人の関係を論じた．一つの粒子の位置を，太郎からみると x であり，次郎からみると x' であるとする；このとき，法則は

$$x = x'+s,\ \ y = y',\ \ z = z'$$

であって，sは太郎の系に対する次郎の系の変位である．そこで運動の法則が太郎に対して成り立つとしたとき，それは次郎からはどう見えるか？　まず

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx'}{dt}+\frac{ds}{dt}$$

である．前にはsが一定の場合を考えたが，この場合には$\dfrac{ds}{dt}=0$であるから，sは運動の法則には何の影響も及ぼさないことを知った．だから結局，物理の法則は両方の系で同じである．しかし，これとはちがって，uを直線上の一様な速度としたとき，$s=ut$であるという場合がある．このときはsは一定ではなく，$\dfrac{ds}{dt}$はゼロではなくて定数uである．しかし$\dfrac{du}{dt}=0$であるから，加速度$\dfrac{d^2x}{dt^2}$は，やはり$\dfrac{d^2x'}{dt^2}$と同じである．第10章で，我々が一様な速度で直線的に運動しても，物理の法則は，同じにみえるという法則を使ったが，上に述べたことはこのことの証明になる．これがガリレイ変換である．これから論じようとする面白い場合は，sがもっと複雑で，例えば$s=\dfrac{at^2}{2}$という場合である．この場合には，$\dfrac{ds}{dt}=at$，$\dfrac{d^2s}{dt^2}=a$であって，加速度が一様である；あるいはもっともっと複雑で，加速度が時間の関数であるような場合もある．これは，太郎の立場からみると，力の法則は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x$$

であるが，次郎の立場からみると，力の法則は

$$m\frac{d^2x'}{dt^2}=F_{x'}-ma$$

だということになる．次郎の座標系は太郎の座標系に対して加速度をもっているので，maという余分の項が入ってくるのであって，ニュートンの法則を成り立たせるために，次郎はこれだけの大きさの力を補正に入れなければならないのである．いいかえると，ここに見かけ上の神秘的な新しい未知の力がでてくるのであるが，これはもちろん次郎の座標系がよくなかったから生じたのである．これは見かけの力の一例である．他の例は，座標系が**回転している**ときに起こる．

見かけの力の一例は，よく“遠心力”といわれるものである．回転している座標系，たとえば回転している箱の中にいる観測者にとっては，その力の源はわからないが，何か神秘的な力がはたらいて，壁の方に物がほうり出されるようにみえる．これらの力は，この観測者の座標系が，いちばん簡単なニュートンの座標系でないということから起こるだけの話である．

見かけの力についての面白い実験としては，器に水を入れて，机の上で加速度をつけておしてやるとよい．もちろん水には重力が下むきにはたらいている．しかし，水平な加速度があるので，見かけの力が水平に，加速度と反対のむきにはたらく．重力とこの見かけの力との合力は，上下方向とある角度をなす．そして加速度がはたらいている間，水の面はこの合力に垂直で，机の面との間にある傾きがあり，水

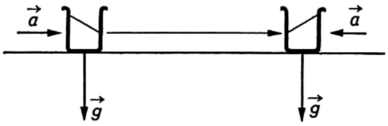


図 12-4　見かけの力の例

は器の後側の方が高くなる．おすのをやめると，摩擦のために器は減速し，見かけの力は逆むきになる．そして水は器の前面の方が高くなる(図 12-4)．

見かけの力について非常に大切なことは，それはいつも質量に比例するという点である；重力も質量に比例する．だから，**重力それ自身も見かけの力である**という可能性がある．重力というものは，単に我々が正当な座標系によっていないということから生ずるのだということはありえないだろうか？ 結局のところ，物体が加速度を受けているとみるならば，質量に比例する力がいつも考えられる．例えば，人が地球に対して静止している箱に閉じこめられていると，自分の質量に比例した力によって，その箱の床におしつけられていることを感じる．しかし地球が全然ないとし，しかも箱が静止しているとすれば，その中の人は空中に浮かぶ．一方，地球が全然ないとして，何かがそれを加速度 g で**ひつぱっていると**，箱の中の人は，物理学を考えて，重力と同じように，からだを床にひきつける見かけの力がはたらいていると思う．

アインシュタインの有名な仮説は，加速度は重力と同じようなものを生じ，加速度による力(見かけの力)は，重力と区別がつかないというのである；一つの力が与えられたとき，どれだけの部分が重力で，どれだけの部分が見かけの力であるということを知ることは不可能なのである．

重力は見かけの力である，我々が上に向かう加速度を受けているから下におしつけられているのだ，といっても差支えないようにみえる．しかし，地球の反対側にいる人はどうなのか？ 彼らもまた加速度を受けているのか？ アインシュタインによれば，重力を見かけの力とみなしてよいのは1時点1空間点に限るのであって，**世界の幾何学**は，ふつうのユークリッド幾何学よりも複雑なものであると考えられるのである．上に述べたところは，定性的であるにしか過ぎない．そしてここではだいたいの考え以上のことを話すつもりもない．重力が見かけの力の結果でありうるということを大ざっぱに示すために，ここに一つの例をもちだそう．もっともそれは純粋に幾何学的であって，現実の状態を示してはいない．我々がみんな2次元の世界に住んでいて，第3次元で何が起こっているか何も知らないと想像してみよう．我々は平面の上にいると思うだろうが，実は球面の上にいるとしよう．更に，地面に沿ってある物体を打ち出したとし，それには力がはたらいていないとする．この物体はどこへ行くか？ それは直線を進んでいるように見えるだろうが，物体は球面をはなれることはできない．球面の上では2点間の最短距離は大円である．それで物体は大円に沿って進む．他の物体を同じように，ただしちがう方向に打ち出すと，これも別の大円に沿って進む．我々は平面の上にいると思っているのだから，この二つの物体は時間がたつにつれてだんだん離れていくだろうと考える．しかしよくみると，いったん遠くに離れたあとは，こん

どはまた近よってきて，互いに引きあっているようにみえる．しかし，互いに引き合っているわけでは**ない**——この幾何学には何か“不可思議”なものがある．上に述べた例では，ユークリッド幾何学のどこが“不可思議”であるかを正しくあらわしてはいないが，それでも我々が幾何学を変えれば，引力はすべてなんらかの意味で見かけの力と結び付きうるということはわかる．引力に関するアインシュタインの考えはまずこういったことなのである．

12-6 核　　力

ここで我々の知っている力でまだ残っていたものは**核力**である．これについて，簡単に述べてこの章を終わろうと思う．核力は，原子核の中ではたらいている．この核力については盛んに論ぜられているのだけれども，二つの原子核間の力を計算した人はいまだかつてない．そして，現在のところ核力についての法則もわかっていないのである．この力の及ぶ範囲は非常に小さく，原子核の大きさとだいたい同じで，10^{-13} cm 程度のものである．粒子がたいへん小さく，またたいへん近くにあるのだから，ニュートンの法則では駄目で，あてはまるのは，量子力学の法則である．原子核のことを考えるのにあたって，我々はもはや力というものによらずに，それを2粒子間の相互作用のエネルギーという考えでおきかえる．このことについては，後に述べる．核力について式を書いてみても，それはどれもあらっぽい近似であって，たくさんの複雑なことを取り除いて考えているのである．式の一つは次のようなものである：核の中の力は距離の自乗に逆比例して変わるのではなくて，距離 r について，指数的に減る．その式は

$$F=\frac{1}{r^2}\exp\left(\frac{-r}{r_0}\right)$$

であって，ここに距離 r_0 は 10^{-13} cm の程度である．いいかえれば，粒子の間の力は 10^{-13} cm 程度以内の距離だと非常に強いが，かなり離れると，なくなってしまう．現在知られているところでは，核力は非常にこみ入ったものである；それを簡単に理解する方法はない．そして核力の背後にある基本的のからくりを調べる問題はすべて未解決なのである．例えば π 中間子のような奇妙な新粒子が続々発見されたのも，この問題を解決する努力からであるが，しかしこの核力の起源はいまだに明らかでない．

第 13 章

仕事と位置のエネルギー

13-1　落体のエネルギー

第4章で我々はエネルギーの保存について論じたが，そのとき我々はニュートンの法則は使わなかった．しかし，エネルギー保存ということがこのニュートンの法則からどう出てくるかを調べるのも，もちろん非常に大切なことである．事柄を明白にするために，いちばん簡単な例からはじめることにしよう．そしてそれから，だんだんむずかしい例に話を進めることにしよう．

エネルギー保存のいちばん簡単な例は，真下にだけしか動かない落体である．重力だけの影響で高さの変わる物体のエネルギーは，落下運動による運動のエネルギー T (K.E. とも書く) と，位置のエネルギー mgh，略して U あるいは P.E. であって，その和は一定である：

$$\underset{\text{K.E.}}{\frac{1}{2}mv^2}+\underset{\text{P.E.}}{mgh} = \text{一定},$$

あるいは，

$$T+U = \text{一定} \tag{13.1}$$

である．これから，これが真であることを証明しよう．しかし，真であることを証明するとはどういうことなのか？ 物体がどのような運動をするかは，ニュートンの第2法則からすぐわかる．また，速度が時間と共にどう変わるか，すなわち，速度は時間に比例して増し，高さは時間の自乗に従って変わるということを求めるのも，わけはない．この物体が静止していたゼロ点から測った距離は，速度の自乗にいくつかの定数をかけたものになって出てくる．このことも不思議でも何でもない．しかし，もう少し立ち入って考えてみよう．

そこで，ニュートンの第2法則を**直接に**使って，運動のエネルギーがどう変わるかを求めようというのである．それには，運動エネルギーを時間について微分し，そしてニュートンの法則を使うのである．$\frac{1}{2}mv^2$ を時間について微分すると，m は一定として

$$\frac{dT}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\frac{1}{2}m2v\frac{dv}{dt}=mv\frac{dv}{dt} \tag{13.2}$$

となる．ところが，ニュートンの第2法則から，$m\left(\frac{dv}{dt}\right)=F$ であるから

$$\frac{dT}{dt}=Fv \tag{13.3}$$

である．一般には $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$ となるのだが，いまは1次元の場合を考えてい

るのだから，力かける速度としておこう．

さてこの簡単な例では，力は一定で，鉛直方向で $-mg$(マイナスの符号は力が下むきであることを意味する)であり，速度は，鉛直位置すなわち高さ h が時間と共に変化する割合である．よって運動のエネルギーが変化する割合は $-mg\left(\dfrac{dh}{dt}\right)$ であり，この量が，他の量が変化する割合に等しいとは，奇跡中の奇跡である！ それは mgh が変化する割合である！ だから，時間がたつにつれて，運動のエネルギーの変化と，mgh という量の変化とは，値は等しく符号は反対で，よってこの二つの和はいつも一定である．証明終り．

我々は，力が一定の場合に，位置のエネルギー mgh を運動のエネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ に加えると，エネルギーが保存するということを，ニュートンの第2法則から証明したわけである．そこでもう少し立ち入って，これを一般化することができるかどうかを調べ，そして我々の理解を進めよう．エネルギー保存は自由落下の物体にだけ成り立つのだろうか，それともより一般的のことなのであろうか？ エネルギー保存についての上の議論から考えると，重力を受けて，摩擦のない曲線の上を一つの点から他の点へ運動している物体についても成立しそうに思われる(図 13-1)．物体がはじめの高さ H のところから測って，ある高さ h のところにきたとする．こんどは速度が上下方向ではないけれども，やはり同じ式が成り立つはずである．この法則がこんども正しいのは何故であるかを理解したいものである．こんども前と同じようにして，運動エネルギーの時間的変化の割合を求めよう．これは前と同じく $mv\left(\dfrac{dv}{dt}\right)$ である．ところが $m\left(\dfrac{dv}{dt}\right)$ は運動量の大きさの時間的変化の割合，すなわち，**運動の方向にはたらく力**——接線方向の力 F_t である．よって

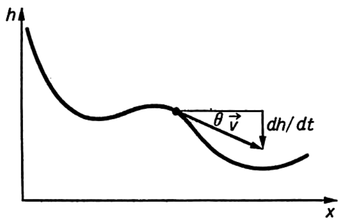


図 13-1 重力の作用によって摩擦のない曲線にそって運動する物体

$$\frac{dT}{dt} = mv\frac{dv}{dt} = F_t \cdot v$$

である．ところがスピードというのは，曲線に沿った距離が時間的に変化する割合，$\dfrac{ds}{dt}$ であり，また接線方向の力 F_t は mg ではなく，それよりも弱い．その比は曲線に沿って測った距離 ds が鉛直距離 dh に対する比に等しい．いいかえれば

$$F_t = -mg\sin\theta = -mg\frac{dh}{ds}$$

であるから，

$$F_t\frac{ds}{dt} = -mg\left(\frac{dh}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right) = -mg\frac{dh}{dt}$$

となって，ds は消える．このようにして $-mg\left(\dfrac{dh}{dt}\right)$ が得られたが，これは前と同じく mgh の変化の割合に等しい．

エネルギー保存ということが力学において一般にどのような役目をするかをはっきり理解するために，役に立つような考えをいろいろ述べてみよう．

まず第一に，一般に3次元において，運動エネルギーが時間によっ

て変化する割合を考える．3次元の場合の運動エネルギーは

$$T=\frac{1}{2}m(v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2)$$

である．これを時間について微分すると，めんどうな項が三つ出てくる：

$$\frac{dT}{dt}=m\left(v_x\frac{dv_x}{dt}+v_y\frac{dv_y}{dt}+v_z\frac{dv_z}{dt}\right). \tag{13.4}$$

ところが，$m\left(\frac{dv_x}{dt}\right)$は，物体に$x$方向にはたらく力$F_x$である．だから方程式(13.4)の右辺は，$F_xv_x+F_yv_y+F_zv_z$となる．ベクトル解析を思い出してみると，これは$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$である．したがって

$$\frac{dT}{dt}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \tag{13.5}$$

である．次のようにすると，もっとはやくこの結果を得ることができる：$\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$が二つのベクトルであって，両方とも時間の関数であるとして$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$を微分すると，一般に

$$\frac{d(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}{dt}=\frac{\mathbf{a}\cdot d\mathbf{b}}{dt}+\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)\cdot\mathbf{b} \tag{13.6}$$

である．そこで$\mathbf{a}=\mathbf{b}=\mathbf{v}$とすると，

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{dt}=\frac{d\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right)}{dt}=m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt} \tag{13.7}$$

となる．

運動のエネルギー，更に一般的にエネルギーという概念は非常に重要なので，上のような方程式の大切な項にいろいろな名前が与えられている．$\frac{1}{2}mv^2$は，すでに知っているように**運動エネルギー**である．$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$は**仕事率**という：物体にはたらく力と物体の速度との積(スカラー乗積)は，その力によって物体に与えられる仕事率である．そこで次の見事な定理が得られる：“一つの物体の運動エネルギーが時間的に変化する割合は，それにはたらく力が消耗する仕事率に等しい．”

しかし，エネルギー保存のことを勉強するためにもう少し深く立ち入ってみよう．非常に短い時間dtの間に，運動エネルギーはどう変わるかを求めてみよう．方程式(13.7)の両辺にdtをかけると，運動エネルギーの微小変化は，力と動いた距離とのスカラー積であることがわかる：

$$dT=\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}. \tag{13.8}$$

これを積分すると

$$\Delta T=\int_1^2\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \tag{13.9}$$

となる．この式の意味は何か？　それは，物体が力を受けて，曲線の途にそって**どんな運動をしていても**，曲線の1点から他の点にいくあいだに生ずる運動エネルギーの変化は，曲線にそった力の成分と微小変位$d\mathbf{s}$との積を，この2点の間で曲線にそって積分したものに等しい，ということである．この積分にも名前がついていて，**力が物体になした仕事**，というのである．すぐわかるように，**仕事率は1秒間に**

なされる仕事に等しい．また，**運動の方向**における力の成分だけが，仕事に関係するのである．簡単な落体の例では，力は鉛直方向で，成分はたった一つ，F_z，すなわち $-mg$ だけしかない．この場合に物体の運動がどんなものであっても，例えば放物線であっても，$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ は $F_xdx+F_ydy+F_zdz$ となって，その中で他の成分はゼロであるから，$F_zdz=-mg\,dz$ しか残らない．だから，この場合には，

$$\int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\int_{z_1}^{z_2} -mg\,dz=-mg(z_2-z_1) \quad (13.10)$$

であって，やはり物体が落下した**鉛直距離**だけが，位置のエネルギーに関係してくるのである．

単位について一言．力は単位ニュートンで測り，距離をかけて仕事を求めるのだから，仕事はニュートン・メートル(N・m)ではかられる．しかしニュートン・メートルはあまり歓迎されず，**ジュール**(J)が使われることが多い．1ニュートン・メートルが1ジュールである；仕事はジュールで測る．そうすれば仕事率は，1秒につき何ジュールかということであって，これを**ワット**(W)ともいう．ワットに時間をかければ，なされた仕事になる．我々の家で電気会社のする仕事は，ワットかける時間である．キロワット時，すなわち1000ワットかける3600秒，3.6×10^6 ジュールなどということは，ここから出てくるのである．

エネルギー保存の法則の別の例をあげよう．ここに物体があって，はじめ運動エネルギーをもっていて非常に速く動いているとする．そしてそれが摩擦のある床をすべっているとする．やがて物体は止まってしまう．はじめは運動エネルギーは**ゼロでなかった**が，最後には**ゼロになる**．摩擦がある場合には，運動のむきと反対のむきに力の成分があるわけだから，ここでは力が仕事をするわけで，エネルギーはつねに消費される．しかしこんどは，重力の場で，一つの鉛直面の中でおもりが摩擦なしでピボットを軸として振動しているとする．この場合に起こる事柄は前の場合とちがう．それは，おもりが上に動くときにも下に動くときにも力は下向きである．そして $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ は上に動くときと下に動くときとで符号がちがう．上り途と下り途の対応する位置のそれぞれでは，$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ は大きさがちょうど等しく符号が反対であるから，この場合には，積分の結果は結局ゼロになる．だからおもりが一番下のところにもどったときもっている運動エネルギーは，前にそこを通ったときのエネルギーと同じである；これがエネルギー保存の原理である．(摩擦の力がある場合には，ちょっと考えるとエネルギー保存が成り立たないようにみえる．だからエネルギーの他の形態を求めなければならない．一つの物体が摩擦で他のものとこすれあうと熱が発生することになるのであるが，ここではそのことは知らないとしておく．)

13-2　引力によってなされる仕事

次に論ずるのは，上に述べたものよりずっとむずかしい問題である；すなわち上に述べた場合とちがって，力が一定でなく，また単に鉛直に限らない場合である．例えば太陽のまわりをまわる惑星，あるいは地球のまわりをまわる衛星について考えようと思う．

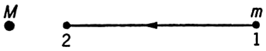


図 13-2　小さな質量 m は引力によって大きな質量 M にむかって落ちる

まず，一つの物体が点1から出発し，太陽なり地球なりへ**まっすぐに**落ちてくる運動を考えよう(図 13-2)．このような場合にも，エネルギー保存の法則があるだろうか？　以前の場合とちがうのは，こんどは運動するにつれて力が**変化し**，一定でないということである．すでにわかっているとおり，力は $\dfrac{GM}{r^2}$ と運動する物体の質量 m とをかけたものである．物体が地球にむかって落ちてくれば，たくさん落ちるにつれて運動エネルギーはふえることはたしかである．もっとも，高さによって力がどのように変わるかは，ここでは問題としないでおく．そこで問題は，位置のエネルギーの式で mgh とはちがうもの，すなわち，地球からの距離についてちがう関数形になっている別の式があって，やはりエネルギー保存が成り立つようなものが求められるかどうかということである．

この1次元の場合を取り扱うのはやさしい．何故ならば，運動エネルギーの変化は，$-\dfrac{GMm}{r^2}$ と変位 dr との積を運動の一端から他端まで積分したものに等しいことがわかっているからである：

$$T_2-T_1=-\int_1^2 GMm\frac{dr}{r^2}. \tag{13.11}$$

この場合には力と変位とが同じ方向であるから，cos はいらない．$\dfrac{dr}{r^2}$ を積分するのはわけない；結果は $-\dfrac{1}{r}$ である．だから，方程式(13.11)は

$$T_2-T_1=+GMm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) \tag{13.12}$$

となる．ここで位置のエネルギーとして，別の式が得られた．方程式(13.12)は，$\left(\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{GMm}{r}\right)$ という量を，点1，点2，あるいは他のどんな点について計算しても，それは一定であることを示している．

我々はここで引力の場において，鉛直運動に対して位置のエネルギーを与える式を求めたわけであるが，ここに面白い問題がある．引力の場の中で永久運動を作ることができるか？　引力の場は場所によってちがう；場所がちがえば方向も強さもちがう．そこで固定した摩擦のない途を使ってこんなことができはしないか：まず1点からはじめて，一つの物体を他の点に持ち上げる，次にある弧にそって動かして第3の点に行かせる，それからある距離だけおろす，それからある斜面にそってもどし，別の途をとおってひっぱり上げる．そして出発点にもどしたときに，引力の場によって仕事がなされ，運動のエネルギーがふえているというようなことはできないか．曲線の途を工夫して，出発点にもどったとき，前よりも少し速くなっていて，それをグルグル繰り返し，永久運動になるようにすることはできるか？　永久運動

というものは不可能なのであるから，上のようなことも不可能であるということになるはずである．我々は次のことがらが正しいことを示さなければならない：摩擦がないのだから，この物体がもとに戻るときは速度は大きくも小さくもない——どんな閉曲線でもグルグルまわりつづけることができる．別のいい方をすれば，引力の場で完全に1回まわったときなされる仕事は，ゼロでなければならない．それは，もしもゼロでなかったら，グルグルまわることによってエネルギーを得ることができるからである．(もしも仕事がゼロよりも小さくて，一方にまわると速度が小さくなるなら，反対にまわればよい．力は位置だけによってきまり，むきによらないからである；一方のまわり方でプラスならば，他のまわり方はマイナスであるから，それがゼロでない限り，どちらかのまわり方をすれば永久運動が得られることになる.)

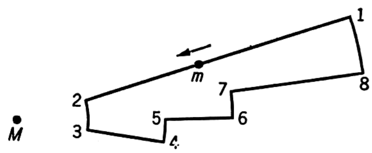


図 13-3 引力の場における閉曲路

仕事ははたしてゼロであろうか？ ゼロであることを証明してみよう．まず，なぜゼロであるかというわけを少しばかり説明して，それから数学的に少していねいに調べよう．図 13-3 に示したような簡単な途を使ったとしよう．小さな質量は，点 1 から点 2 にゆき，それから円に沿って 3 に来て，4 にもどり，次に 5, 6, 7, 8 を経て，最後に 1 にもどる．これらの線はみなMを中心とする円の半径か円周になっている．m にこの途を辿らせるのにどれだけの仕事がなされるか？ 点 1 と点 2 との間では，仕事は，GMm に，2 点の $\dfrac{1}{r}$ の差をかけたものである：

$$W_{12}=\int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\int_1^2 -GMm\frac{dr}{r^2}=-GMm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right).$$

2 から 3 までは，力は途に対して直角であるから，$W_{23}\equiv 0$. 3 から 4 までの仕事は

$$W_{34}=\int_3^4 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=-GMm\left(\frac{1}{r_4}-\frac{1}{r_3}\right)$$

となる．これと同様にして，$W_{45}=0$，$W_{56}=-GMm\left(\dfrac{1}{r_6}-\dfrac{1}{r_5}\right)$，$W_{67}=0$，$W_{78}=-GMm\left(\dfrac{1}{r_8}-\dfrac{1}{r_7}\right)$，$W_{81}=0$ であることがわかる．よって

$$W=GMm\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_5}-\frac{1}{r_6}+\frac{1}{r_7}-\frac{1}{r_8}\right).$$

しかし，$r_2=r_3, r_4=r_5, r_6=r_7, r_8=r_1$ であるから，$W=0$ である．もちろん，いまの曲線はあまりくだらないのではないかと考えられる．**現実の曲線**を使ったらどうなるか？ 現実の曲線についてやってみよう．まず，現実の曲線は，図 13-4 のように，つねに，鋸の歯のギザギザでよくあらわすことができることをたしかめ，そしてそれ故に，等々，で証明終りとしたいところである．しかし，少しばかり考えないと，まず小さな三角形でもそれをぐるりと一まわりするときになされる仕事がゼロであることは，明らかではない．図 13-4 のように三角形の一つを拡大しよう．a から b，b から c へ行くときなされる仕事は，a から c へ直接に行くときなされる仕事に等しいだろうか？ 力はある

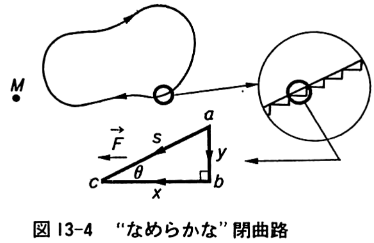


図 13-4 “なめらかな”閉曲路
その一部を拡大して半径方向と円周方向のきざみで近似してあるところを示す 一きざみを拡大してみたところ

きまった方向にはたらいているとする；例として三角形は辺 bc がこの力の方向であるようにとる．そして三角形は非常に小さくて，三角形全体にわたって一定であるとしてよいとする．a から c まで行くときになされる仕事は何か？ 力は一定であるから，それは

$$W_{ac}=\int_a^c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=Fs\cos\theta$$

である．次に三角形の他の2辺をとおって行くときなされる仕事を計算しよう．上下の辺 ab では，力は ds に垂直だから仕事はゼロである．水平の辺 bc では

$$W_{bc}=\int_b^c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=Fx$$

である．$s\cos\theta$ は x に等しいから，小さい三角形の2辺に沿って動くときになされる仕事は，斜辺に沿って動くときになされる仕事に等しいことがわかる．前に証明したように，図13-3のようにギザギザがいくつもある途に沿ってなされる仕事はゼロである．また角のギザギザを進む代りに直接に近道をしても仕事は同じであることを証明した(これはギザギザがこまかいときであるが，ギザギザはどんなにでもこまかくできる)；それゆえ，**引力の場では，どんな途でもひとまわりすれば仕事はゼロである**．

これは実に注目すべき結果である．惑星の運動についてこれまで知らなかったことが，このことから出て来る．惑星が太陽のまわりを運動するとき(そばには何物もなく，他の力はないとする)，1点における速さの自乗からある定数をひいて，その点までの半径でわると，軌道上のあらゆる点でその値は等しいということが出て来る．例えば，惑星が太陽に近くなればなるほど，その速さは速くなるのだが，それはどのくらいか？ それは次のとおりである：惑星を太陽のまわりにまわす代りに，その速度の方向を変え(大きさは変えない)，半径方向に運動させ，その一つの半径のところからもとの半径のところまで落してやったとする．そうすると，そこでの速さはもとの軌道でもっていた速さと同じである．この途もギザギザの一種であるからこのことは当然である．同じ距離のところに戻れば，運動エネルギーも同じである．だからこの運動が現実の自然のままのものであっても，あるいはまた摩擦のない束縛によって途の方向をかえられても，惑星が一つの点に到達するときにもっている運動エネルギーは同じである．

そこで，前にやったように，惑星の軌道運動を数値的に取り扱うときに，この一定の量，すなわちエネルギーを各段階で計算してみれば，我々が誤差をおかしているかどうかを検すことができる．これは一定でなければならないのである．表9-2の軌道ではエネルギーは変化していない*．もっとも，はじめと終りとでは，1.5% くらい変わっている．なぜだろう？ 数値計算では間隔を有限にとったが，そのためか，

* 表9-2の単位でエネルギーは $\frac{1}{2}(v_x^2+v_y^2)-\frac{1}{r}$ である．

あるいは，計算の途中のどこかで少し算術を間違えたか，どちらかである．

次にまた別の場合についてエネルギーを考えよう：それはバネにおもりをつるした問題である．はじめつりあっていたところからおもりを動かすと，その変位に比例してもとへ戻す力がはたらく．この場合にもエネルギー保存の法則を導き出すことができるか？ できる．そのような力によってなされる仕事は

$$W=\int_0^x Fdx=\int_0^x -kx\,dx=-\frac{1}{2}kx^2 \qquad (13.13)$$

である．それゆえ，バネのおもりに対しては，おもりの運動のエネルギーたす $\frac{1}{2}kx^2$ は一定である．どうしてそうなるかを考えてみよう．おもりを下に下げる；おもりは静止しており，速さはゼロである．しかし，x はゼロではなく極大である．だから何かエネルギーがあるはずだが，これはもちろん位置のエネルギーである．さておもりをはなすと，物事が起こりはじめる(くわしくは述べない)．しかしどの瞬間をとってみても，運動のエネルギーと位置のエネルギーとの和は一定でなければならない．例えばおもりがちょうどはじめのつりあいのところにくると，位置 x はゼロであるが，これは v^2 が一番大きいときである．x^2 が大きくなれば v^2 が小さくなる，等々．このようにおもりが上下するにしたがって，x^2 と v^2 とのつりあいがいつも保たれている．そこでここにまた法則ができた，すなわち，バネの力が $-kx$ であると，位置のエネルギーは $\frac{1}{2}kx^2$ である．

13-3 エネルギーの和

さてこんどは，物体がたくさんあったら，どんなことになるかを，より一般的に考えることにする．物体がたくさんあるとして，それに $i=1,2,3,\cdots$ と印をつける．そしてみな互いに引力を及ぼしてひきあっているという複雑な問題を考える．どんなことが起こるだろうか？すべての粒子の運動エネルギーを加えあわせ，これにすべての粒子の対の相互の引力による位置のエネルギー $-\frac{GMm}{r_{ij}}$ の総和を加えると，それは定数になる．

$$\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2+\sum_{(i,j\text{の対})}-\frac{Gm_im_j}{r_{ij}}=\text{一定}. \qquad (13.14)$$

このことを証明しよう．どうやったらよいだろうか？ 両辺を時間について微分すればゼロになる．$\frac{1}{2}m_iv_i^2$ を微分すると，方程式(13.5)のときと同じように速度の微分係数が出てくるが，これは力である．この力を，ニュートンの引力の法則からわかっている力でおきかえると，それは

$$\sum_{\text{対}}-\frac{Gm_im_j}{r_{ij}}$$

を時間で微分したものと同じになる．運動エネルギーを時間で微分すると

$$\frac{d}{dt}\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$$

$$= \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i$$

$$= \sum_i \left\{ \left(\sum_j - \frac{G m_i m_j \mathbf{r}_{ij}}{r^3{}_{ij}} \right) \cdot \mathbf{v}_i \right\} \qquad (13.15)$$

となる．位置のエネルギーを時間で微分すると，

$$\frac{d}{dt}\sum_{対} - \frac{G m_i m_j}{r_{ij}} = \sum_{対} \left(+ \frac{G m_i m_j}{r_{ij}{}^2} \right) \left(\frac{dr_{ij}}{dt} \right)$$

であるが，

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

であるから，$\mathbf{r}_{ij} = -\mathbf{r}_{ji}$, $r_{ij} = r_{ji}$ を考えに入れて，

$$\frac{dr_{ij}}{dt} = \frac{1}{2r_{ij}} \left\{ 2(x_i - x_j)\left(\frac{dx_i}{dt} - \frac{dx_j}{dt} \right) + 2(y_i - y_j)\left(\frac{dy_i}{dt} - \frac{dy_j}{dt} \right) + 2(z_i - z_j)\left(\frac{dz_i}{dt} - \frac{dz_j}{dt} \right) \right\}$$

$$= \mathbf{r}_{ij} \cdot \frac{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j}{r_{ij}}$$

$$= \mathbf{r}_{ij} \cdot \frac{\mathbf{v}_i}{r_{ij}} + \mathbf{r}_{ji} \cdot \frac{\mathbf{v}_j}{r_{ji}}$$

となる．よって

$$\frac{d}{dt}\sum_{対} - \frac{G m_i m_j}{r_{ij}} = \sum_{対} \left(\frac{G m_i m_j \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}{}^3} \cdot \mathbf{v}_i + \frac{G m_j m_i \mathbf{r}_{ji}}{r_{ji}{}^3} \cdot \mathbf{v}_j \right) \qquad (13.16)$$

となる．ただし $\sum_i \{ \sum_j \}$ と $\sum_{対}$ との意味をよく注意しておく必要がある．方程式(13.15)において，$\sum_i \{ \sum_j \}$ の意味は，i は $i=1, 2, 3, \cdots$ の値を順次にすべてとり，おのおのの i の値に対して，j は i 以外のすべてをとるというのである．だから，もしも $i=3$ ならば，j のとる値は $1, 2, 4, \cdots$ である．

ところが，一方，方程式(13.16)では，$\sum_{対}$ の意味は，ある i とある j は1回しか出てこないのである．1と3の粒子の対が和に寄与する項はたった一つである．これをうまくやるには，i を $1, 2, 3, \cdots$ のすべてに変化させ，おのおのの i について j を変化させるのは，i よりも**大きい**ものだけとすることにすればよい．例えば $i=3$ ならば，j のとる値は $4, 5, 6, \cdots$ だけである．しかし，おのおのの i, j からは，二つの寄与があって，一つは $\mathbf{v}_i$ を含み，他は $\mathbf{v}_j$ を含んでいる．そして，これらの項は，方程式(13.14)の項と同じような形をしていて，しかも方程式(13.14)では i と j の値はすべて($i=j$ を除いて)出てきて和に含まれているのである．だから，各項を一つ一つ対応させていくと，方程式(13.16)と(13.15)とは全く同じでただ符号がちがうだけであり，したがって運動エネルギーたす位置のエネルギーを時間で微分したものは，たしかにゼロであることがわかる．これからわかるように，物

体がたくさんあるとき，**運動エネルギーは個々の物体からの寄与の和であり**，また位置のエネルギーも簡単で，すべての対の間のエネルギーの寄与の和である．このようにそれがすべての対のエネルギーで**あるわけ**は次のように考えればわかる：物体を互いにある距離に遠ざけるためになすべき仕事の全体の量を求めるとする．これを何段にもわけて，無限に遠くて力のはたらいていないところから，物体を一つずつもってくるとする．最初に第1号をもってくるが，それに力を及ぼすものはまだ何もないから仕事はいらない．次に第2号をもってくるが，こんどは $W_{12}=-\dfrac{Gm_1m_2}{r_{12}}$ の仕事が必要である．さてここが大切なところなのだが，次のものを3の位置へもってくるとする．どの瞬間においても第3号にはたらく力は二つの力――第1号が及ぼす力と第2号が及ぼす力――の和としてあらわすことができる．したがって**なされる仕事はおのおのによってなされる仕事の和である**．それは，$\mathbf{F}_3$ を二つの力の和にわけて

$$\mathbf{F}_3=\mathbf{F}_{13}+\mathbf{F}_{23}$$

とすれば，仕事は

$$\int \mathbf{F}_3\cdot d\mathbf{s}=\int \mathbf{F}_{13}\cdot d\mathbf{s}+\int \mathbf{F}_{23}\cdot d\mathbf{s}=W_{13}+W_{23}$$

となるからである．すなわち，全体の仕事は，第1の力に対する仕事と第2の力に対する仕事の和であって，おのおのが独立にはたらいているのと同じことである．このようにやっていくと，たくさんの物体をある配列に集めるのに必要な仕事の全体の量は，まさに方程式(13.14)に位置のエネルギーとして与えられているものなのである．引力は力の重ね合せの原理に従うので，位置のエネルギーを粒子のおのおのの対に関する和としてあらわすことができるのである．

13-4 大きな物体による引力の場

さて，次に計算するのは，**質量の分布**がある場合の場であって，これはいろいろの物理の問題にあらわれてくる．これまで考えて来た分布は粒子の質量だけであった．そこで粒子が二つ以上あるときそれによって生ずる力を計算することが大切である．最初に，無限にのびた平面質量が一つの質量に及ぼす引力を求めよう．この面質量が P 点にある単位質量に及ぼす力(図13-5)は，もちろんその面の方に向く．面から点までの距離を a とし，またこの大きな面の単位面積の質量を μ とする．μ は一定であるとする：板は一様である．さて P 点からの最短点 O からの距離が，ρ と $\rho+d\rho$ との間にある質量 dm によって生ずる引力の場 $d\mathbf{C}$ は何程か？ 答：$d\mathbf{C}=G\left(\dfrac{dm\mathbf{r}}{r^3}\right)$．しかしこの場は $\mathbf{r}$ 方向であるから，$\mathbf{C}$ を求めるのに微小なベクトル $d\mathbf{C}$ をすべて加えると，その x 成分だけが残る．$d\mathbf{C}$ の x 成分は

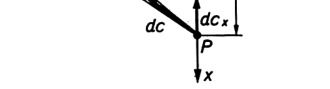


図 13-5 無限の物質平板によって質点にはたらく重力 F

$$dC_x=G\frac{dmr_x}{r^3}=G\frac{dma}{r^3}$$

である．P から同じ距離 r にある質量 dm は，すべて同じ dC_x を生じ

るから，ρ と $\rho+d\rho$ との間の**輪**の全質量 dm は $dm=\mu 2\pi\rho\, d\rho$ である（$d\rho\ll\rho$ だから，$2\pi\rho\, d\rho$ は半径が ρ で幅が $d\rho$ の輪の面積である）．よって

$$dC_x = G\mu 2\pi\rho\frac{d\rho a}{r^3}.$$

ところが $r^2=\rho^2+a^2$ であるから，$\rho\, d\rho=r\, dr$ である．したがって

$$C_x = 2\pi G\mu a\int_a^\infty\frac{dr}{r^2} = 2\pi G\mu a\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\infty}\right) = 2\pi G\mu \qquad (13.17)$$

となる．このように力は距離 a に関係しない！　何故だろうか？　どこかで間違えたのだろうか？　板から遠くへ行けば行くほど，力は弱くなると考えるかも知れない．しかしそれはちがう！　板に近いと，大部分の質量がひっぱる角度は，引力にあまりきいてこない；板からの距離がずっと大きくなると，板の方にひっぱるのに都合のいい位置にある物質が多くなる．板から遠くなると，力は逆自乗で小さくなるが，同じ円錐，同じ角にある物質が，ちょうど距離の自乗に従って**ずっと多くなる**！　一つの質量による力の強さが距離によって変化するのと，円錐に含まれる質量が距離の変化によって変化するのとがちょうど逆になっているのだから，一つの円錐について，その微小変化による寄与は距離に無関係である．このことに注意すれば，上のことは厳密に証明される．もっとも力は一定とはいえない．面の反対側に行けば，力の符号は反対になる．

これで，実は電気の問題もとけたことになるのである：帯電した板があって，単位面積あたりの電荷の量が σ であるとすると，板からはなれた点における電場は $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ であって，板が正に帯電していれば力は外むき，負に帯電していれば内向きである．これを証明するには，引力で G が，電気で $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ と同じ役目をしていることに注意すればよい．

さてここに2枚の板があって，一方には正電荷 $+\sigma$ があり，他方には負電荷 $-\sigma$ があり，その間の距離が D であるとする．電場はどうか？　2枚の板の外側では，ゼロである．何故か？　それは，一方の板は引力を及ぼし，他方の板は斥力を及ぼし，力は距離に関係しないから，この二つが打ち消しあってしまうのである！　また，2枚の板の**間**では，力は1枚による力の2倍であって $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ であることは明らかで，そのむきは正の板から負の板の方へ向かっている．

そこで非常に興味のある大切な問題がある．その解は，地球がその表面か外側にある点に及ぼす力は，地球の全質量がその中心にあるとしたときと同じだということであるが，これまでずっとこれを仮定してやってきた．地球に近いときは，質量は我々に非常に近い部分もあるし，また遠いのもあるというようなわけだから，この仮定が正しいということは，明白であるとはいえない．すべての部分からの影響を加えると，全質量を中心においたときと全く同じ力になるのは，一つの奇跡のようである！

次にこの奇跡が正しいことを示そう．そのために，まず，地球全体を考える代りに，薄い一様な中空の球殻を考えよう．この球殻の全質量をmとし，球の中心から距離Rにある質点m'の**位置のエネルギー**を計算し(図13-6)，そしてこれが質量mが中心の点にあったとした場合と同じであることを示そう．(位置のエネルギーを取り扱うときには，角度を気にしないでよいから，場を取り扱うのよりもやさしく，質量の部分部分による位置のエネルギーをみな加えればよい.) 一つの平面の切口と中心との距離をxとすると，厚さdxにある質量はみなPから等距離rのところにある．それでこの輪による位置のエネルギーは$-\dfrac{Gm'dm}{r}$である．厚さdxの切片の質量はいくらかというと，

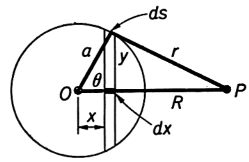


図 13-6 物質あるいは電荷の薄球殻

$$dm = 2\pi y\mu ds = \frac{2\pi y\mu dx}{\sin\theta} = \frac{2\pi y\mu dx\cdot a}{y} = 2\pi a\mu dx$$

である．ここに$\mu=\dfrac{m}{4\pi a^2}$は球殻の質量の面密度である．(一般に球面を帯状にきると，その面積は半径方向の厚さに比例する.) したがってdmによる位置のエネルギーは，

$$dW = -\frac{Gm'dm}{r} = -\frac{Gm'2\pi a\mu dx}{r}$$

である．ところが

$$r^2 = y^2+(R-x)^2 = y^2+x^2+R^2-2Rx$$
$$= a^2+R^2-2Rx$$

であるから

$$2rdr = -2Rdx$$

あるいは

$$\frac{dx}{r} = \frac{dr}{R}$$

である．したがって

$$dW = -\frac{Gm'2\pi a\mu dr}{R}.$$

よって

$$W = -\frac{Gm'2\pi a\mu}{R}\int_{R-a}^{R+a} dr$$
$$= -\frac{Gm'2\pi a\mu}{R}2a = -\frac{Gm'(4\pi a^2\mu)}{R}$$
$$= -\frac{Gm'm}{R} \tag{13.18}$$

である．このように，うすい球殻では，その外にある質量m'の位置のエネルギーは，球殻の質量が全部中心に集まったとしたときと同じである．地球は球殻が何枚も重なったものと考えられ，その球殻のおのおのによるエネルギーは，その質量と中心からの距離によってきまる；それを全部加えると，**全質量**になり，したがって地球の力は，それが全部中心に集まったとしたときと同じになる！

もしも点が球殻の**内側**にあったらどうなるかは注意を要する．Pを

内側として上と同じ計算をすると，やはり二つの r の差が出てくるが，こんどは $a+R-(a-R)=2R$ という形になり，これは中心からの距離の2倍になる．いいかえれば，$W=-\dfrac{Gm'm}{a}$ となって，これは $\boldsymbol{R}$ **に無関係**，位置に無関係となる；すなわち**どこにいても**エネルギーは同じである．それゆえ，力はない；球殻の内側で動くのには仕事はいらない．物体が球殻の内側のどこにあっても位置のエネルギーが同じであるならば，それには力がはたらかない．力は内側にはなく，外側にあるだけであり，外側の力は質量が全部中心にあるとしたときと同じである．

第14章

仕事と位置のエネルギー（結び）

14-1 仕　事

物理学には新しい考えや結論がたくさんあって，それが枢要な役目を演じている．前章でそれらのものについて述べたが，このような考えは非常に大切であるから，この章全部を使って，もう少しくわしく調べるのも無駄ではあるまい．この章では，“証明”をくりかえしたり，また結果を求めるための個々の手法などをくりかえしたりすることはしない．その代り，これらの考えそれ自身を論ずるということに力を注ごうと思う．

厖大な量の事実とか考えとかいうものは，互いにある種の関係で結ばれており，またそういう関係が存在するということは“証明”し，“説明”することができるのであるが，数学を要するような専門的な問題を論ずるときには，これらの事実や考えをこうしてよく理解し，記憶に蓄積しておかなければならない．証明というものと，証明によって確立される関係というものとは，とかく混同されがちである．いうまでもなく，学んで頭に入れるのが大切なのは，この関係なのであって，その証明法ではない．場合によっては，これこれが正しいということは“証明できる”というだけのこともあり，また実際に証明することもある．たいていの場合，その証明はうまく考えてあって，何よりもまず，黒板や紙の上にはやく書きやすいように工夫してあり，できるだけすらりとみえるようになっている．そのため，証明は簡単にみえるのだが，実はどうしてそんなものではない．実際，一つのことを計算するのに，教師や著者は何時間もかけていろいろの方法を試みてみる．そして一番速くすむ方法をみつけて，これが最短時間でできる証明であることを証明するのである！　証明をみたときに忘れてはならないことは，証明それ自身ではなく，これこれのことが正しいということを**証明することができる**ということである．証明が数学的の手段や“技巧”を含んでいて，それが初めてお目にかかるようなものであっても，その“技巧”そのものを重視してはいけない．そこに出て来る数学的の考えをこそ重視すべきであるのはいうまでもない．

この講義のようなものの中に出てくるいろいろな説明には，教師が自分が1年生の物理を習ったとき以来，ずっと覚えていたなどというものは，一つもありはしない．とてもそんなことはない：教師が覚えているのは，これこれのことが正しいということだけなのであって，どうやって証明するかは，そのときどきの必要に応じてそのつど工夫

するのである．一つの問題が充分によくわかっている人なら，誰でもこのようにやれるのである．証明を覚えるということは無益である．この章で前に述べたいろいろの命題を証明することはやめて，結果を要約するに止めるとしたのは，このためである．

まずよく会得すべき考えは，**一つの力によってなされる work** である．この work という物理学上の言葉は，“世界の worker よ，団結せよ”というふつうの言葉とは意味がちがう．内容もちがう．物理学上の仕事は，$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ であらわされ，“$\boldsymbol{F}$ と $d\boldsymbol{s}$ とのスカラー積の線積分”である．それによれば，力が例えば一方向であって，この力のはたらく物体がある方向に動いたとすると，**その変位の方向における力の成分だけ**が仕事をするのである．もしも力が一定で，変位が有限距離 $\Delta\mathbf{s}$ であったとすると，力がこの距離だけ動いてなす仕事は，$\Delta\mathbf{s}$ 方向における力の成分に Δs をかけたものである．法則のなかでは“力かける距離”といわれているが，ほんとうの意味は，変位の方向における力の成分かける Δs，あるいは，同じことだが，力の方向における変位の成分かける $\mathbf{F}$ である．変位に直角な方向の力は，全然仕事をしないことはいうまでもない．

さて，変位ベクトルを成分にわけて考える．すなわち，実際の変位が $\Delta\mathbf{s}$ であるとして，それを x 方向の変位成分 Δx，y 方向の成分 Δy，z 方向の成分 Δz にわけて考えると，一つの物体を一カ所から他の所に動かす仕事も三つにわけて計算することができる．すなわち，x 方向の仕事，y 方向の仕事，z 方向の仕事である．x 方向の仕事に関係するのは，この方向の力の成分 F_x だけである．他の方向についても同じで，したがって仕事は $F_x\Delta x+F_y\Delta y+F_z\Delta z$ である．力が一定でなく，また変位の途も複雑な曲線である場合には，その途をたくさんの小さな $\Delta\mathbf{s}$ にわけて，おのおのの $\Delta\mathbf{s}$ にそって物体を動かすときにされる仕事を加えあわせ，$\Delta\mathbf{s}$ がゼロになったときの極限を求める．これが，“線積分”である．

いまここに述べたことは，すべて $W=\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ という式に含まれている．これは大した式だというのは，結構であるが，そのほんとうの意味を理解し，その結果がどういうことになるかということを理解するのは，また別の問題である．

物理学における“仕事”という言葉の意味は，日常使われているときの意味とは大ちがいであるから，ある特殊な場合には，同じでないことがあることに充分注意しなければならない．例えば，仕事の物理学的定義によれば，100ポンドの物をしばらくの間地面からもち上げていても，仕事はしていない．けれども，もちつづけていると，汗が出たり，ふるえたり，呼吸があらくなったりして，階段をかけ上がっているのと同じようになることは，誰でも経験しているとおりである．階段をかけ上がるのは仕事をしているということになるが(物理学によればかけ下りるときには，外界から仕事をもらう)，物を一カ所に持っているだけでは，仕事はいらない．物理学における仕事の定義は，

生理学における定義とちがうのは明らかであって，そのわけを次に簡単に考えてみよう．

我々がおもりをもっているときに，“生理学的”の仕事が必要であることは，たしかである．なぜ汗が出るのか？　おもりをもち上げているために，食物が消費されるのはなぜか？　おもりをもつというだけのためにからだの仕掛けがエンジンをフルに動かしてはたらいているのはなぜか？　おもりを机の上におけば，何もしないでも，おもりはそこにおかれたままになっている；エネルギーを供給しないでも，机は同じおもりを同じ高さに静かに持ちこたえることができる！　生理学的の事情は，次のようなものである．人間や他の動物の筋肉には2種類のものがある：第1は**横紋筋**とか**骨格筋**とかいわれるものであって，例えば我々の腕の筋肉のようなもので，思ったとおりに動かすことができる：第2は**平滑筋**といわれるものであって，腸の筋肉，あるいはハマグリの大閉殻筋のようなものである．平滑筋のはたらきは非常におそいが，ある位置に“とめ”ておくことができる：すなわち，ハマグリが殻をある位置に閉じておこうとすると，大きな力で外からそれを変えようとしても，ビクともしないのである．力がかかっても，何時間も何時間もその位置を保って疲れない．ちょうどおもりを支えている机のようなものである．ある位置に“とめ”られた筋肉はそこに一時固定し，仕事なしで，ハマグリも別段の努力もしていない．我々がおもりをもっているのに努力しなければならないというのは，要するに横紋筋の構造によることなのである．

事実はこうなのである．神経の刺激が一つの筋肉繊維に達すると，その繊維はピクリと動いては，緩む．だから我々が何かをもっていると，神経の刺激が筋肉に次々にたくさんやってきて，ピクリピクリが何遍も起こっておもりを支え，また一方他の筋肉は緩んでいるのである．もちろんこのことは実際にもわかる：重いものを持っていて疲れてくると，われわれはふるえだす．これは，刺激がやって来るのが規則的でなく，その上，筋肉が疲れていてはやく反応しなくなるからである．どうしてこんなに非能率なしかけになっているのだろうか？　そのわけはよくわからないが，進化の道程で，**速い**平滑筋というものができなかったのである．平滑筋ならば，我々はただ立って，固定しさえすればいいのだから，おもりを支えるのにずっと能率的であるはずである；仕事もいらない，エネルギーもいらないということになるはずである．しかし平滑筋の欠点は，はたらきが非常におそいということである．

さて物理学へ戻って，そもそも我々は**何のために**仕事を計算するのかと自問してみよう．その答はこうである．一つの粒子にたくさんの力がはたらいているとき，その合力のなす仕事は，その粒子の運動エネルギーの変化に等しいということがあるのだから，こうして仕事を求めるということが重要でかつ役に立つからなのである．すなわち，一つの物体がおされると，速さを得て，

$$\Delta(v^2)=\frac{2}{m}\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{s}$$

となる．

14-2　束縛された運動

力と仕事について，もう一つ興味のあるのは，次のようなことである．ここに斜面か，あるいは曲線の途があって，粒子がそれに沿って運動するものとする．ただし摩擦はないとする．あるいは，おもりを糸でつるした振子があるとしてもよい：糸の束縛によって，おもりは支点を中心とした円の上を動く．くぎを1本打って糸がそれにあたるようにしておくと，支点がかわって，おもりが運動する途は，半径のちがう二つの円になる．これらは，**摩擦なしの固定束縛**といわれるものの例である．

この摩擦なしの固定束縛を受けている運動では，束縛の力はつねに運動に対して直角であるから，仕事はしない．“束縛の力”というのは，束縛ということによって物体に直接にはたらく力——途との接触によって生ずる力，あるいは糸の張力——という意味である．

重力のはたらきで斜面に沿って動く物体の運動では，束縛の力，重力等々がはたらいているので，非常に複雑である．しかし，エネルギーの保存と**重力だけ**を考えに入れてその運動を計算すると，正しい答が得られるのである．厳密にいえばこれは正しいやり方でないのだから——力としては合力を使うべきなのだから——これで正しい答が得られるというのは，いささか奇妙なことであるようにみえる．しかし，束縛の方向の力のなす仕事はゼロなので，重力だけがした仕事が，運動エネルギーの変化に等しくなるのである(図14-1)．

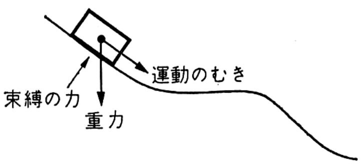


図14-1　滑体にはたらくいろいろの力(摩擦なし)

ここで大切なことは，力を二つ以上の“成分”にわけて考えるならば，ある曲線の途にそって運動するとき，全体の合力によってなされる仕事は，その各“成分”のする仕事の和に等しいということである．力をわけて，重力と束縛の力などとか，すべての力の x 成分と y 成分とか，あるいはまた，どんな他のわけ方でもいいが，そういういろいろのもののベクトル和と考えると，結局この力がする仕事は，力をわけて考えたその各部分がする仕事を全部加えたものである．

14-3　保 存 力

自然には，“保存”と称せられる非常に著しい特性をもっている力がいくつかある．重力はその例である．(保存はコンサーバティブであるが，政治のコンサーバティブとは何の関係もない．これも物理学の“へんな言葉”の一つである．) 一つの物体が曲線に沿って一つの点から他の点まで動いていくとき，力のなす仕事の量は，その途のとり方によってちがうのが一般である．しかし，特別の場合には，途のとり方に無関係である．途のとり方に無関係である場合に，我々はこの力は保存力であるという．いいかえれば，図14-2で，1の位置から

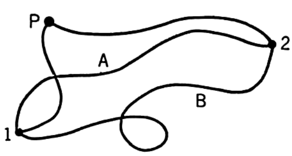


図14-2　力の場における2点間のいろいろの途

2の位置へ行くとき，力かける距離の積分を，曲線Aに沿って計算し，次に曲線Bに沿って計算すると，この二つは同じジュール数になる．これがあらゆる曲線の2点について真であるならば，そしてこれが**どんな2点についても**真であるならば，我々はこの力は保存力であるというのである．このような場合には，1から2までの仕事の積分は簡単に求められ，答の式が書ける．ふつうの場合には，曲線の形までも指定しなければならないから，計算はめんどうなことになる．しかし仕事が曲線の形に無関係であるという場合には，仕事は1と2の**位置**のみによってきまるのである．

この一つの例として，次のようなことを考えてみよう．まず任意の場所に“標準点”Pをとる(図14-2)．この場合，1から2までの仕事の線積分を求めるには，1からPまでの間の仕事を求め，それにPから2までの仕事をたせばよい．何故ならば，いま考えている力は保存力であって，仕事の量は途すじに関係しないからである．さて，Pからある一つの点までいく間になされる仕事は，その点の位置の関数である．Pという点の位置にも関係することはもちろんであるが，ここではこの任意の点Pの位置を一定のところにきめておく．そうすれば，点Pから点2までいく間になされる仕事は，終点2の位置の関数であり，すなわち点2の位置がどこかということによってきまる；もしも別の点を考えれば，また別の答になる．

位置によってきまるこの関数を$-U(x,y,z)$としよう．そして，ある特定の点2の座標が(x_2,y_2,z_2)であり，その点のUを考えるときには，$U(2)$と書く，これは$U(x_2,y_2,z_2)$を簡単に省略したものである．点1から点2までいく間になされる仕事は，積分の途を**逆向き**にし，すべての$d\mathbf{s}$を反対にして書けばよい．1からPまでいく間になされる仕事は，点Pから1までいく間になされる仕事にマイナスをつけたものである：

$$\int_1^P \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_P^1 \mathbf{F}\cdot(-d\mathbf{s}) = -\int_P^1 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}.$$

Pから1までいく間になされる仕事は$-U(1)$であって，Pから2までいく間になされる仕事は$-U(2)$である．したがって，1から2までの積分は$-U(2)$たす[逆むきの$-U(1)$]，すなわち，$+U(1)-U(2)$である：

$$U(1) = -\int_P^1 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s},\quad U(2) = -\int_P^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s},$$

$$\int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = U(1)-U(2). \tag{14.1}$$

$U(1)-U(2)$は，位置のエネルギーの差と称せられる量であり，Uを位置のエネルギーというのである．物体が2の位置にあるときには$U(2)$という位置のエネルギーをもっているといい，1の位置にあるときには$U(1)$という位置のエネルギーをもっているという．物体がPの位置にあるならば，位置のエネルギーはゼロである．Pの代りに，

他の点，例えばQを使ったとすると，**位置のエネルギーには定数がつけ加わるだけである**．(その証明は諸君にまかせる.) エネルギー保存は，その**変化**に関係するだけであるから，位置のエネルギーに定数を加えてもかまわない．このように，点Pは任意にとってよいのである．

さて，ここで次の二つのことがいえる：(1) 一つの力によって一つの粒子になされる仕事は，その運動エネルギーの変化に等しい．一方，(2) 数学的には，保存力については，なされる仕事は，位置のエネルギーと称する関数の変化にマイナスをつけたものである．これら二つのことの帰結として，**保存力だけしかはたらいていないならば，運動のエネルギー T たす位置のエネルギー U は一定である**ということになる：

$$T+U=\text{一定}. \tag{14.2}$$

次に，いろいろの場合について，位置のエネルギーの式がどうなるかを調べよう．一様な重力の場があったとして，地球の半径にくらべて高さが小さいとすると，力の大きさは一定で，鉛直方向にはたらき，なされる仕事は単に力かける鉛直距離である．すなわち

$$U(z)=mgz \tag{14.3}$$

であって，位置のエネルギーがゼロという点Pは，$z=0$の面のどこにとってもよい．位置のエネルギーは$mg(z-6)$であるといいたければいってもよい――この場合には，$z=0$における位置のエネルギーが$-mg6$となるが，そのことを除けば，他の結果は前の場合とみな同じであることは，いうまでもない．みな同じであるというのは，位置のエネルギーの**差**というものだけが問題になるからである．

1本のバネをつりあいのところから距離xだけおしちぢめるのに要するエネルギーは

$$U(x)=\frac{1}{2}kx^2 \tag{14.4}$$

であって，位置のエネルギーゼロというのは，点$x=0$，すなわちバネのつりあいのところである．ここでもどんな定数をつけ加えてもかまわない．

質点Mとmとが距離rだけはなれているとき，引力による位置のエネルギーは，

$$U(r)=-\frac{GmM}{r} \tag{14.5}$$

である．この式では，無限大のところでポテンシャルがゼロになるように定数がえらんである．電荷についても法則が同じであるから，同じ式が成り立つのはもちろんのことである．

$$U(r)=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{14.6}$$

さて上の式の一つを実際に使ってみて，その意味がよくわかっているかどうかをたしかめよう．**問題**：地球からロケットを打ち出して地球へ戻って来ないようにするには，その速さはどのくらいでなければ

ならないか？ **解**: 運動エネルギーたす位置のエネルギーは一定である；ロケットが地球を“脱出”するのは，何百万キロメートルのかなたである．そしてやっと脱出できるのだとすれば，そこでは速さゼロで動いていると考えていいだろう．地球の半径を a，地球の質量を M とする．そうすれば，運動のエネルギーたす位置のエネルギーは，最初は $\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{GmM}{a}$ である．ロケットの運動の最後では，この二つのエネルギーは等しくなければならない．運動の最後では，ロケットは速さゼロでフワフワしているだけだと考えられるから，運動のエネルギーはゼロである．また位置のエネルギーは，GmM を無限大でわってゼロである．だから，そこではみなゼロになってしまう．よって速度の自乗は $\dfrac{2GM}{a}$ であることがわかる．ところが，$\dfrac{GM}{a^2}$ は，重力の加速度 g である．よって

$$v^2 = 2ga$$

である．

人工衛星が地球のまわりをまわりつづけるには，その速さはいくらでなければならないか？　この問題はずっと前に取り扱ったが，そこでは $v^2=\dfrac{GM}{a}$ であった．だから地球を**脱出**するのに必要な速度は，地球の表面の近くで地球の**まわりをまわる**のにちょうど必要な速度の $\sqrt{2}$ 倍である．いいかえれば，地球を脱出するには，そのまわりをまわる場合にくらべて，2 倍の運動エネルギーが必要なのである．（エネルギーは速度の自乗で変化するから.）だから，人工衛星について我々のやったことを歴史的にいえば，第 1 に，まず地球のまわりをまわすことであって，それには速さ毎秒 5 マイルを要した．次にやったことは，人工衛星を永久に地球に戻って来ないように打ち出すことであった；これには 2 倍の運動エネルギー，1 秒におよそ 7 マイルの速さが必要であった．

位置のエネルギーの性質について話を進めて，こんどは二つの分子とか，例えば二つの酸素原子とかいうようなものの間の相互作用を考えよう．その二つが非常にはなれていれば，引力がはたらき，その大きさは距離の 7 乗に反比例する．また非常に近ければ，非常に強い斥力がはたらく．逆 7 乗の力を積分して，なされる仕事を計算すると，位置のエネルギーは二つの酸素原子の間の距離によってきまり，遠距離に対しては距離の 6 乗に逆比例することになる．

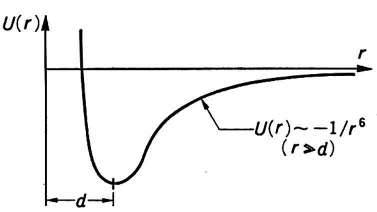


図 14-3　二つの原子間の位置のエネルギーとその間の距離との関係

位置のエネルギー $U(r)$ を図 14-3 のようにかいてみると，r が大きいところでは逆 6 乗ではじまるが，近くに来ると，点 d で位置のエネルギーが極小になる．$r=d$ における位置のエネルギーの極小は次のような意味をもっている：d から出発して小さい，非常に小さい距離だけ動くと，なされる仕事，すなわちこれだけ動いたことによって生ずる位置のエネルギーの変化は，ほとんどゼロである．何故ならば，曲線の底では位置のエネルギーはほとんど変化しないからである．この点には力はないのであって，したがってつりあいの点である．d からどちらへ遠ざかるのにも仕事を要することから考えてもここがつり

あいの点であることがわかる．二つの酸素原子が落付いていてその間にはたらいている力から何のエネルギーも出て来ないのだから，二つの原子は最低エネルギー状態にいるわけで，この距離dのところにいる．低温の酸素分子はまさにこのとおりになっているのである．温度を上げると，原子は振動し，この距離が大きくなる．そしてじっさいに二つを離してしまうことができるのであるが，そのためには，$r=d$と$r=\infty$の位置のエネルギーの差にあたるだけの量の仕事，あるいはエネルギーを要するのである．二つの原子を非常に近くにおしつけようとすると，その間に斥力がはたらくので，エネルギーは急激にふえる．

こういうことを取り上げるのは，**力**という概念が，量子力学にどうもうまくなじまないからである；量子力学で，もっとも自然な概念は，**エネルギー**なのである．核子の間，分子の間，等々の，複雑な力を考えると，力とか速度とかいうものは，“バラバラに”なったり消えてなくなったりするけれども，エネルギーという考えはそのまま残る．量子力学の本には位置のエネルギーを示す曲線はのっていても，二つの分子間の力を示す曲線はほとんどのっていないのはこのためである．力で考えるよりも，エネルギーで考える方が問題を取り扱いやすいのである．

次に，注意するのは，一つの物体に保存力がいくつも同時にはたらいているとき，その物体の位置のエネルギーはおのおのの個々の力による位置のエネルギーの和であるということである．これは前に述べたことと同じである．力をいくつかの力のベクトル和として考えることができるならば，その全体の力によってなされる仕事は，おのおのの力によってなされる仕事の和であり，そしてそれは，おのおのの力それぞれによる位置のエネルギーの変化にわけて考えることができるからである．全体の位置のエネルギーは，この各小部分をすべて加えたものなのである．

我々はこのことを一般化して，互いに相互作用を及ぼしあっている多体系，例えば木星，土星，天王星等，あるいは酸素，窒素，炭素のようなものの場合に応用することができる．これらのものの対の間には，力がはたらいていて，しかもそれはみな保存力である．このような場合には，全体の系の運動のエネルギーは，原子，惑星，等々，あるいは何であれ，それぞれの運動エネルギーの総和である．また系全体の位置のエネルギーは，一つの対の相互作用の位置のエネルギーを，粒子のすべての対について加えあわせたものである．——他のものはないとして，全部を加えあわせたものである．(実はこのことは分子力については正しくはなくて，式はだいぶ複雑になる；ニュートン引力の場合にはたしかに正しい．分子力の場合でも，近似的には正しい．分子力には，位置のエネルギーはある．しかし，それは原子の位置の関数であって，単に対から出てくる項の和よりも複雑なのである．引力の場合には，位置のエネルギーは，方程式(13.14)に示したように，

$-\dfrac{Gm_im_j}{r_{ij}}$ を，すべての i と j の対について加えあわせたものである．方程式(13.14)は，次のことを数学的にあらわしている：運動の全エネルギーと位置の全エネルギーを加えたものは，時間によって変化しない．いろいろの惑星が，自転したり，公転したり，ねじれたりしていても，運動の全エネルギーと位置の全エネルギーを計算すると，その和はいつも一定である．

14-4　非保存力

保存力についての議論がだいぶ長くなった；では，非保存力はどうであろうか？　これからこのことについてやや深く考えてみる．そして非保存力というものはないということを述べようというのである！事実，自然界における基本的の力はすべて保存力であるようである．しかしこのことは，ニュートンの法則からの帰結ではない．ニュートンもそう思っていたのだが，例えば摩擦のように，見かけ上たしかに非保存力とみえる力がある．現在では，いちばんの基礎のところで粒子の間にはたらく本源的の力は，すべて保存力であるということが見出されているので，その見地に立って摩擦は見かけ上非保存力とみえるといったのである．

例えば，写真で見るように，大球状星団では何千という星が互いに力を及ぼしあっているが，そのような系を取り扱うときでも，位置の全エネルギーは，対全体について1項ずつ加えていくだけでよく，また運動エネルギーは個々の星すべての運動エネルギーを加えればよい．ところが，この球状星団は全体として宇宙の中を運動しているのであって，非常に遠くにいてこまかいところは見えないとすると，我々はこれを一つの単体とみなしても差支えない．これにいくつかの力がはたらくと，そのうちのある力によって星団が全体として動かされることになり，全体の中心が移動するのがみられる．一方，他の力はいわば“無駄に使われて”，内部の“粒子”の運動エネルギーや位置のエネルギーを増大させる．そこでこれらの力のはたらきによって，例えば星団全体が膨脹して，その粒子の運動の速さが大きくなるとする．全体の系の全エネルギーはたしかに保存されているはずである．しかし我々のあらっぽい目で外からみたのでは，内部のゴチャゴチャした運動は見えない．だからそれを単一の粒子であるかのようにみなして，全体の運動エネルギーだけを考えることにすると，エネルギーは保存しないようにみえるのである．しかしこれは我々が何を見ているかということの洞察が足りないからである：自然界の全エネルギー，運動エネルギーたす位置のエネルギーは，よくよくみれば，ちゃんと一定なのである．

物質を調べるのに，いちばんこまかい原子的の立場からすると，全エネルギーを運動エネルギーと位置のエネルギーとの二つにわけるということは必ずしも**容易**ではない．またそれは必ずしも必要でもない．しかし**ほとんどあらゆる**場合には二つにわけられるから，これは**いつ**

も可能であるということにして，自然界の位置のエネルギーたす運動のエネルギーは一定であるといっておこう．全世界内の位置のエネルギーたす運動の全エネルギーは一定であるが，それはこの“世界”が孤立したものであって，外力がはたらかない場合である．前に述べたように，運動エネルギーや位置のエネルギーのあるものは，我々にみえないという意味からいえば，内部的なものである．分子の内部運動がその例である．またグラスの水の中では，あらゆるものがブルブルし絶えず動きまわっている．だから，内部にも運動エネルギーがあるのだが，我々はふつうそれには注意を払わない．原子の運動は熱を生ずるが，我々にはその運動はわからない．だからそれを運動エネルギーとはいわないのであるが，しかし熱は基本的には運動エネルギーである．内部の位置のエネルギーも，例えば化学エネルギーの形になっている：ガソリンを燃やすと，原子の配列が変わる．そして，原子の位置のエネルギーは前のよりも新しい方が小さくなるので，ここにエネルギーが出てくるのである．実をいうと，熱には位置のエネルギーもちょっと入って来るので，厳密にいえばそれを全部運動エネルギーだとして取り扱うことはよくない．また化学エネルギーには，運動エネルギーもちょっと入って来るので，厳密にいえば化学エネルギー全部を位置のエネルギーだとして取り扱うことはできない．そこで我々はこの二つをいっしょにしてしまって，一つのものの内部にある運動の全エネルギーと位置の全エネルギーは，一部分熱エネルギーである，一部分化学エネルギーである，等々というふうにいうのである．ともかく，これらの内部エネルギーにはいろいろの形があるが，それはみな，上に述べたような意味で“失われた”エネルギーと考えられることがある；このことは熱力学を勉強するときにもっとはっきりさせよう．

また別の例として，摩擦がある場合に，滑体が止まり，運動エネルギーがなくなったようにみえるけれども，しかしそういっては正しくない．内部の原子は前よりも大きな運動エネルギーでブルブルしているのだから，運動エネルギーは失われたのではない．これを見ることはできないが，温度によってそれを測ることはできる．熱エネルギーを考えに入れないと，エネルギー保存則が成り立たないようにみえるのはいうまでもない．

また，一つの系の一部分しかみないと，エネルギーが保存しないようにみえるという場合もある．その系の何かが外部の何かと作用しあっているとき，その相互作用を考えに入れないと，エネルギー保存則が正しくないようにみえるのは当然のことである．

位置のエネルギーといえば，古典物理学では，引力と電気だけであったが，今日では原子核エネルギー，その他がある．例えば光は，古典理論からみて新しいエネルギーの形としてもよいが，光のエネルギーは光子の運動エネルギーであると考えたければ考えることもできる．そしてそのときも方程式(14.2)はやはり成り立つのである．

14–5　ポテンシャルと場

次に位置のエネルギーや場という考えに関連して二，三のことがらを論ずることにする．ここにAとBという大きな物体があり，また別に非常に小さい物体があるとする．そしてそれが二つの物体から引力を受けていて，その合力が$\mathbf{F}$であるとする．すでに第12章で述べたとおり，一つの粒子にはたらく引力は，その質量mに，ベクトル$\mathbf{C}$をかけたものであらわすことができ，この$\mathbf{C}$は粒子の**位置**によってきまる：

$$\mathbf{F}=m\mathbf{C}.$$

そこで引力を考えるときには，空間のあらゆるところに$\mathbf{C}$というベクトルがあって，それがその場所にある質量に“はたらく”と考えることができる．しかも$\mathbf{C}$というものは，実際に質量をそこにおくかおかないか，それに“はたらく”かはたらかないかということには関係なく，それ自身として存在するのである．$\mathbf{C}$には3成分があって，その成分は，おのおの空間における位置(x, y, z)の関数である．このようなものを，我々は**場**といい，A, Bという物体が場を**つくる**，ベクトル$\mathbf{C}$を“つくる”というのである．一つの物体を一つの場のなかにおくと，それにはたらく力は，その質量に，その点における場のベクトルをかけたものに等しい．

位置のエネルギーも同じように扱うことができる．位置のエネルギー，すなわち(**力**)・$(d\mathbf{s})$の積分は，mかける(**場**)・$(d\mathbf{s})$の積分と書くことができる．これはスケールを変えただけのことであるから，空間の点(x, y, z)にある一つの物体の位置のエネルギーは，ある関数をmにかけたものと書くことができる．そしてこの関数のことを**ポテンシャル**Ψというのである．$\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=-U$であるように，$\int\mathbf{C}\cdot d\mathbf{s}=-\Psi$である；$U$と$\Psi$との間にはスケール係数がかいてあるだけである：

$$U=-\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=-m\int\mathbf{C}\cdot d\mathbf{s}=m\Psi. \tag{14.7}$$

空間のあらゆる点で関数$\Psi(x, y, z)$が与えられていれば，物体がどの点にあっても，その位置のエネルギーをすぐ計算することができる．すなわち，$U(x, y, z)=m\Psi(x, y, z)$である．何だか些細なことをいっているようにみえるが，しかし実際は些細なことではないのである．というのは，場を記述するのに，空間のあらゆるところで$\mathbf{C}$を指定する代りに，Ψの値を与える方がずっとうまくいく場合があるからである．ベクトル関数だと，その複雑な3成分を書かなければならないが，スカラー関数ならばΨを与えるだけでよい．そればかりではない．質量がいくつもあって，それによって場がつくられている場合でも，$\mathbf{C}$のある成分を計算するよりはΨを計算する方がずっとやさしいのである．それはポテンシャルはスカラーであって，方向にかまわずに単に加えればよいからである．また，すぐ後に述べるように，場$\mathbf{C}$はΨからわけなく求められるからである．さて，いま点$1, 2, \cdots$に質点$m_1, m_2, \cdots$があるとし，任意の点pにおけるポテンシャルΨを求めよう．これは簡単で，個々の質量によるp点のポテンシャルを一つ一つ

加えればよい:

$$\Psi(p)=\sum_{i}-\frac{Gm_i}{r_{ip}},\quad i=1,2,\cdots. \tag{14.8}$$

この式の意味は，全体のポテンシャルは，あらゆるものそれぞれのポテンシャルを加えたものであるということである．前の章ではこのことを使って，球殻物質によるポテンシャルを求めた．すなわち，球殻のすべての部分によって1点に生ずるポテンシャルの寄与を全部加えたのである．この計算の結果は，図14-4の曲線で示してある．$r=\infty$ でその値はゼロなので，ポテンシャルの値は負であって，半径 a のところまでは $-\frac{1}{r}$ に従って変化する．そして殻の内では一定である．m を球殻の質量とすれば，殻の外のポテンシャルは $-\frac{Gm}{r}$ である．これは質量がすべて中心にあるとしたときのポテンシャルとまさに同じである．しかし**あらゆるところ**で同じなのではない，球殻の内ではポテンシャルは $-\frac{Gm}{a}$ となり，これは定数である！ **ポテンシャルが一定ならば場はない**，すなわち，位置のエネルギーが一定ならば力はない．球の内側で物体を一つの場所から他のどこに動かしても，なされる仕事はまさにゼロだからである．これは何故か？ それは，物体を一つの場所から他の場所に動かす間になされる仕事は，位置のエネルギーの変化に負号をつけたものだからである．(あるいは，それに対応する場積分は，ポテンシャルの変化である.) ところが，この場合には，内側のどんな2点をとっても位置のエネルギーは**同じ**で，位置のエネルギーの変化はゼロ，したがって殻の内ではどんな2点の間を動いても仕事はされない．どんな方向に動いても仕事がゼロだというのは，力が全然ないときのみに限る．

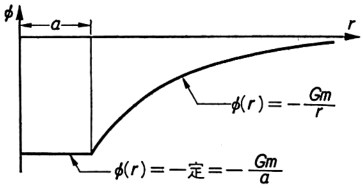


図 14-4　半径 a の球殻によるポテンシャル

以上のことは，位置のエネルギーが与えられたときに，それから力あるいは場を求めるにはどうすればよいかということの手がかりになる．位置 (x,y,z) における物体の位置のエネルギーがわかっているとして，それからこの物体にはたらく力を求めようとする．次に示すように，その一つの点のポテンシャルがわかっているだけではだめである；近所の点のポテンシャルの知識も必要である．それは何故か？ 力の x 成分を計算するには，どうすればよいか？ (x 成分が求められるならば，y 成分も z 成分も求められ，したがって力全体がわかる.) 物体を小距離 Δx だけ動かすと，力が物体にする仕事は，Δx が十分小さいとして，力の x 成分かける Δx であって，これは1点から他の点へいく間の位置のエネルギーの変化に等しくなければならない:

$$\Delta W=-\Delta U=F_x\Delta x. \tag{14.9}$$

我々は $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=-\Delta U$ という式を使っただけのことであるが，途が**非常に短い**としたのである．Δx でわると，力は

$$F_x=-\frac{\Delta U}{\Delta x} \tag{14.10}$$

であることがわかる．

もちろんこれでは厳密ではない．我々がほんとに求めたいのは，Δx

がどんどん小さくなったときの(14.10)の極限である．Δx が微小になった極限においてのみ，これは厳密に正しいからである．これを x に関する U の微分係数とみて，したがって $-\dfrac{dU}{dx}$ と書きたいところである．しかし U は x にも y にも z にも関係しているので，数学者は別の記号を発明した．このような関数を微分するときに，よく気をつけて，変わるのは x だけで y や z は変わらないことを忘れることのないように，d の代りに，“6の裏返し”すなわち ∂ というものをつくった．(微積分のはじめに ∂ を使えばよかった．我々はついあの d を約したがるが，∂ は約そうと思わないからである！) そこで数学者は $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ と書く．そしてその上，どうしても**非常に**気を付けたいという場合には，そのわきに線を書いて，その下の方に小さく yz と書く $\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\Big|_{yz}\right)$．これは，“$y$ と z は一定にしたままで，x について U を微分せよ”という意味である．何を一定にしておくかということは前後の関係でわかるのがふつうであるから，たいていの場合にはこのリマークはつけないで，線を書いて yz をつけることはしない．しかし**いつも** d の代りに ∂ を使うべきなのである．それは他の変数は一定にしておいたときの微分係数であるという警報である．これは**偏微分係数**といわれるものである；すなわち x だけを変化させるときの微分係数である．

x 方向の力は，x に関する U の偏微分係数に負号をつけたものである：

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{14.11}$$

同じように，y 方向の力を求めるには，x と z とを一定にして，U を y について微分すればよく，z 方向の力は，y と x とを一定にして，U を z について微分すればよいのはもちろんである：

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{14.12}$$

位置のエネルギーから力を求めるには次のようにすればよい．**ポテンシャル**から場を求めるのも同じことである：

$$C_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad C_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad C_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \tag{14.13}$$

当分実際には使わないが，ここでもう一つ，記号のことを述べておこう：**C** は一つのベクトルであって，x, y, z 成分をもっているから，x, y, z 成分をつくる $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}$ という符号も，ベクトルのようなものである．数学者は，すばらしい新しい符号 ∇ を発明した．これは“grad”とか“gradient”とかいわれるものであって，量ではなく，一つのスカラーからベクトルをつくる演算子である．そしてその“成分”は次のようなものである：この“grad”の x 成分は $\dfrac{\partial}{\partial x}$，$y$ 成分は $\dfrac{\partial}{\partial y}$，$z$成分は $\dfrac{\partial}{\partial z}$である．そして式を次のように面白い書き方をする：

$$\mathbf{F} = -\nabla U, \qquad \mathbf{C} = -\nabla \Psi. \tag{14.14}$$

∇ を使うと，ほんとのベクトル方程式かそうでないかがすぐにみわけられることになる．方程式(14.14)の意味は，実際には方程式(14.11)，

(14.12), (14.13)の意味と全く同じである；つまり別の書き方に過ぎないのであるが，三つの方程式をいちいち書くのはいやだから，その代りに ∇U と書くのである．

場とポテンシャルのもう一つの例は，電気の場合である．この場合，静止している物体にはたらく力は，電荷かける電場である：$\mathbf{F}=q\mathbf{E}$. (一般に，電気の問題では，力の x 成分の一部分は，磁場に関係する．粒子にはたらく磁場の力は，粒子の速度に直角，かつ場に直角であることは，方程式(12.10)から容易にわかる．運動している電荷にはたらく磁気の力は速度に直角であるから，それに対しては磁気は**仕事をしない**．運動と力とが直角だからである．したがって，磁場は運動エネルギーに変化を与えないから，電場や磁場における運動エネルギーの式を求めるときには，その影響は考えないでよい.) すなわち電場だけがあると考えるのである．引力の場合と同じように，エネルギー，又はなされた仕事を求め，量 ϕ を計算する．これは任意の固定点から，いま問題としている点まで $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ を積分して負号をつけたものである．そうすれば，電場における位置のエネルギーは，電荷にこの量 ϕ をかければよい：

$$\phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s},$$
$$U = q\phi.$$

一例として2枚の平行な金属板を考え，それぞれ単位面積あたりに，$\pm\sigma$ の表面電荷があるとする．これは平行板キャパシターといわれるものである．前に求めたように，両板の外側では力はゼロであり，両板の間には一定の電場があって，＋から－に向かい，その大きさは $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (図14-5)である．そこで一つの電荷を一方の板から他の板に動かす間になされる仕事がいくらであるかを求めよう．なされる仕事は，(**力**)･(d**s**)の積分で，これは電荷かける板(1)のポテンシャルひく板(2)のポテンシャルである：

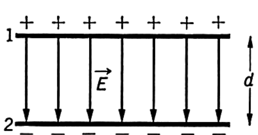


図14-5　平行板の間の場

$$W = \int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = q(\phi_1 - \phi_2).$$

力が一定であるから，この積分は実際に計算することができる．二つの板の間の距離を d とすれば，積分はわけない：

$$\int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \frac{q\sigma}{\varepsilon_0}\int_1^2 dx = \frac{q\sigma d}{\varepsilon_0}.$$

ポテンシャルの差，$\Delta\phi = \dfrac{\sigma d}{\varepsilon_0}$ は**電位差**といわれ，ϕ はボルトで測る．2枚の板がある電圧に充電されているということをいうが，それは2枚の板の電気ポテンシャルの差が，これこれボルトだという意味である．2枚の平行板のキャパシターが $\pm\sigma$ の表面電荷をもっているならば，2枚の板のボルテイジ，すなわちポテンシャルの差は，$\dfrac{\sigma d}{\varepsilon_0}$ である．

第 15 章 特殊相対性理論

15-1 相対性原理

200年以上もの間，ニュートンの運動方程式は，自然を正しく記述するものであると信じられてきた．これらの法則にあやまりがあるということがはじめて発見されたとき，同時に，それを修正する方法も発見されたのである．このあやまりを発見したのも，修正を加えたのも，アインシュタインであって，1905年のことである．

ニュートンの第2法則は，

$$F=\frac{d(mv)}{dt}$$

という方程式によってあらわされるが，それは m が一つの定数であるという暗黙の仮定の上にたっていた．しかし現在ではこの仮定は正しくはなく，一つの物体の質量は速度が大きいほど大きくなることがわかっている．アインシュタインの修正式では，m は

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{15.1}$$

である．ここに“静止質量” m_0 は，物体が運動していないときの質量，c は光の速さ，およそ 3×10^5 km/秒すなわちおよそ186,000マイル/秒である．

このことを覚え，問題がとけさえすればもうそれでいいという人達にとっては，相対性理論とはこれだけのものである——質量に補正を入れて，ニュートンの力学に変更を加えるだけのものである．上の式をみればすぐわかるように，ふつうの場合には，質量の増加は非常に小さい．地球のまわりをまわる人工衛星の速度は5マイル/秒であるが，速度がそれくらい大きいとしても，$\dfrac{v}{c}=\dfrac{5}{186{,}000}$ である：この値を上の式に入れればわかるように，質量の補正は20～30億分の1であって，それを観測することはほとんど不可能である．実際には，光に近い速さで運動しているいろいろの粒子の観測によって，この式が正しいということはよくたしかめられているのである．しかし，この効果はふつうは非常に小さいので，このことが実験的に発見されたのは，理論的に発見されたのよりも後になってからである．このことは，注目に値する．速度が大きければ，実験的にはこの効果は非常に大きい．しかし実際にはそのような実験で発見されたのではなかった．新しい法則は，非常にデリケート（それがはじめて発見されたころには）な修正を含んでいるのだが，そのような法則が，実験と物理的推論と

の組合せによってどのようにして生まれてきたか，こういうことを省みてみるのも面白いと思う．この発見に寄与した人は多いが，それらの仕事は，アインシュタインの発見によって結末をみたのである．

アインシュタインの相対性理論には実は二つある．この章で取り扱うのは，特殊相対性理論というのであって，1905年に生まれた．その後1915年に，アインシュタインは一般相対性理論といわれるもう一つの理論を発表した．これは特殊相対性理論を引力の法則の場合に拡張することを取り扱ったものである；しかしここではこの一般相対性理論は論じない．

まず最初に相対性原理のことを述べたのはニュートンであった．運動の法則に附随してニュートンはこういっている："与えられた一つの空間内におこる物体の運動は，その空間が静止していても，あるいは一様な直線運動をしていても，その相互関係は同じである．"この意味は，例えば，宇宙船が一様な速さで飛んでいるときに，そのなかでいろいろの実験をしてみても，あるいはまたいろいろの現象を観察してみても，それはみな，宇宙船が運動していないとしたときと同じようにおこるということである．もちろん，宇宙船からそとはみないとしての話である．これがこの相対性原理の意味である．これは実に簡単な考えで，運動している系の中でいろいろな実験をすると，そのすべてについて，物理法則が静止しているときのものと同じであるというのであるが，しかしはたしてそうであるかどうか，これが問題である．そこでまず，ニュートンの法則を考えて，それが，運動している系でも静止系でも同じものになるかどうかを調べることにしよう．

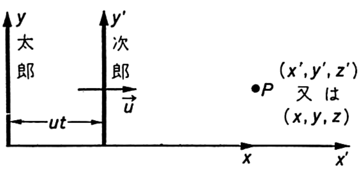


図15-1　x軸にそって一様な相対運動をしている二つの座標系

いま次郎がx方向に一様の速度uで運動しているとし，図15-1に示したように，ある一つの点の位置を測るとする．そして次郎の座標系における"x-距離"をx'であらわす．太郎は静止していて，この同じ点の位置を測って，その系におけるx座標をxであらわす．この二つの系における座標の間の関係は，図から明らかである．時間がtだけたつと，次郎の原点は距離utだけ動いている．もしも二つの系がはじめ一致していたとすると

$$\begin{aligned} x' &= x-ut, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t \end{aligned} \tag{15.2}$$

である．この座標変換をニュートンの法則に代入すると，$'$をつけた系でも同じ法則になることがわかる；すなわち，ニュートンの法則は，運動している系でも，静止している系でも同じである．したがって力学的の実験によって，系が運動しているのか，いないのかを，判定することは不可能である．

この相対性原理は，長い間力学で使われてきた．ホイヘンスその他多くの人は，これによってタマツキのタマの衝突の法則を求めた．第10章で運動量の保存を論ずるのに使ったのとほとんど同じやり方で

あった．19世紀になって，電気や磁気や光の現象の研究が進むにつれて，この相対性の問題に対する関心が大いに高まった．これらの現象について多くの人がくわしい研究をつづけたのであるが，ついに電磁場に関するマクスウェルの方程式が現われた．この方程式は，電気と磁気と光とを一つのシステムに記述するものである．ところが，マクスウェルの方程式は相対性原理に**従わない**ようにみえたのであった．すなわち，方程式(15.2)を使ってマクスウェルの方程式を変換すると，**その形が変わってしまう**のである．それゆえ，宇宙船が飛んでいるときには，その中の電気現象や光学現象は，静止しているときとちがうものになるということになってしまう．だから，この光学現象を利用すれば，宇宙船の速さをきめることができるわけである；例えば，適当な光学測定か電気測定を行なえば，宇宙船の絶対の速さをきめることができるということになる．マクスウェルの方程式から二つのことが出てくる．その一つは，電磁場に何か擾乱がおこって，光が出ると，その電磁波は同じ速さ c，すなわち186,000マイル/秒ですべての方向へ一様に伝わっていくということである．もう一つは，この擾乱の源が運動していても，出てくる光は同じ速さ c で空間を伝わるということである．これは音の場合と同様である．音波の速さは，やはり音源の運動とは無関係である．

光の場合に，源の運動と無関係だとすると，このことから，一つの重大な問題が出てくる．

我々が速さ u の自動車に乗っているとする．そして車の後部から光が出て，車の中を c という速さで伝わっていくとする．(15.2)の最初の方程式を微分すると，

$$\frac{dx'}{dt}=\frac{dx}{dt}-u$$

となるので，ガリレイ変換によれば，光の速さを車の中で測ると，それは c ではなく $c-u$ であるはずだということになる．例えば車の速さが100,000マイル/秒であったとすると，186,000マイル/秒で伝わる光の速さは，車の内では86,000マイル/秒で伝わることになる．いずれにしても，光が車の中を伝わる速さを測れば(ガリレイ変換が光の場合に正しいならば)，車の速さがきまるということになる．こういう考えにもとづいて，地球の速度をきめようという実験がたくさん行なわれたのであるが，しかしみな不成功に終わった．――**地球の速度はゼロだ**ということになった．これから，そのような実験の一つについてくわしく述べて，そしてどんなことをしたのか，またどんなことが起こったかを説明することにしよう．もちろん何かが**起こった**のである．そして物理学の方程式に間違いがあったのである．それはいったい何であったか？

15-2　ローレンツ変換

物理学の方程式が，上のように，うまくあてはまらないということ

になったのだが，そのとき，まず考えられたのは，この電気力学の方程式は，そのとき生まれてからまだたった20年しかたっていないのだったから，それに何かまずいことがあるのではないかということであった．マクスウェルの方程式が間違っているに相違ないから，それをうまく修正して，ガリレイ変換をしたときに，相対性原理が満足されるようにすればよいのではないかと考えられた．さてこれを実行してみると，方程式に入れなければならない項が出て来て，これまでなかった新しい電気現象が起こらなければならないことになった．しかし実験でそれをためしてみても，そんな現象は全然起こらない．そこでこういうやり方はすてられてしまった．そしてマクスウェルの電磁気法則は正しくて，問題は他のところにあるにちがいないということがだんだんわかって来たのであった．

そうこうしているうち，ローレンツは次のような注目すべき奇妙なことに気が付いた．それは，次の関係

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \\
y' &= y, \\
z' &= z, \\
t' &= \frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}
\end{aligned}
\tag{15.3}
$$

をマクスウェルの方程式に代入しても，方程式の形はこの変換に対して不変であるということである！　方程式(15.3)は**ローレンツ変換**といわれるものである．

そこでアインシュタインは，ポアンカレーがはじめていい出したことに従って，**すべての物理法則は，ローレンツ変換をしたときに不変であるようなものであるべきである**と考えた．いいかえれば，修正すべきは電気力学の法則ではなくて，実は力学の法則であるとしたのである．ではニュートンの法則をどう修正したら，ローレンツ変換に対して不変になるだろうか？　この目標が定まったからには，ニュートンの方程式を書き換えて，この条件が満足されるようにしなければならない．そこでわかったのは，ニュートンの方程式における質量 m を，方程式(15.1)のような形に変える必要があるということであった．そのように変えると，ニュートンの法則と電気力学の法則とがうまく協調するようになるのである．そこで，ローレンツ変換を使って，太郎の測定と次郎の測定とをくらべてみると，両方の座標系ですべての方程式の形が同じになるので，どちらが動いているかを知ることは決してできないということになるのである！

座標と時間とに，ガリレイ変換を使う代りに，ローレンツ変換を使うというのは，どういう意味であるか．これは大切な問題である．何故かというと，古いガリレイ変換の方がむしろ自明で，新しいローレンツ変換の方が奇妙にみえるからである．そこで正しいのはローレンツ変換の方であって，ガリレイ変換の方ではないということは，何か

論理的，実験的にいえることなのであろうか．そのことを調べてみよう．それには，力学の法則を調べるだけでは充分でない．この変換を理解するためには，我々も，アインシュタインのように，**空間**とか**時間**とかいう概念をどう考えているのかということを反省しなければならないのである．これらの概念やそれが力学に対してもつ意味を論ずるのには，ちょっと長くかかるが，あらかじめ結論だけをいっておこう．それは，こうやって得られる考察の結果が実験とあうので，これからそういう努力をしても無駄でないということである．

15-3　マイケルソン-モーレイの実験

宇宙全体にひろがっていると想像されている仮想的な“エーテル”の中で，地球がどのくらいの絶対速度で運動しているか，それを定めようとして，上に述べたようにいろいろな実験が行なわれたのであるが，そのなかでいちばん有名なのは，1887 年のマイケルソンとモーレイの実験である．その実験では地球の速度は求められなかった．そしてそれから 18 年後，アインシュタインによってその理由が説明されたのである．

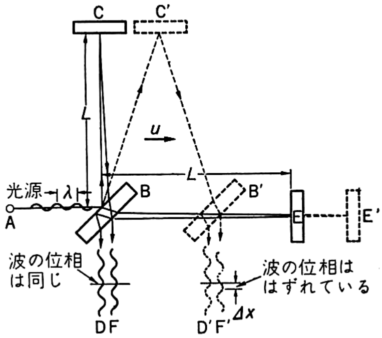


図 15-2　マイケルソン-モーレイの実験の模式図

マイケルソン-モーレイの実験装置は，図 15-2 に模式的に示したようなものである．この装置の主なものは，光源 A，半銀付けをしたガラス板 B，二つの鏡 C, E とであって，それがしっかりした台にとりつけられている．二つの鏡は B から等距離 L にとりつけてある．光源から来た光のビームは，板 B のところで直角に二つにわかれて鏡にあたる．そしてそこで反射されて B に戻って来る．B に戻ると，それは D と F とになってまた重なりあう．光が B から E まで行って戻ってくるまでの時間と，B から C まで行って戻ってくるまでの時間とが同じであるならば，光のビーム D と F との位相は同じで互いに強めあう．しかしこの二つの時間の間に少し差があると，ビームの位相は少しくいちがって，干渉が起こる．この装置がエーテルに対して“静止している”ならば，この二つの時間は厳密に等しいはずである．しかしもしも速度 u で右の方へ運動しているとすると，時間に差が生ずるはずである．その理由を考えよう．

まず，光が B から E まで行って戻って来るまでにどれだけの時間を要するかを計算する．光が板 B から鏡 E までいく時間を t_1 とし，戻ってくる時間を t_2 とする．ところが光が B から鏡のところまでいく間に，この装置は距離 ut_1 だけ動く．だから光は $L+ut_1$ の距離を速さ c で伝わらなければならない．この距離は ct_1 とも書けるから

$$ct_1 = L+ut_1 \quad \text{すなわち} \quad t_1 = \frac{L}{c-u}$$

である．（この装置に対する光の速度は $c-u$ であることを考えれば，このことは当然である．時間は長さ L を $c-u$ でわればよい．）時間 t_2 も同様に計算することができる．t_2 の間に，板 B は距離 ut_2 だけ進むから，光が戻る距離は $L-ut_2$ である．よって

$$ct_2 = L - ut_2 \quad \text{すなわち} \quad t_2 = \frac{L}{c+u}$$

である．だから全体の時間は

$$t_1 + t_2 = \frac{2Lc}{c^2 - u^2}$$

である．後で比較するときに都合がよいように，これを

$$t_1 + t_2 = \frac{2L/c}{1 - u^2/c^2} \qquad (15.4)$$

と書いておく．

次の計算は，光がBから鏡Cまでいく時間 t_3 である．前と同じように，時間 t_3 の間に鏡Cは右の方へ距離 ut_3 だけ動いて C′ の位置に来ている．その間に，光は三角形の斜辺 BC′ に沿って，距離 ct_3 だけ伝わる．この直角三角形では

$$(ct_3)^2 = L^2 + (ut_3)^2$$

すなわち

$$L^2 = c^2 t_3{}^2 - u^2 t_3{}^2 = (c^2 - u^2) t_3{}^2$$

であって，これから

$$t_3 = \frac{L}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

が得られる．C' から戻ってくるときは，対称関係からわかるように距離は同じである；だから戻りの時間も同じで，全体の時間は $2t_3$ である．少し整頓すれば

$$2t_3 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad (15.5)$$

となる．

こうして，二つの光のビームの時間をくらべることができる．式(15.4)と(15.5)の分子は同じで，それは装置が静止しているときに要する時間をあらわしている．分母には $\frac{u^2}{c^2}$ があるが u が c と同程度の大きさでない限り，この項は小さい．そしてこの分母が，装置が運動していることによって生ずる時間の修正を示している．ところが見給え，その修正は**同じではない**のである――鏡はBから等距離にあるのに，Cへ行って戻って来るまでの時間の方が，Eへ行って戻って来るまでの時間よりも少し短いのである．そこでまずその差を精密に測らなければならないということになる．

ここにちょっとした技術上の問題がおこる――二つの長さ L がきちんと等しくなかったとしたら？ 事実，それをきちんと等しくさせるなどということはとてもできるものではない．その場合には，装置全体を90度まわして，BCが運動の方向になり，BEが運動に直角な方向になるようにすればよい．こうすれば，BCとBEとの間の距離に小さな差があったとしても，それは問題にならなくなる．そして，装置をまわしたとき，干渉縞がどう動くかをみればよいことになる．

この実験を行なうにあたって，マイケルソン-モーレイは，線BE

が地球の軌道運動にだいたい平行になるように(昼か夜の，ある時刻に)装置のむきをきめた．この軌道運動の速さは毎秒18マイルであって，“エーテルの流れ”は，昼間か夜のいつか，またあるいは1年のいつか，少なくともこの大きさになるはずである．装置は充分鋭敏で，そのようなことが観測できるはずなのであったが，時間の差は認められなかった——エーテルに対する地球の速度は検出されなかったのである．実験の結果は否定的であった．

このマイケルソン-モーレイの実験の結果ははなはだ解釈に苦しむのであって，大混乱をひきおこした．この行きづまりを打開する最初の有効な考えは，ローレンツによって提案された．ローレンツの考えによると，物体は運動していると，収縮し，その収縮は運動の方向のみにおこるというのである．そして，物体が静止しているときの長さをL_0とし，速さuでその長さの方向に運動しているとすると，その長さ$L_{\parallel}$(L平行)は

$$L_{\parallel}=L_0\sqrt{1-u^2/c^2} \qquad (15.6)$$

だとしたのである．この長さの変化をマイケルソン-モーレイの干渉計装置にあてはめると，BからCまでの距離は変わらないが，BからEまでの距離は収縮して$L\sqrt{1-u^2/c^2}$になる．したがって方程式(15.5)は変わらないが，方程式(15.4)のなかのLは，方程式(15.6)によって変えなければならない．そうすれば，

$$t_1+t_2=\frac{(2L/c)\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-u^2/c^2}=\frac{2L/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad (15.7)$$

が得られる．この結果を方程式(15.5)とくらべてみると，$t_1+t_2=2t_3$であることがわかる．だから，装置が上に述べたように収縮するとするならば，マイケルソン-モーレイの実験から地球の速さが求められなかったわけが説明されるのである．こうして収縮仮説は，実験の結果が否定的であったことを説明するのに成功したわけであるが，困難を説明するという目的だけのために考え出されたものであって，あまりに作為的であるという非難は免れなかった．その後，エーテルの流れを見出そうとする実験はたくさん行なわれたが，どれもみな同じような困難が生じた．そして，自然というものは“謀反”しているのではないか，新しい現象を起こしては，uが測れるだろうと人間の考える現象をみんなだめにして邪魔しているのではないかと考えられるようにまでなった．

そして，ポアンカレーが指摘したように，**完全に謀反しているということそれ自身が自然法則なのである**と認めざるをえないようになった！ そしてポアンカレーは，**どんな**実験をしてもエーテルの流れを発見することはできないという**自然法則があるのだ**とした．すなわち，絶対速度を決定する方法はないとしたのである．

15-4 時間の変換

収縮という考えが，その他のいろいろの実験事実と都合よくあうか

どうか調べられているうちに，**時間**もまた(15.3)の第4番目の式のように変わるとすると，あらゆることがうまくいくということが明らかになってきた．そのわけは，光がBからCへ行って戻って来るまでの時間t_3を，宇宙船に乗って運動しながら観測している人と，静止していて宇宙船を外から観測している人とについて計算してみると，それは同じにならないからである．宇宙船の中にいる人にとっては，この時間は単に$\dfrac{2L}{c}$であるが，外からみている人にとっては，$\dfrac{2L}{c\sqrt{1-u^2/c^2}}$(方程式15.5)である．いいかえれば，宇宙船に乗っている人が，葉巻に火をつけているのを外からみると，すべての動作が普通よりもおそくみえる，しかし中にいる人にとっては，あらゆることが普通の割合で進行するのである．このように，収縮しなければならないのは長さだけではなく，時間を測る装置("時計")もみかけ上おそくならなければならないのである．すなわち，宇宙船に乗っている人からみて，その時計が1秒をきざむとき，外にいる人からみればそれは$\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$秒なのである．

運動している系で，時計の進みがおそくなるというのは，すこぶる不思議な現象であって，説明を要する．このことを理解するためには，時計というものの仕組をよくみて，それが運動するとどんなことが起こるかということを考える必要がある．しかしこれはなかなかむずかしいから，まず非常に簡単な時計を考えることにしよう．それはばかばかしい時計なのだが，原理的にはちゃんと時計の役目をする：それは1本の棒(メートル棒)の両端に鏡をつけたものであって，鏡の間に光を送ってやるとその間を上下して，下に来るごとにふつうのチクタク時計と同じようにカチッという．このような時計を，全く同じ大きさで二つつくる．そして同時に動かしはじめて，同期させる；そうすれば，それから後も，ずっと同時にカチカチいうだろう．これは二つの時計の長さが同じであって，光はいつも速さcで伝わるからである．次に，二つの時計のうちの一つを宇宙船の人にもたしてやって，宇宙船の運動の方向に直角に棒をとりつける；こうすれば棒の長さは変わらない．この直角方向の長さが変わらないということは，どうやればわかるか？　2人で約束して，すれちがうとき，相手のy棒に印をつけるとする．対称から考えて，その印のy座標もy'座標も同じになるはずである．もしも同じにならなかったら，いっしょになって結果をくらべあったとき，一つの印は他の印の上か下にくることになるので，どちらが運動していたかが解ることになってしまうからである．

さて，運動している方の時計にはどんなことが起こるか．それを宇宙船にのせる前に，彼はこれはちゃんとしたいい時計であると思っており，またこれを宇宙船にもちこんでも何も変わったことは起こるはずはない．変わったことが起こったら，自分は運動しているということがわかる――運動によって何かようすが変われば，自分は運動しているということがわかってしまうのである．相対性原理によれば，一様な速度で運動していればそういうことはありえないのであるから，

何も変化するはずはない．一方，宇宙船の時計では光は鏡と鏡との間をいったり来たりしているのだから，それが目の前を通っていくのを外の人からみれば，光は“実は”，ジグザグな途をとっているようにみえる．宇宙船内の棒は横に運動しつづけているからである．我々は，マイケルソン-モーレイの実験に関連してこのようなジグザグ運動を取り扱ったことがある．図 15-3 のようにある時間の間に，棒が u に比例して前進したとすると，この同じ時間の間に光が進む距離は c に比例する．だから縦の方向の距離は $\sqrt{c^2-u^2}$ である．

すなわち，運動している時計で光がはじからはじまで行くのには，静止している時計の場合よりも**時間が長く**かかる．だから，運動している時計のカチカチの間のみかけ上の時間は，三角形の斜辺(方程式の平方根はここから出てくる)と同じ割合で長くなっている．図からわかるように，u が大きければ大きいほど，運動している方の時計の進みはおそいようにみえる．しかし，進みがおそくみえるのは，上に述べたような時計だけではない．もしも相対性理論が正しいならば，どんな仕掛で動くどんな時計でも，上と同じ割合で進みがおそくみえるはずである．——これについてはもはやくわしい考察を要しない．それはどうしてであろうか？

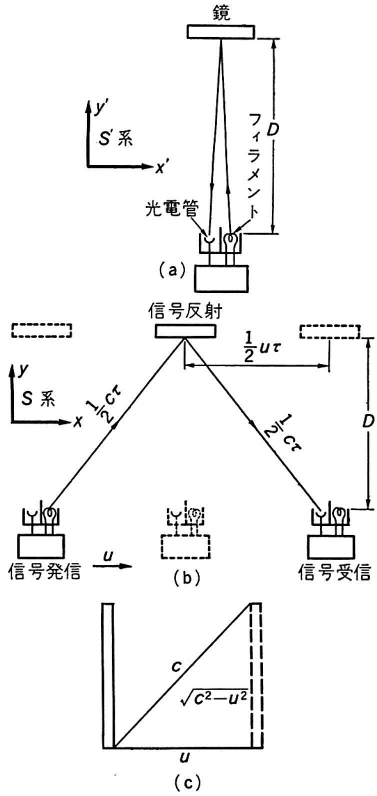


図 15-3
(a) S′ 系で静止している“光時計”
(b) S 系で運動している同じ時計
(c) 運動している“光時計”で光線が辿る対角線経路の説明図

この問に答えるために，ここに別の時計が二つあるとして，歯車も何もかもすっかり同じであるとする．あるいは放射能の崩壊を利用した時計でも何でもいい．そしてその二つの時計は，前の棒の時計ときっちり同じはやさで進むようにしてあるとする．前の時計で光がいって帰ってきてカチッという音を出すときに，新しい方の時計も何かの 1 サイクルをすませて，両方が一致して同時にフラッシを出すか，ボーンという音を出すか，何かの信号を出すとする．その二つの時計のうちの一つを前の時計といっしょに宇宙船にもちこむ．そうしたとき，**新しい方の**時計の進みはおそくならないで，静止している相手と同じ速さで動作し，もう一つの運動している時計に対してくるってくるのではあるまいか，と考えたら大ちがいである．もしそんなことがおこったとしたら，宇宙船の人はその中にある二つの時計の不一致を使って，宇宙船の速さをきめることができることになるが，それは不可能なことだと我々は考えてきたのである．新しい方の時計が**どんな仕組であるかを知っている必要はない**．——理由はともかくとして，それは前の方の時計と同じように，進みがおそくなるのである．

そこで時計がみな進み方がおそくなり，またどんな方法で時間を測っても，進み方がおそいということになるのならば，我々は，ある意味で**時間それ自身**が宇宙船のなかではおそくなっているとしなければならない．宇宙船のなかでおこるすべての現象，——脈搏，思考の経過，葉巻に火をつける時間，生長し老人になる時間——そういうものがすべて同じ割合でおそくなる．それは，彼には自分が運動しているということがわかるはずはないからである．生物学者や医学者は，宇宙船の中で癌が生長する速さもおそくなるかどうかわからないという

のだが，現代物理学者の立場からいえば，おそくなることはほとんど確かだと思う；もしそうでなかったら，癌の生長の速さを使って宇宙船の速さを求めることができることになってしまう！

運動によって時間がおそくなるということの非常に面白い例が，μ 中間子(ミューオン)についてみられる．μ 中間子という粒子は，平均寿命 2.2×10^{-6} 秒で，突如として崩壊する．μ 中間子は地球にやってくる宇宙線の中にもあり，また実験室で人工的に作ることもできる．空気中で崩壊するものもあるが，そうでないものも，物質にあたって崩壊しておしまいになる．光の速さをもってしてもこの短い寿命の間には 600 m 以上運動できないことは明らかである．しかし，μ 中間子は地上約10 km という大気のてっぺんでつくられるのにもかかわらず，それが地上の観測室で宇宙線の中に実際にみつかるのである．どうしてこんなことがあるのか？　その答はこうである．μ 中間子の速さはいろいろで一定でなく，光の速さに非常に近いものもある．μ 中間子の立場からいえば，その寿命はたった2マイクロ秒であるが，我々の立場からいえばその寿命はこれにくらべてずっと長い――地球に到達することができるくらい長いのである．時間がのびる割合は，前に述べたとおり $\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ である．いろいろの速さの μ 中間子の平均寿命は，かなり正確に測定されているが，その値はこの式とよくあう．

中間子が何故崩壊するのか，またそのからくりが何であるのかは解っていない．しかしその行動は，相対性原理を満足するものであることはたしかである．これは，相対性原理の一つの利点である――他のことはよくわかっていないものについてさえ予言ができるのである．例えば，中間子がどうして崩壊するかわからなくても，それが光の速さの $\dfrac{9}{10}$ の速さで運動しているならば，その寿命は $\dfrac{2.2\times10^{-6}}{\sqrt{1-9^2/10^2}}$ 秒であるようにみえると予言することができる．そして実際も予言のとおりである――これは大したことである．

15-5　ローレンツ収縮

こんどは，ローレンツ変換(15.3)に立ち戻って，(x, y, z, t) 座標系と，(x', y', z', t') 座標系との間の関係を更によく理解しよう．これをそれぞれ S 系と S' 系，あるいは，太郎の系，次郎の系とよぶことにしよう．すでにみたとおり，(15.3)の最初の方程式の基礎となっているのは，x 方向に収縮するというローレンツの考えである．収縮が起こるということは，どうしたら証明できるか？　相対性原理によれば，マイケルソン-モーレイの実験では，運動に**直角な**長さ BC には変化はない；そして，実験が否定的であったことから考えると，**時間**は同じでなければならない．だから，実験で否定的結果が出るためには，運動方向の長さ BE が，平方根 $\sqrt{1-u^2/c^2}$ だけ短くみえなければならない．太郎と次郎との測定からみて，この収縮というのはどういうことなのであろうか？　S 系からみて x 方向に運動している次郎が，メーター棒で，ある1点の x' 座標を測るとする．次郎は棒を x' 回あてて，その

距離はx' m だと思うのである．S 系にいる太郎の立場からみると，次郎はちぢんでいる標尺を使っているのだから，真の距離は$x'\sqrt{1-u^2/c^2}$である．S' 系が，S 系に相対的にutという距離を運動したとすると，S 系の観測者がその座標系で同じ点をはかれば，その距離は

$$x=x'\sqrt{1-u^2/c^2}+ut$$

にある．すなわち

$$x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

であって，これがローレンツ変換の最初の式である．

15-6 同 時 性

時間の進み方に差があるので，ローレンツ変換の4番目の式に対しても，同様にして，分母の式が出る．この方程式で一番興味がある項は，分子の $\dfrac{ux}{c^2}$ である．これは予期しない全く新しい項だからである．このことをよく考えてみると，二つの離れた場所で起こることがらがS' 系にいる次郎からみて，同時に起こったとみえても，S 系にいる太郎からみると同時でないということになる．点x_1で時刻t_0に，ある一つのことがおこり，x_2でt_0に(同時に)他のことがおこったとすると，S' 系で，それに対応する時刻$t_1{}'$と$t_2{}'$との間には

$$t_2{}'-t_1{}'=\frac{u(x_1-x_2)/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

だけの差がある．このことは，“離れた場所における同時性の非成立”といわれるのであるが，この考えをもう少しはっきりさせるために，次の実験をしたとしよう．

宇宙船(S' 系)で運動している人間が，その両端に時計をおいて，その二つの時計があっていることを確かめようとしているとする．どうやれば，二つの時計をあわせることができるか？ 方法はいくつもある．その一つで，ほとんど計算が入って来ないのは，まず二つの時計のちょうど中央をきめることである．そして，この点から光の信号を出すと，それは同じ速さで両側に進んでいって，明らかに同時に両方の時計に到達する．この信号が同時に届くということを利用して，二つの時計をあわせることができる．そこでS' 系の人間は，この方法によって，その二つの時計をあわせたと考える．しかしそのとき，S 系にいる観測者は，S' 系の二つの時計があっているということを承知するだろうか．S' 系の人間は，自分が運動していることがわかっていないのだから二つの時計はあっていると信ずる権利がある．しかしS 系の人間は，宇宙船は運動しつつあるのだから，前方の時計は光信号から遠ざかっており，したがって光が追い付くためには宇宙船の長さの半分以上を進まなければならないと考える；一方，後方の時計は前進してきて光とぶつかるのだから，その距離は前方のよりも短い．だからS' 系の人間は信号は同時に到達すると思うのだが，光はまずはじめに後方の時計に到達するのである．だから宇宙船に乗っている人間が

二つの場所の時刻を同時だと思ったとしても，その座標系において等しいt'は，一方の座標系では**相異なる**tに相当するのである！

15-7　4元ベクトル

ローレンツ変換から，まだ他のこともわかるだろうか？　面白いことに，xやtの間のその変換の形式が，第11章で取り扱った座標の回転のときのxやyの変換の形式に似ているのである．座標回転の場合には

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta,$$
$$y' = y\cos\theta - x\sin\theta \tag{15.8}$$

であった．ここで新しいx'には古いxとyがまじり，新しいy'にも古いxとyとがまじっている；同じように，ローレンツ変換においても，新しいx'にはxとtがまじり，新しいt'には，tとxとがまじっている．このように，ローレンツの変換は回転に似ているのである．但しこれは**空間と時間**における“回転”であって，一見ちょっと奇妙なものである．回転に似ているということは，

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2 = x^2+y^2+z^2-c^2t^2 \tag{15.9}$$

と書いてみて調べることができる．この方程式の両辺のはじめの3項は，3次元幾何学で原点から1点までの距離(球面)の自乗であり，これは座標軸を回転しても変わらない(不変式)．同様に，方程式(15.9)は，時間を含んだある組合せがあって，それがローレンツ変換に対して不変であることを示している．このように，回転との類似は明白であって，座標や時間と同じように変換する“成分”を有するベクトルを考えると，相対性理論にとっても有用である．

これまで，ベクトルは空間成分しかもっていないと考えてきたのだが，我々はベクトルの概念を拡張して，時間の成分をも含ませて考える．すなわち，四つの成分をもつベクトルを考え，そのうち三つの成分はふつうのベクトルの成分と似ているが，それに加えて第4の成分があり，これは時間成分に対応するとするのである．

この考えについては，これからの章で更に取り扱うが，そこで前節の考えを運動量にあてはめると，変換の結果，ふつうの運動量に似た三つの空間成分が出てくるほかに第4の成分，時間成分，が出てきて，これは**エネルギー**にあたることがわかる．

15-8　相対論的力学

ローレンツ変換をすると力学の法則はどのような形になるか？　我々はこの問題をより一般的に考究する用意ができている．(長さと時間がどう変わるかについては説明がすんだが，mの新しい式(方程式15.1)がどうして得られるかはまだ説明してない．これは次の章でやる.) アインシュタインのいうようにmが変わることにすると，ニュートン力学はどのようなことになるか？　これを調べるために，まず，力とは運動量の変化であるというニュートンの法則から出発する：

$$\mathbf{F}=\frac{d(m\mathbf{v})}{dt}.$$

相対性理論でも，運動量は mv であるが，新しい m を使うと，これは

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v}=\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{15.10}$$

となる．これがニュートンの法則に対するアインシュタインの修正である．このように修正しても，作用と反作用とが等しいなら(時々刻々はそうでなくても永い間をみて)，運動量の保存が成り立つのは前と同じことである．しかし保存される量は，一定質量の $m\mathbf{v}$ という古い形ではなくて，(15.10)のように新しい質量の式を使ったものである．運動量の式にこの修正を入れれば，運動量の保存はやはり成立する．

次に速さによって運動量はどのように変化するかを調べよう．ニュートン力学では，運動量は速さに比例する．また相対論的力学でも(15.10)によれば，c にくらべて速さが小さいときには，ずいぶん広い範囲にわたって運動量は速さに比例する．平方根の式はほとんど1に等しいからである．しかし v が c にほとんど等しくなると，平方根の式はゼロに近付き，したがって運動量は無限に大きくなる．

一つの物体に一定の力がながくはたらいたら，どんなことが起こるか？ ニュートン力学によれば，その物体は速さをだんだん増して，光よりも速くなる．しかし，相対論的力学では，そういうことは不可能である．相対性理論においては，物体が得るのは速さではなくて，運動量である．そして質量が大きくなって運動量は次第に大きくなる．しばらくたつと，速度の変化という意味の加速度はほとんどなくなる．しかし運動量は大きくなる．力がはたらいても速度が少ししか変わらないとき，我々はこの物体の慣性は大きいというのはもちろんであって，相対論的質量の式(方程式15.10)のいうところ―― v が大きくて c に近いと慣性は非常に大きい――もまさにこれなのである．v を大きくするという努力の一例をあげるならば，このカルテク* で使われているシンクロトロンで，高速の電子の途をまげるのに必要な磁場の強さは，ニュートンの法則から期待されるものよりも2000倍も強いのである．いいかえれば，このシンクロトロンの中の電子の質量はふつうの値の2000倍も大きく，陽子の質量と同じくらいなのである！ m が m_0 の2000倍だということは，$1-\frac{v^2}{c^2}$ が $\frac{1}{4{,}000{,}000}$ だということであり，$\frac{v^2}{c^2}$ と1との差は $\frac{1}{4{,}000{,}000}$ で，v と c との差の c に対する割合は $\frac{1}{8{,}000{,}000}$ だということである．電子は光の速さにかなり近いのである．電子と光とが，シンクロトロン(だいたいここから700フィート)を出発して，この教室にむかって突進して来たとすると，どちらが早く着くか？ 光の方が速く伝わるのだから，もちろん，まず光**

* Caltech California Institute of Technology の略称．著者の Feynman はここの教授である(訳者注)．

** 実際には空気の屈折率があるので，可視光線と競走すれば電子の方が勝つ．ガンマ線を考える方がよい．

が着く．しかしどれだけ早く着くか？　どれだけということはむずかしい――その代り光がおいぬいている距離でいうならば，1 インチの $\frac{1}{1000}$ くらい，紙の厚さの $\frac{1}{4}$ くらいである！　電子がこんなに速く運動していると，その質量はおそろしく大きい．しかし速さの方は光の速さ以上になることはありえない．

質量が相対性理論的に変化すると，更にどんな結果が生ずるか？　小さな容器に入っている気体の分子運動を考えよう．気体を熱すると，分子の速さが大きくなるから，質量も大きくなり，気体が重くなる．速度が小さい場合に質量の増しをあらわす近似式を求めるには，

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=m_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

を，二項定理を使ってべき級数に展開すればよい．

$$m_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}=m_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots\right)$$

となる．この式からすぐわかるように，v が小さいときにはこの級数の収束ははやく，はじめの 2, 3 項以下は無視してよい．すなわち

$$m\cong m_0+\frac{1}{2}m_0v^2\left(\frac{1}{c^2}\right) \qquad (15.11)$$

となる．右辺の第 2 項は，分子運動による質量増加を示している．温度が高くなると，v^2 もそれに比例して大きくなるのだから，質量増加は温度上昇に比例するということができる．ところが $\frac{1}{2}m_0v^2$ は，ニュートンの旧式の意味で運動エネルギーであるから，気体全体の質量の増加は運動エネルギーの増加を c^2 でわったものに等しく，すなわち $\Delta m=\frac{\Delta(K.E.)}{c^2}$ であるといってもよいわけである．

15-9　質量とエネルギーは同じものである

上のようなことから，アインシュタインは次のように考えた．すなわち，質量は，全エネルギーを c^2 でわったものに等しいということにすれば，一つの物体の質量というものは，式(15.1)であらわすよりももっと簡単な形になるのではなかろうか．方程式(15.11)に c^2 をかけると

$$mc^2=m_0c^2+\frac{1}{2}m_0v^2+\cdots \qquad (15.12)$$

となる．この式で左辺は一つの物体の全エネルギーをあらわしている．また右辺の最後の項はふつうの意味での運動エネルギーである．m_0c^2 という大きい定数項は，この物体の全エネルギーの一部，すなわち，“静止エネルギー”といわれている内在エネルギーであるというのが，アインシュタインの解釈であった．

そこでアインシュタインに従って，**物体のエネルギーはつねに mc^2 に等しい**と仮定して，どういうことになるかを調べよう．その興味ある結果の一つは，式(15.1)はいままでは単にそう仮定しただけだったが，この質量変化がちゃんと出てくるということである．まず物体が

静止しているとき，そのエネルギーが m_0c^2 であるというところからはじめる．この物体に力をはたらかせると，それを動かしはじめ，運動エネルギーを与える；したがってエネルギーが増し，質量も大きくなる——これははじめの仮定の中に暗々裡に入っている．力がはたらきつづけていると，エネルギーも質量もだんだん大きくなる．前にみたとおり(第13章)，エネルギーが時間によって変わる割合は，力かける速度である：

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}. \qquad (15.13)$$

また $F=\dfrac{d(mv)}{dt}$ である(第9章方程式9.1)．これらの関係と E の定義とをいっしょにすると，方程式(15.13)は

$$\frac{d(mc^2)}{dt} = \mathbf{v}\cdot\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \qquad (15.14)$$

となる．この方程式を m について解こうとするのであるが，それには数学的技巧を使う．両辺に $2m$ をかけると方程式は

$$c^2(2m)\frac{dm}{dt} = 2mv\frac{d(mv)}{dt} \qquad (15.15)$$

となる．両辺を積分して微分係数をなくす．$(2m)\dfrac{dm}{dt}$ は m^2 を時間で微分したものであり，$(2m\mathbf{v})\cdot\dfrac{d(m\mathbf{v})}{dt}$ は $(mv)^2$ を時間で微分したものである．よって方程式(15.15)は

$$c^2\frac{d(m^2)}{dt} = \frac{d(m^2v^2)}{dt} \qquad (15.16)$$

と同じである．二つの量の微分係数が等しいならば，その量自身には，定数 C の差があるだけである．だから

$$m^2c^2 = m^2v^2+C \qquad (15.17)$$

と書いてよい．そこで定数 C をもっとはっきりきめる必要がある．方程式(15.17)はすべての速度に対して成立しなければならないから，$v=0$ という特別な場合をえらび，その場合には質量は m_0 であるとしてよい．これらの値を方程式(15.17)に代入すると，

$$m^2{}_0c^2 = 0+C$$

となる．この C の値を方程式(15.17)に使うと，

$$m^2c^2 = m^2v^2+m^2{}_0c^2 \qquad (15.18)$$

となる．c^2 でわって整理すると，

$$m^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = m_0{}^2$$

となり，これから

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (15.19)$$

が得られる．これは方程式(15.1)であり，また方程式(15.12)で質量とエネルギーとが同じものであるというのに必要な条件である．

ふつうの場合には，ある与えられた量の物質からそんなにたくさんのエネルギーを作り出すことはできないから，このエネルギー変化と

いっても，質量の変化はきわめてわずかなものである．しかし原子爆弾では，例えばTNTの2万トンに相当する爆発エネルギーを出すので，爆発後の塵の質量は，反応物質のはじめの質量にくらべて，1グラムも軽いことがわかる．これはエネルギーが放出されたからであって，$\varDelta E = \varDelta(mc^2)$ の関係によって，放出エネルギーのもっていた質量は，1グラムなのである．質量とエネルギーとが同じものであるという理論は，物質が消滅する——全部エネルギーになるという実験によって見事に立証された：電子一つと陽電子一つが，それぞれ静止質量 m_0 をもっているのが，いっしょになる．いっしょになると，崩壊して2種類のガンマ線が出るが，そのエネルギーを測ると，それぞれ m_0c^2 である．この実験によって，粒子の静止質量の存在に伴うエネルギーを直接に測ることができるのである．

第 16 章
相対論的エネルギーと運動量

16-1　相対性と哲学者

アインシュタインやポアンカレーの相対性原理は，物理学，その他の学問にどんな影響を及ぼしたであろうか．この章ではこのことを更につづけて論じようと思う．

ポアンカレーはこういうふうにいっている："静止している観測者にとっても，またそれに対して一様な平行移動をしている観測者にとっても，いろいろの物理現象の法則は同一であるというのが相対性原理である．したがって，そういう一様な運動をしているかどうかを識別する方法はないし，またありえない."

相対性原理の考えが世間にひろまったとき，哲学者，とくに"パーティー哲学者"の間では大さわぎになった．パーティー哲学者はこういう．"そんなことはいとも簡単だ：アインシュタインの説はすべてのことは相対的だというだけのことさ！" パーティーで見かける哲学者(といったのでは困る人があるから"パーティー哲学者"といっておくだけにしよう)ばかりでなく，驚くべき多数の哲学者が，"すべてのことが相対的であるというアインシュタインの結論が，我々の考え方に及ぼした影響は実に大きい"などという．そして更に，"現象というものはどういう立場からみるかによってきまるということが物理学で明らかになったのだ"という．このようなことはもう何遍も何遍も聞かされたけれども，私には，どうもその意味がはっきりしない．ここで彼らが立場というのは，多分，相対性理論を取り扱うときにでてくる座標系のことだろうと思う．だから，"現象というものはどういう立場からみるかによってきまる"ということが，現代の思考に重大な影響を及ぼしたというのだろう．しかし立場によってちがうなどということは，すこぶる簡単なことで，なにも相対性理論などというめんどうなまわり途をしてはじめて発見されるようなものではない．だから何故これが重大なのか，諸君にも納得がいかないだろう．人はその立場によって見るものがちがうということだったら，誰でも歩いてみさえすればすぐわかる．むこうから歩いて来る人をみると，はじめは前からみて，それからこんどは後からみることになる；相対性理論から生まれた哲学と称せられるものの大部分には，これ以上に深遠なものなどありはしない．群盲，象をなでるという古い話も，哲学者からみれば，相対性理論の一例なのだろう．

しかし，"人は前からみたときと後からみたときとでは違う"などと

いう簡単なこと以上に，相対性理論は，もっと深い意味をもっている．というのは**相対性理論によればこうこうなるはずだということをはっきり予言することができる**からである．上のような皮相的な哲学だけから，自然の行動が予言できたとしたら，それこそたいへんである．

ところが哲学者にまた別の一派がある．何か外にあるものをみることなしに絶対速度をきめることはできないという相対性理論が彼らにはたいへん不満で，こんなことをいうのである．“外をみないでその速度を測ることができないということはきまりきっている．そもそも外をみないでおいて，何かの速度などということをいうそのこと自体，明らかに**無意味**である．相対性理論以外の考え方をしてきた物理学者などというものはよほどどうかしている．物理学者はやっとこのことが解りはじめたのだ．物理学者がどんなことを問題としているか，それが我々哲学者にわかっていたとしたら，外をみないで運動の速さをきめるのは不可能であるということくらいは，我々は頭脳のはたらきだけですぐにでも結論できたろう．そして我々も物理学に大いに貢献することができたろう”などというのである．このような種類の哲学者はいつも我々のまわりにウヨウヨしていて，我々に何かを教えたがっている．しかし，彼らには，この問題の微妙なところや深奥なところはちっともわかってはいないのである．

次の話からすぐわかるように，我々が絶対運動を検出することができないというのは**実験**の結果なのであって，単なる思惟の結果ではない．まず第一に，ニュートンが信じていたところによれば，もしも人が直線の上を一様な速度で運動しているならば，自分にはその速さがわからないのである．じっさい，ニュートンは，まず，この相対性原理について述べているのであって，前章に述べたのも，ニュートンから引用したものである．それなら，“すべては相対的である”というようなことについて，ニュートンの時代に例の哲学者達が大さわぎをしなかったのは何故だろうか？　外をみないでも速度を測ることが**できる**ということを示す物理法則は，実はマクスウェルの電磁気理論に至って，はじめて問題になったのである；しかしやがて，それは**不可能**であるということが**実験的**に見出されたのである．

さて，外をみないで自分の速さを求めることはできないというこのことは，絶対的に，確定的に，また哲学的に**必要なのであろうか？**　相対性理論の結果の一つとして出てきた哲学には次のようなことがある．それは，“測定することのできるものでなければ定義することはできない！　速度を測ろうとしても，基準にとるものを見るのでなければそれはできない相談である．だから，絶対速度といっても**意味がない**．物理学者が論じうるのは，測定できるものに限る．このことをとっくに承知すべきであった”ということである．しかし**ここに問題の鍵がある**：**絶対**速度というものを定義することができるかどうかという問題は，外をみないで，自分が動いているかどうかを**実験によって知ることができるかどうか**という問題と同じことである．いいかえ

れば，あるものが測定できるかどうかということは，頭の中だけで**先験的**に決定されることではなくて，実験によってのみ決定されることなのである．光の速度は 186,000 マイル/秒であるというのは事実であるが，自動車の中でも光は 186,000 マイル/秒で伝わり，またその自動車が 100,000 マイル/秒で走っていたとしても，地上にいる観測者に対して光はやはり 186,000 マイル/秒で伝わる．こんなことは自明の理であるなどといって，すまして落付いて哲学者がいるとは考えられない．これは彼らにとって衝撃である；これは自明の理だなどという人がいたら，何か特定の例をもち出せばよい．ちっとも自明の理でないことがわかるだろう．

また一方には，外をみなければ，**どんな**運動でもわかるはずはないという哲学論さえあるのだ．しかし，このことは物理学ではうそである．**一直線**の上を**一様**な運動をしていることは感ぜられないということは，たしかであるが，しかし，部屋全体が**回転していれば**，誰でも壁の方に投げ出されるから，この運動は確かにわかる．いろいろな"遠心的"現象があるのである．地球がその軸のまわりにまわっていることは，星を見ないでも，例えばいわゆるフーコーの振子を使えばわかる．だから"すべてが相対的である"といってしまっては正しくない；外を見なければわからないのは，**一様の速度**だけである．このことを哲学者に話したとすると，彼はたいへんびっくりして，このことの真意がつかめない．外を見ないで回転がわかるなどということは，ありえないと思っているのである．もしも彼が熱心な哲学者だと，しばらくしてまたやって来て，こういう．"わかった．絶対回転などというものはありはしない；我々はほんとは**星に相対的に**回転しているのだ．星から何かの影響が物体にはたらいて，それが遠心力の原因になるのだ．"

我々の知る限り，これは正しい；星も星雲も何もなかったとしたら，遠心力というものがあるかどうか，現在われわれには答えられない．星雲をすっかりどけてしまって，回転を測るなどという実験はまだできはしない．だからこのことはわからない．この哲学者のいうところは正しいかも知れないと認めざるをえない．そこで彼はよろこんで帰っていって，こういう．"世界がこのようになっているというのは，絶対に必然である：**絶対**回転などということは無意味である；それは星雲に対して**相対的**であるに過ぎない．" そこでこんどは，我々は彼にこういってやる，"**ではね**，君，自動車が**星雲に対して**一直線上を一様な速度で走っているとき，車の中に何の影響も生じないということは，自明であろうか，ないだろうか？" 運動というものが絶対ではなく，**星雲に対して相対的**なものだというならば，これはすぐには解決できない問題である．実験によらなければ答えられない．

さてそれでは，相対性理論によって生じた哲学的の影響というのにはどんなことがあるであろうか？ この影響ということの意味次第だが，相対性原理が物理学者に**どのような新しい概念や考え方**を教えた

かという意味に解するならば，例えば次のようにいえるだろう．第1に教えられたことは，非常に永い間，信用されてきた，また非常に正確に立証されてきた考えでさえ，間違いであることがあるということである．永い年月にわたって正確であると思われてきたニュートンの法則が間違いであるということが発見されたのは，いうまでもなく実に衝撃的なことであった．もちろん，それまでの実験がまちがっていたというのではない．しかし実験された速度の範囲があまりに小さいところに限られていたので，相対論的の影響がはっきりあらわれてこなかったのである．そういうことがあるにしても，いまでは我々は物理学の法則というものについて，ずっと謙虚な気持でいる——あらゆる法則が間違っているということだって**ありうる**のだ！

第2の点は，運動していると時間の進行がおそくなるというような"新奇な"考えがいろいろ出て来たのだが，我々がそれを好むか好まないかというのは，重要な問題ではないということである．重要なことは，それが，実験の結果とあうかどうかということなのである．いいかえれば，それらの"新奇な考え"にとって必要なのは，**実験**とあうということだけなのである．前に時計のはたらきなどについて論じたというのも，時間がのびるという考えは新奇ではあるが，それが我々の時間の測り方とよく**つじつまがあう**ということを示すために他ならない．

第3の点はちょっと話が専門的になるが，他の物理法則を調べるのにも実に役に立つことである．それは，**法則の対称性に注意する**ということである．もう少し具体的にいうならば，どういう変換をしたら，法則の形が変わらないかということを求めるのである．ベクトルの理論を論じたときには，座標軸を回転しても運動の基礎法則は変わらないことをみた．そして今は，ローレンツ変換にしたがって，空間変数と時間変数とを変えても，基礎法則は変わらないことを知った．どういうやり方，どういう演算をすれば基礎法則は変わらないか．このことを調べるというのは，実に有益なのである．

16-2　ふたごのパラドックス

ローレンツ変換と相対論的現象とについての話を進めて，有名ないわゆるふたごのパラドックスを考えよう．海彦と山彦は同時に生まれたふたごである．2人が大きくなって宇宙船を操縦することができるようになったとき，海彦はそれに乗って非常な速さで飛び出していってしまう．地上に残っている山彦からみると，海彦は大へんな速さで飛んでいくので，海彦の時計の進み方はおそく，心臓の鼓動はゆっくりで，また思考も緩慢になり，あらゆることがゆっくりになったようにみえる．海彦からみれば何も特異なことはおこらない．しかし海彦が地球のまわりをしばらくグルグルまわってから帰って来てみると，地上にいた山彦よりも若いのである！　ほんとにそうなのである；これは，相対性理論から出てくる結果の一つであって，はっきりわかっ

ていることである．μ 中間子が運動していると寿命が長くなるように，海彦も運動していると永生きするのである．これはよく“パラドックス”などといわれている．しかし，相対性原理というのは，**すべての運動**は相対的であるということだと思い込んでいる人達がそういうだけのことである．彼らはいう．“へへへ，海彦からみれば，山彦が運動している．だから，山彦の年のとり方がおそいのだといえるのではないか？ 対称ということから考えて2人が再会したときには，おない年であるというのが，生じうる唯一の結果である.” しかし，海彦と山彦との2人がまたいっしょになって年齢をくらべあうのには，海彦は旅行を終りにして止まって，時計の比較をしなければならない．それよりもまずともかく帰って来なければならない．帰って来なければならないのは，運動していた者であって，このことは，海彦自身にわかるはずだ．海彦は後戻りしなければならないからである．海彦が後戻りすると宇宙船のなかではあらゆる異常なことが起こる——ロケットは飛んでいってしまう，すべてのものが壁にぶつかる等々——，しかし山彦自身は何も感じない．

そこでこういえる．**加速度を感じ**，いろいろのものが壁にぶつかるのをみた者は，若い方である；これは2人の間にある“絶対的”の差である．そしてこのことは正しい．μ 中間子が運動していれば，その寿命は長いということを前に述べたが，そのときには，μ 中間子は大気中を直線的に運動しているとした．しかし，実験室内でも μ 中間子をつくりだして，磁石を使って曲線に沿って運動させることができる．このように運動に加速度のある場合でも，μ 中間子の寿命の長さは，直線運動をしているときと同じである．このパラドックスを逃れるつもりでわざわざ実験をした人はまだないけれども，静止している μ 中間子の寿命と，円を一周する μ 中間子の寿命とをくらべることはできるはずである．そして円をまわる中間子の方が寿命が長いということになるにちがいない．円を一周させるという実験はまだ実際に行なわれたことはないけれども，すべてのことがうまくつじつまがあうのだから，わざわざやってみる必要もあるまい．あらゆる事実は一つ一つ直接にやってみなければ承知しないといいはる人は，これでは満足しないだろう．しかし山彦が円を一周する実験をしたらどういう結果になるかということは，確信をもって予言することができるのである．

16–3 速度の変換

アインシュタインの相対性と，ニュートンの相対性との主なちがいはどこにあるかといえば，相対的に運動している二つの系の間の座標と時間との変換法則のちがいにある．正しい変換法則，すなわちローレンツの変換法則は

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

$$y' = y,$$
$$z' = z, \qquad (16.1)$$
$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

である．これらの方程式は，2人の観測者の相対運動が両方に共通なx軸に沿っているという，比較的簡単な場合である．もちろん，他の方向の相対運動もありうるわけだが，最も一般的なローレンツ変換となると，上の四つの量がからみあって，かなり複雑なものになる．x方向だけの簡単な形でも，相対性の本質的なところが入っているから，これで話をつづけることにしよう．

この変換によって出てくる結果を更に考えてみよう．まず，これらの方程式を逆に解いたらどうなるか．ここに四つの未知数を含む四つの連立方程式があるのだが，それを逆に解いて，x, y, z, t を x', y', z', t' で表わそうというのである．はなはだ面白い結果が出てくる．それは，その解によって，"運動している" 座標系からみると，"静止している" 座標系がどうみえるかということがわかるからである．運動は相対的であり，またその速度も一様であるから，"運動している" 者も，運動しているのは相手であって，自分は静止しているのだ，という権利があるのはいうまでもない．ただ，運動の方向が逆であるから，速度の符号が反対になるだけで，変換は同じことになるはずである．実際計算してもまさにそうなる．だからつじつまがあうのである．もしもそうならなかったとしたら，大こまりであった！

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1-u^2/c^2}},$$
$$y = y',$$
$$z = z', \qquad (16.2)$$
$$t = \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

次の大切な問題は，速度の加法は相対論ではどうなるかということである．ここで思いおこすのは，いくつかの系の間に相対的運動があっても，光の速さはそのすべての系において，186,000 マイル/秒だという例の謎である．これは次に述べるようなもっと一般的の問題の特別な場合である．ある物体が宇宙船のなかを，100,000 マイル/秒の速さで運動していて，その宇宙船自体も 100,000 マイル/秒で運動しているとする；宇宙船の外にいる観測者からみると，この物体の速さはいくらか．200,000 マイル/秒といいたくなるかも知れないが，これは光の速さよりも速い．物体の速さは，光の速さ以上にはならないのだから，この答は非常に困る．この問題を一般的にいえば，こういうことになる．

宇宙船のなかの物体が，宇宙船のなかにいる人からみて速度vで運動しているとし，また宇宙船自体が地面からみて速度uで運動しているとする．求めようとするのは，地面にいる人からみたとき，この物

体の速度 v_x は何程か．しかし，これでも，運動が x 方向だという特別な場合に過ぎないことはもちろんである．y 方向その他任意の角に対しても，速度の変換式があるわけで，それも必要に応じて求められる．さて，宇宙船のなかで，この物体の速度は $v_{x'}$ であるとする．すなわち，変位 x' は，時間かける速度に等しい：

$$x' = v_{x'}t'. \tag{16.3}$$

x' と t' とはこの(16.3)のような関係にあるのだが，外にいる観測者からこの物体をみたら，距離や時間はどうなるかを計算しよう．(16.3)を(16.2)に代入すれば

$$x = \frac{v_{x'}t' + ut'}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{16.4}$$

となる．しかしこれでは，x が t' の関数になっている．外にいる人からみた速度を求めるには，**彼の使う距離を彼の使う時間で**割るべきであって，**相手の時間**で割るのではない．そこで，外からみた**時間**を求めなければならない．それは

$$t = \frac{t' + u(v_{x'}t')/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{16.5}$$

である．そこで x と t の比を求めると，平方根は約せて

$$v_x = \frac{x}{t} = \frac{u + v_{x'}}{1 + uv_{x'}/c^2} \tag{16.6}$$

となる．これが求めていた法則である：すなわち，二つの速度を“加えた”合成速度は，その二つを単に代数的に加えたものではなくて(代数的の和ではありえないことがわかって，面倒なことになった)，$1+\dfrac{uv}{c^2}$ という“補正”がつく．

この結果として，どういうことになるか？ 光の半分の速さで諸君が宇宙船のなかを運動しているとし，宇宙船自体も光の半分の速さで飛んでいるとする．u は $\frac{1}{2}c$，v も $\frac{1}{2}c$，分母の $\frac{uv}{c^2}$ は $\frac{1}{4}$ であるから，

$$v = \frac{c/2 + c/2}{1 + 1/4} = \frac{4c}{5}$$

となる．だから相対論では，“半分”と“半分”とをたすと，その和は“1”にはならず，“$\frac{4}{5}$”にしかならない．光にくらべて，速度が小さければ，$1+\frac{uv}{c^2}$ のことは無視してもいいから，普通のようにすぐそのままたしてよい；しかし，速度が大きくなると，まるでちがった，そしてたいへん面白い現象が起こるのである．

次に極限の場合を考えて，人が宇宙船のなかで**光それ自体**を観測するとしよう．すなわち $v=c$ であり，しかも宇宙船は運動している．地上にいる人からみたら，これはどう見えるか？ 答はこうである．

$$v = \frac{u + c}{1 + uc/c^2} = c\frac{u+c}{u+c} = c.$$

それゆえ，宇宙船のなかで何かが光の速さで運動しているのを，地上にいる人からみると，それはやはり光の速さで運動しているようにみえる！ これは**うまい**，アインシュタインの相対性理論はまさにこう

なるようにつくられているのである．——こうこなくてはいけない！

物体の運動が一様な平行移動の方向でない場合だってもちろんある．例えば，宇宙船のなかで，物体がそれに対して速度 $v_{y'}$ で“上むき”に運動し，宇宙船は“水平に”運動するということだってありうる．前の x' の代りに y' を使って同じことをやればよいわけで，結果は

$$y = y' = v_{y'}t'$$

である．だから $v_{x'}=0$ ならば

$$v_y = \frac{y}{t} = v_{y'}\sqrt{1-u^2/c^2} \qquad (16.7)$$

となる．すなわち，静止系から見た上向きの速度は $v_{y'}$ ではなくて，$v_{y'}\sqrt{1-u^2/c^2}$ である．我々は変換の方程式を代入したり組み合わせたりしてこの結果を得たのであるが，次のような理由によって，相対性原理から直接にこの結果を求めることもできる．(何事によらずそうなる理由があるかどうかを考え直してみるのはいいことである.) 我々はすでに(図 15-3)，時計が運動しているときにどのような進み方をするかを論じたことがある；静止系からみれば光はある角度をなして c の速さで進むようにみえ，また運動系からみれば c の速さで上下に伝わるようにみえるだけである．静止系における光の速度の**上下成分**は，光の速さに $\sqrt{1-u^2/c^2}$ (図 15-3 を見よ) という係数がかかっただけ小さくなっている．そこで，この“時計”の中で，何かの粒子を往復させるとする．そしてその速さが光の速さの整数分の 1，$\frac{1}{n}$，であるとすれば，この粒子が 1 往復する間に光は，n 回往復するはずである (図 16-1)．すなわち“粒子”時計の“カチカチ”は，光時計の n 回目の“カチカチ”と一致する．**このことは，粒子が運動していても同じであるはずである**．何故ならば，一致という物理現象は，どの系からみても一致でなければならないからである．速さ c_y は光の速さよりもおそいのだから，粒子の速さ v_y も，同じ平方根の比で小さくなっていなければならない！ 上下速度に平方根があらわれる理由はここにあるのである．

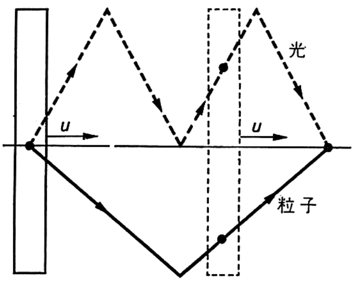


図 16-1　運動している時計内における光線と粒子の経路

16-4　相対論的質量

一つの物体の質量は，その速度が大きくなればなるほど，大きくなる．このことは前の章で学んだけれども，これに対しては，運動している時計の様子を論じたときのような説明は加えなかった．しかし，相対性と，その他二,三の合理的な仮定とを組み合わせると，質量はこのように変化するはずであるということが出て来る．(“その他二,三の仮定”といったわけは，何かあることを証明するのには，若干の法則を真なりと仮定しなければ，意味のある推論をすることができないからである.) さて，このことをふつうに証明しようとすると，力の変換の法則が必要になってくるが，それを避けるために**衝突現象**を考えることにする．衝突の場合には，運動量とエネルギーの保存を仮定するだけでよく，それ以外に，力の法則については何の知識もなくてよ

い．また，運動している粒子の運動量は一つのベクトルであって，いつも速度の方向にむいていると仮定する．ニュートンは，運動量は速度に**定数**をかけたものであるとしたが，我々はそれは定数ではなくて，速度の**関数**であるとする．したがって，運動量ベクトルは，速度ベクトルにある係数をかけたものであるとする：

$$\mathbf{p} = m_v\mathbf{v}. \tag{16.8}$$

係数mにvという添字をつけたのは，それが速度の関数であることを忘れないためである．この係数m_vを“質量”とよぶことにしよう．速度が小さければ，これは，ふつうの低速運動の実験で測られる質量と同じものである．さて，相対性原理によれば，物理法則はあらゆる座標系からみて同一でなければならない．このことから出発して，m_vが$\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$であることを証明しよう．

いま例えば二つの陽子というように，同じ粒子が二つあって，それが同じ速度で互いに近付いてくるとする．全運動量はゼロである．さて，この二つが衝突したらどんなことが起こるか？　衝突した後はその運動の方向は互いに正反対であるはずである．もしも正反対でなかったとすれば，全運動量ベクトルはゼロでなくなって，運動量が保存しないことになる．また，この二つの粒子は全く同じものなのだから，衝突後の速さも同じであるはずである．そのうえ，衝突のときにエネルギーも保存すると考えたのだから，衝突の前後で速さが変わるはずもない．したがって，この弾性，可逆衝突は，図16-2(a)のようになる：この図の矢の長さはみな等しい，速さはみな等しい．角θはどんな値にもなりうるし，またどんな速さで衝突させることもできる．さてそこで，軸をまわしてみると，この衝突は前とはようすがちがってみえる．ここでは簡単のために，図16-2(b)のように軸をまわして，水平線でθが2等分されるようにしてみる．この図にかいてあるのは，軸がまわっているだけで前と同じ衝突である．

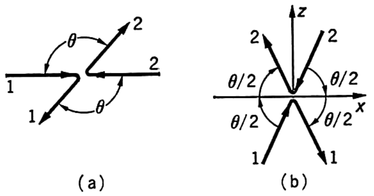


図16-2　同じ速さで反対のむきに運動している二つの等しい物体の弾性衝突の見え方二つ

さてここでうまい手を使う：一方の粒子の水平速度成分と同じ速さで走っている自動車を想像して，それに乗ってこの衝突をみるとするのである．そうすればどのようにみえるか？　この自動車に対して粒子(1)は水平成分をもっていないから，それはま上に上って来るようにみえる．また衝突後も水平成分はないから，この粒子はまっすぐに下に落ちていくようにみえる．結局，衝突は図16-3(a)のようにみえるはずである．しかし粒子(2)の運動の方向は逆であるから，車にのっていくと，粒子(2)は猛烈な速さでこっちへ飛んで来るようにみえ，そして角度は実際よりも小さくみえる．しかし，衝突の前後でその角度は**変わらない**．粒子(2)の速度の水平成分をuとし，粒子(1)の上下速度をwとする．

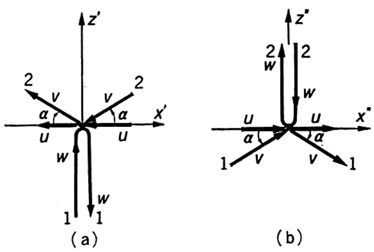


図16-3　走っている自動車からみた衝突の見え方二つ

さてそこで，粒子(2)の上下速度$u\tan\alpha$は何か．これがわかりさえすれば，上下方向の運動量保存の法則を使って，運動量の正しい式が求められるはずである．運動量の水平成分は，明らかに保存されている：運動量は両方の粒子について衝突の前後で同じであり，また粒子

(1)についてはゼロである．そこで上下速度 $u\tan\alpha$ だけについて運動量保存の法則を使えばいい．ところが，同じ衝突を逆の見方をしてみるだけで，上下速度が**求められる**のである．図16-3(a)の衝突を，こんどは速さ u で左にむかって走っている車からみたとすると，同じ衝突が図16-3(b)のように“ひっくりかえし”になってみえる．こんど速さ w で上ったり下ったりするのは，粒子(2)であって，粒子(1)の水平方向の速さが u である．こう考えれば，速度 $u\tan\alpha$ が $w\sqrt{1-u^2/c^2}$（方程式16.7をみよ）であることがわかる．上下に運動している粒子の上下運動量の変化は

$$\Delta p = 2m_w w$$

である．（上下に動くから2がつく.）斜めに動いてくる粒子の速度は v で，その成分は u と $w\sqrt{1-u^2/c^2}$ であり，その質量は m_v である．したがって，この粒子の**上下**運動量の変化は $\Delta p'=2m_v w\sqrt{1-u^2/c^2}$ である．というのは，(16.8)に仮定した法則によれば，運動量の成分は，いま考えている方向における速度成分に，その速度に対応する質量をかけたものであるからである．だから，全運動量がゼロであるためには，上の二つの上下運動量が互いに打ち消しあうようになっていなければならない．したがって速さ v で運動しているときの質量と，w で運動しているときの質量の比は

$$\frac{m_w}{m_v} = \sqrt{1-u^2/c^2} \tag{16.9}$$

でなければならない．

そこで w が無限に小さいという極限の場合を考える．w が非常に小さければ，v と u とはほとんど等しい．この場合には，$m_w\to m_0$，$m_v\to m_u$ である．結局

$$m_u = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{16.10}$$

となる．

質量の方程式(16.10)が正しいとして，任意の w の値に対しても方程式(16.9)が成り立つかどうかを調べてみたまえ．これは面白い演習になる．そのとき，方程式(16.9)に必要な速度 v は，直角三角形から

$$v^2 = u^2+w^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)$$

によって求められることに注意する．方程式(16.9)は，これまでは，w が小さいという極限の場合だけにしか使わなかったけれども，あらゆる場合にもうまくあてはまるようになっていることがわかるはずである．

そこで，運動量は保存するということ，質量は(16.10)に従って速度によって変化するということ，この二つを認めたうえで，さらにまだ他にどんな結果が出てくるか．ふつうに**非弾性衝突**といわれているものがあるが，その問題を取り上げよう．簡単のために，同種のものが二つあるとして，それが同じ速さ w で反対むきに動いて来て，ぶつ

かってくっついてしまって，図 16-4(a)に示すように，それが一つの新しいものになって静止するとする．二つのもののそれぞれの質量は，w に対応して，$\dfrac{m_0}{\sqrt{1-w^2/c^2}}$ である．そこで運動量の保存と，相対性原理とを仮定すると，二つのものがいっしょにくっついてできたこの新しいものの質量に関して面白いことが出てくる．いま w に直角な方向に，微小な速度 u があったと考える．(有限の u でも同じことになるが，微小速度にしておく方がわかりやすい.) そして $-u$ という速度のエレベーターに乗ってこの衝突を観察するとする．我々の目にうつるのは，図 16-4(b)のようなものであろう．いっしょになってくっついてできたものの質量 M は未知である．粒子(1)の速度の上方成分は u であり，水平成分はほとんど w に等しい．粒子(2)についても同じである．衝突後には，新しくできた質量 M が上方に速度 u で運動する．u は，光の速さにくらべてずっと小さく，また w にくらべても小さい．そこで運動量の保存を使って，衝突の前後の上方運動量を求めよう．衝突前には，$p\sim 2m_wu$ であり，衝突後には，明らかに $p'=M_uu$ である．ところが，u は小さいから，M_u はほとんど M_0 と同じである．運動量の保存から，この二つの運動量は等しくなければならない．したがって

$$M_0=2m_w \tag{16.11}$$

である．**二つのものの衝突によって新しくできたものの質量は，衝突するものの質量の 2 倍である**．諸君はいうかも知れない．“そのとおり．当り前である．これこそ質量の保存である” と．しかし “そのとおり．当り前である” とは参らぬ．何故かといえば，二つのものの質量は，静止のときにくらべて**大きくなっていた**のであって，全体の M に寄与したのは，静止の質量ではなくて，**その大きくなっていた質量**だからである．これは驚くべきことだ．しかし，二つのものがぶつかっていっしょにくっつくとき，運動量の保存が成り立つためには，衝突後静止していても，できるものの質量は二つのものの静止質量の和よりも大きくなければならないのである！

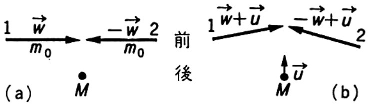


図 16-4　質量の等しい二つの物体の非弾性衝突の見え方二つ

16-5　相対論的エネルギー

前章で述べたとおり，質量が速度に関係するということと，ニュートンの法則とを組み合わせると，次のことが結論される．すなわち，物体に力がはたらいているとき，その全仕事によって生ずる運動エネルギーの変化は，

$$\Delta T=(m_u-m_0)c^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}-m_0c^2 \tag{16.12}$$

である．そして我々はさらに前進して，全エネルギーは，c^2 かける全質量なのではないかとまで想像した．この議論を進めよう．

さきほどの二つの等質量のものが，衝突後も相変わらず M の内部に “見えている” としよう．例えば陽子と中性子が “くっついていっしょになって” いても，それらはそのまま M の中で動きまわっているとし

よう．ちょっと考えると，質量 M は $2m_0$ かと思われるが，$2m_0$ ではなくて，$2m_w$ である．$2m_w$ は投入されたものであり，$2m_0$ はなかにあるものの静止質量であるから，できたものの質量**過剰**は，投入された運動エネルギーである．このことが，すなわち**エネルギーは慣性をもっている**ということを意味するのである．前章で気体を熱する問題を論じたが，そこで述べたとおり，気体分子は運動していて，運動していれば重くなるのだから，気体にエネルギーを入れてやるとその分子の運動が速くなって，気体が重くなる．しかしいまの問題は実はもっと一般的であって，非弾性衝突についていえば，それが**運動エネルギー**であろうとなかろうと，質量はともかくそこにあるのである．すなわち，二つの粒子がいっしょになってくっついたときに，位置のエネルギーその他のエネルギーを生ずるような場合であろうと，あるいは粒子が斜面を登っておそくなり，内力その他に対して仕事をするような場合であろうと，どんな場合であろうと，質量は投入されたエネルギーに等しいということは，そのまま成立するのである．このように，質量の保存は，エネルギーの保存と同等なのである．ニュートン力学の場合には，厳密な意味で非弾性衝突というものがあったのだが，相対性理論ではそういう特別なものはない．ニュートン力学では，二つのものが衝突して質量 $2m_0$ のものができるのは結構なのだが，それは二つのものをゆっくりいっしょにしてくっつけたものと区別できない．エネルギーの保存則から考えると，内部には運動エネルギーが余計にあることになるのだが，ニュートン力学によればこのことは質量に影響を及ぼさない．しかし，いま我々が知ったところによれば，これは不可能である．衝突に運動エネルギーが関与するので，できたものはそれだけ**重い**のである；つまり別のちがうものができるのだ．二つのものを静かにいっしょにくっつければ，できるものの質量は $2m_0$ である；いきおいよくいっしょにくっつければ，できるものの質量はこれよりも大きい．質量がちがえば，**別のちがったものである**．このように，相対性理論では，運動量の保存と共にエネルギーの保存を考えなければならないのである．

これから面白いことが出てくる．例えば，質量 M のある物体があって，何かの拍子でそれが速さが w，質量が各 m_w のもの二つに等分するとする．そしてこれらのものが他の物質にぶつかっておそくなって止まるとする；また止まったときの質量は m_0 であるとする．止まるときまでに，物質にはどれだけのエネルギーが与えられたか？　前に証明した定理によれば，そのエネルギーは，それぞれ $(m_w-m_0)c^2$ である．このたくさんのエネルギーが，熱エネルギーか位置のエネルギーかその他何らかの形で物質内に残される．ところが $2m_w=M$ であるから，出たエネルギーは，$E=(M-2m_0)c^2$ である．この方程式を使えば，例えば原子爆弾内の核分裂で放出されるエネルギーはいくらかということを見積もることができる．(分裂でできる片々は厳密に等しくはないが，だいたい等しい.) ウラン原子の質量は既知である

——ずっと以前に測定されていた．これが分裂してヨウ素，キセノン等になるのだが，その質量もみんな既知である．ここでいう質量とは，原子が運動しているときの質量ではなく，**静止しているとき**の質量である．Mもm_0も，両方ともわかっているのだから，その二つの差をとれば，Mを“半分”に分裂させたらどれだけのエネルギーが出るかということを計算することができる．アインシュタイン老が，気の毒にも新聞などで原子爆弾の“父”といわれるようになったのはこのためである．その意味するところは，どういうものがどう分裂するかということを知りさえすれば，アインシュタインの式に従って，出てくるエネルギーの量をあらかじめ計算することができるというだけのことなのである．ウランの原子一つが分裂するときに出るはずのエネルギーが見積もられたのは，最初の核爆発実験テストが行なわれたのよりも6カ月ほど前のことであった．そして，テストでエネルギーが放出されるや否や，そのエネルギーが直接に測定された．(もしもアインシュタインの式があてはまらなかったとしても，ともかく測定は行なわれたことだろう.) そして測定が行なわれたその瞬間から，式はもういらなくなってしまった．我々はもちろんアインシュタインを軽くみてはいけない．我々はむしろ，新聞だとか，科学技術史上で何が何の原因になったかということを解説する通俗書だとかいうものを批判すべきなのであろう．物事を効果的に速く実行するのにはどうすればよいかというようなことは全く別問題である．

相対性理論の結果は，化学にとってもまた重大である．例えば我々が二酸化炭素分子の質量を測り，それを炭素，酸素の質量とくらべてその差をとれば，この炭素と酸素とで二酸化炭素をつくったとき，どれだけのエネルギーが出ることになるかがわかる．ただ残念なことには，質量の差があまり小さいので，このことを実行することは技術的に非常にむずかしい．

さて，運動エネルギーにm_0c^2を加えて，今後は一つの物体の全エネルギーはmc^2であるということにすべきかどうかという問題に立ち戻る．まず，静止質量m_0の片々がいっしょになってMをつくっているとき，その片々がMの内部に存在するのを**みる**ことができるものであるならば，次のようにいえる．すなわち，質量Mの一部は，各片の機械的静止質量であり，その一部は各片の運動エネルギーであり，また他の一部は各片の位置エネルギーである，といってもよかろう．自然界において，すでにいろいろの粒子が発見され，そしてそれらは上に述べたように反応するのであるが，しかし世界中でいろいろの研究が行なわれたにもかかわらず，その**内部に部分片のあることを認めることはできない**のである．例えば，一つのK中間子が二つのパイオンに分裂するときには，(16.11)の法則に従うのであるが，しかしK中間子がパイオン二つから成り立っていると考えても何の役にも立たない．三つのパイオンに分裂することもあるのだ！

そこでここに**新しい考え**がうまれる：ものは内部で何からできてい

るかということを知る必要はない；一つの粒子の内部の，エネルギーのどれだけの分が，これから分裂するものの静止エネルギーであるかなどということは，きめることもできないし，またその必要もない．一つのものがもっている全体のエネルギー mc^2 を，内部にある片々の静止エネルギーだ，運動エネルギーだ，位置エネルギーだと区別することは，都合のよいことでもなければ，またできることでもない；粒子の**全エネルギー**といえばもうそれでよいのである．あらゆるものに定数 m_0c^2 を加えてエネルギーの“原点をずらし”，粒子の全エネルギーというのは，c^2 に運動質量をかけたものだとする．その粒子が静止しているなら，エネルギーは c^2 に静止質量をかけたものである．

最後に，速度 v，運動量 P，全エネルギー E の間にはかなり簡単な関係がある．その中で，速さ v で運動しているときの質量は，静止質量 m_0 を $\sqrt{1-v^2/c^2}$ でわったものだという関係そのものは，ほとんど利用されない．これはちょっと意外なことだが，その代り，次の関係はすぐ証明できるし，また非常に有用である：

$$E^2-P^2c^2=M_0{}^2c^4 \tag{16.13}$$

及び

$$Pc=\frac{Ev}{c}. \tag{16.14}$$

第17章
時空の世界

17-1 時空間の幾何学

一つの座標系で測った位置と時間と，他の座標系で測った位置と時間との間の関係は，相対性理論によると，我々が直感によって考えるのとは，ちがったものである．ローレンツ変換が示す時間・空間の関係をよく理解することが何よりも大切である．そこで本章では，この問題を更に掘り下げよう．

“静止している”観測者位置と時間 (x, y, z, t) と，速度 u で“運動している”宇宙船の中の位置と時間 (x', y', z', t') との間の関係を示すローレンツ変換は，

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}},\\
y' &= y,\\
z' &= z,\\
t' &= \frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}
\end{aligned}
\tag{17.1}
$$

である．

また方程式(11.5)も，二つの座標における測定の関係を述べたものであるが，それはそのうちの一方が，他のものに対してある角度だけまわった場合である．

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\theta+y\sin\theta,\\
y' &= y\cos\theta-x\sin\theta,\\
z' &= z.
\end{aligned}
\tag{17.2}
$$

(17.1)と(17.2)とをくらべてみる．(17.2)の場合には，太郎の x 軸と次郎の x' 軸との間の角が θ であって，そういう軸によってそれぞれ測定が行なわれているのである．(17.2)のどの式をみても，“′のついている”量には，“′のついていない”量がまじりあっている．新しい x' には，x と y とがまじりあい，新しい y' にも，x と y とがまじりあっている．

こういうアナロジーをとって考えるといい：我々が一つの物体を眺めると，“みかけの幅”というべきものがたしかにあり，また“奥行”というべきものがたしかにある．しかしこの幅とか奥行とかいう二つのものは，その物体の**基本的**な性質ではない．それは，もしも我々がわきに動いてちがった角度から同じものを眺めたとすると，幅も奥行も変わってしまうからである．そして，その角度と古い方の幅と奥行

とから，新しい方の幅と奥行とを計算する式を求めることができる．方程式(17.2)はまさにそのような式である．ある一方向からみた奥行というものは，あらゆる方向からみた奥行とあらゆる方向からみた幅とが**まじりあっているもの**ではないか，という人もあるだろう．もし，わきに動くということがそもそも不可能で，与えられた物体を眺めるのはいつも同じ位置からだけに限られているというならば，この問題は大して意味を持たなくなる——我々はいつも“真の”幅と“真の”奥行とをみているのであって，両者は全く別個の性質をもっていることになる．何故ならば，幅の感じは視角というものとして捉えられるに対して，奥行の感じは目の調節作用，あるいは直感さえ関係してくるからである；そして，幅と奥行とは全く別のものと思われ，決してまじりあわない．奥行とか幅とかいうものは，ともかく，同じものをちがった見方をしているのだということになるのは，我々が歩きまわることが**できる**からこそである．

このような見方でローレンツ変換をみることとはできないだろうか？ ローレンツ変換には，位置と時間とがまじりあっている．空間測定と時間測定との間に差があるが，その差によって新しい空間測定が生ずる．いいかえれば，1人の観測者の空間測定を他の観測者からみれば，時間がちょっとまじりこむ．前のアナロジーからいって，こういう考えがでてくる：我々がみている一つの物体の“真実性”というものは，その“幅”とか“奥行”とかいうものの真実性よりも，ともかく大きい(乱暴な直感的ないい方だが)．何故ならば，**幅や奥行**というものは，我々の見方によるものであるからである．我々が動いて新しい位置に来ると，脳が直ちに幅と奥行とを計算し直してくれる．しかし我々が高速で運動していると，座標と時間とをすぐに計算し直すことは，脳にはできない．それは，我々は光に近い速さで運動して，時間と空間とは同じ本性のものであるということをさとったという実際的経験がないからである．このことは，あたかも我々がある位置に固定されてしまって，首をあちこちに動かすことも不可能で，ものの幅だけしか見ることができないという場合と似ている．もしも動けるとしたら，他人の時間がいくらか見える——いわば，いくらかものの“後”がみえるということになる．

我々のふつうの空間世界における対象は真実であり，いろいろの方向からこれをみることができるのであるが，それと同じ意味で，空間と時間とがまじりあっているこの新しい世界におけるものとして対象を考えることにしよう．そこで，ある空間を占め，ある時間の長さだけ継続する対象は，この新しい世界における一種の“粒”であると考え，我々がいろいろな速度で運動しているときには，いろいろな立場からこの“粒”をみるのだと考えよう．この新しい世界，すなわちその中に“粒”があって，位置を占め，そしてある長さの時間をとる，この幾何学的存在を，**時空間**という．時空間に与えられた点(x, y, z, t)のことを**事象**という．そこで例えばx位置を水平方向にとり，yとz

は互いに"直角"で，かつ，紙の面にも"直角"になるような方向にとり(!)，時間を上下方向にとるとしよう．そうしたとき，例えば，運動している粒子はこの図でどうなるか？　もしも粒子が静止しているならば，その x の値は一定である．そしていくら時間がたっても，それは，同じ x, 同じ x, 同じ x である；だからこの粒子の"線"は，t 軸に平行な一つの直線である(図17-1a)．ところが，この粒子が外へ動いていくとすると，時間がたつにつれて x は大きくなる(図17-1b)．こんどは例えば粒子が動きはじめ，やがておそくなるとすると，その運動は，図17-1(c)に示したようになる．いいかえれば，永続していて分裂しない粒子は，時空間では1本の線であらわされる．一つの粒子が分裂するとすると，それはふたまたの線になる．二つの別々のものになってその点から出発する．

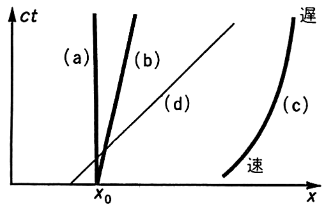


図 17-1　時空間における粒子三つ
(a) $x=x_0$ に静止している粒子
(b) $x=x_0$ から出発し一様な速さで運動する粒子
(c) 高速で運動しはじめるがおそくなる粒子

光はどうなるだろうか？　光は速さ c で伝わるので，ある一定の傾きをもった直線になる(図17-1d)．

いま，一つの粒子に，ある事象が起こったとする．例えばある時空間の点で，一つの粒子が突然分裂して二つの新しい粒子になり，それが新しい経路に沿って運動するとする．そしてこの事象は，ある x とある t でおこったとする．ちょっと考えると，新しい2軸をとってそれをまわすだけでよいということになり，これが図17-2(a)に示したように，新しい系における新しい x と新しい t になるわけだと思われるが，しかしこれはまちがっている．というのは，方程式(17.1)と方程式(17.2)との数学的変換は**全く**同じではないからである．例えば，両者における符号がちがっているし，また，一方では $\cos\theta, \sin\theta$ になっているが，他方では代数的量になっている．(もちろんこの代数的量を cosine や sine と書くことは不可能ではないが，実際にはできない.) しかしそれにしても(17.1)と(17.2)の二つの式は実によく**似ている**．ただ符号がちがうのだから，時空間が実在の普通の幾何学であると考えるわけにはゆかない．特にこの点を強調するわけではないが，運動している人間は，図17-2(b)に示したように，光線に対して同じ傾きをしている x' 軸と t' 軸とをとって，それに投影したものを x' と t' としなければならないのである．しかし幾何学に深入りしてもあまり役に立たないからそれはやめにする；方程式を扱う方がやさしい．

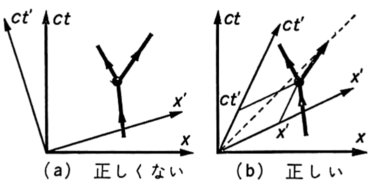


図 17-2　崩壊する粒子の図二つ

17-2　時空間におけるインタバル

時空間の幾何学は，ふつうの意味でユークリッド的ではないが，しかしそれに非常によく似ていて，しかも特異な性質をもっている別の幾何学が**ある**．もしもこの幾何学が正しいとすると，座標と時間との間に，座標系に関係しない関係があるはずである．例えば，ふつうの回転の下で，二つの点を考える．簡単のために一つの点は原点にあり，他はどこか別のところにあるとし，また二つの系の原点が同じだとする．このとき原点から第2点までの距離は，両方の系で同じである．この性質は，距離の求め方には関係しない．距離の自乗は $x^2+y^2+z^2$

である．では，時空間ではどうだろうか？　この場合にも，不変なものがあることはすぐわかる．それは$c^2t^2-x^2-y^2-z^2$という組合せであって，これは変換の前後で変わらない．

$$c^2t'^2-x'^2-y'^2-z'^2=c^2t^2-x^2-y^2-z^2 \qquad (17.3)$$

だから，この量は，距離と同じように，ある意味で“真実”なものである．これを時空間における2点間の**インタバル**という．いまの場合，2点のうちの一つは原点にとってある．（実は，間隔の自乗である．$x^2+y^2+z^2$が距離の自乗であるのと同じことである．）距離といわないで，インタバルという別の名前をつけたのは，幾何学がちがうからである．距離とくらべてみると，インタバルでは符号がいくつか反対になっていて，またcが入って来ている．

このcが出て来ないようにしてみよう；xやyを互いに交換できるような都合のよい空間を考えようというのなら，cが入っていては不都合だ．物の幅は視角で測り，奥行はこれとちがって眼の焦点をあわせる筋肉のちぢみ方で測り，奥行はフィートで，幅はメートルでということになったら，経験のない人は混乱してしまう．そんなことをしたら，(17.2)のような変換をするのに，とてもたくさんの複雑な方程式がゴタゴタ出て来てしまう．そして同じものを測るのにちがった単位を使っているという，きわめて簡単な技術上だけの理由で，ものごとの明白さ，単純さが見失われてしまう．方程式(17.1)と(17.3)によれば，時間と空間とは自然界において同格である；時間は空間にもなる；**両方とも同じ単位で測られなければならぬ**．1“秒”の距離はいくらか，ということは，(17.3)からすぐに求められる．それは3×10^8 m，すなわち**光が1秒間に進む距離である**．距離も時間もすべて秒という同じ単位で測ろうというならば，距離の単位は3×10^8 mとなり，方程式は簡単になる．単位をそろえるもう一つの方法は，時間の方をmで測ることである．時間1mとは光が1m進む時間である．したがって$\frac{1}{3}\times10^{-8}$秒，すなわち1秒の3.3億分の1である！　いいかえれば，我々の方程式をすべて$c=1$という単位系で書こうとするのである．このように時間と空間とを同じ単位で測れば，方程式はずっと簡単になる．

$$\begin{aligned} x'&=\frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2}},\\ y'&=y,\\ z'&=z,\\ t'&=\frac{t-ux}{\sqrt{1-u^2}}. \end{aligned} \qquad (17.4)$$

$$t'^2-x'^2-y'^2-z'^2=t^2-x^2-y^2-z^2. \qquad (17.5)$$

ここでは$c=1$とおいたのだが，そうするともとの正しい方程式に戻れないだろうと，不安がったり“こわがる”人もあるかも知れない．しかしそれはまさに反対である．方程式を覚えるのには，cなしにしておいた方がずっと覚えやすいし，また次元の関係から，cを入れ戻

すのはわけない．例えば，$\sqrt{1-u^2}$ について考えると，速度を自乗したものは，ある単位をもっているのだから，それをただの数1からひくことはできない．そこで，これを無次元にするためには，u^2 は c^2 でわられたものでなければならないという具合である．

時空間と普通の空間とのちがい，インタバルと距離との関係は，実に面白い問題である．式(17.5)によると，ある座標系における点が，時間がゼロで空間だけがあったとすると，インタバルの自乗は負になり，インタバルそれ自身は負数の平方根で虚数になる．この理論によれば，インタバルは実数にもなれるし，虚数にもなれる．インタバルの自乗は正にも負にもなれる．これは距離の自乗がつねに正であるのとはちがう．インタバルが虚数である場合には，2点の間の**インタバルは空間的である**という．（虚数とはいわないで．）それはこの場合のインタバルは，時間によりも空間に似ているからである．また，二つのものが一つの座標系で同一の場所にあるが，時間がちがうという場合には，時間の自乗は正で距離はゼロで，インタバルの自乗は正である．これを**時間的なインタバル**という．だから，時空間の図で，次のようなことになる；45°の線が2本あって(4次元では，実は光円錐という"円錐"になる)，それらの線の上にある点はすべて原点からインタバルゼロである．ある1点から出た光がいくところと，その点との間のインタバルは，方程式(17.5)からわかるように，必ずゼロである．ところで，これはある系において光の伝わる速さが c であるとすると，他の系でも c であることを証明したことになる．インタバルが両方の系で同じくゼロであるならば，このことと，光の伝わる速さが座標系に関係しないで不変だということとは同じである．

17-3　過去，現在，未来

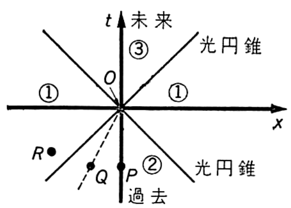


図17-3　原点にある点のまわりの時空図

時空間に一つの点が与えられたとすると，図17-3に示したように，そのまわりを三つの領域にわけて区別することができる．その三つのうち，1ではインタバルは空間的であり，2ではインタバルは時間的である．物理的にいうと，この三つの領域は，与えられた点に対して面白い関係をもっている；一つの物体，あるいは信号は，領域2から出発して，光の速さ以下の速さで動いてきて，事象 O に達することができる．だから，領域2のなかの事象は，点 O に対して過去からの影響を与えることができる．t 軸の負の方にある点 P は，点 O の"過去"にあるのはいうまでもない．P は O と空間の同じ点だが，以前であるだけのことだ．そのとき P で起こったことが，いま O に影響を及ぼしているのだ．（悲しい哉，人生がそうだ．）Q に別のものがあるとすると，これも光の速さ以下の速さで動いてきて O に達する．だからこのものが宇宙船の中にあったとしても，それも O 点の過去である．すなわち，他の座標系では，時間軸は O と Q とを通ることになる．このように，領域2にある点はすべて O の"過去"である．そしてこの領域で起こることは，O に**影響を与えうる**．それで，領域2のことを**過去**

圏とか，影響を与える過去とかいうことがある；それは点Oになんらか影響を与えうる点の軌跡である．

一方，領域3はどういうところかというと，**Oから**影響が与えられるところ，すなわちcよりもおそい速さで“たま”を撃ち，ものに“あてる”ことのできるところである．つまりここは，それの未来に我々が影響を与えうるところであって，**未来圏**ともいってよいだろう．残りの領域，すなわち領域1について著しいことは，**Oにいる我々から**いまそれに影響を与えることもできないし，また**Oにいる**我々にいま影響を与えることもできないということである．それは光の速さよりも速く進むものはないからである．もっともRに起こったことは**やがて**我々に影響を及ぼすことはもちろんである；すなわち，太陽が“いま”爆発しても我々がそれを知るのには8分かかり，そのときまでは何の影響もありえない．

“ただいま”ということの意味は，神秘的であって，定義をすることができない．我々は“ただいま”に影響を与えることはできないが，“ただいま”は後にやがて我々に影響を与えうる．あるいは，ずっと前に何かをしておいたら我々も“ただいま”に影響を与えることもできた．我々がαケンタウルス星を眺めるとき，我々がみているのは，それの4年前の姿である；その星は“ただいま”どうなのだろうか．“ただいま”というのは，我々に固有の座標系からみて“同時に”という意味である．我々がαケンタウルス星をみることができるのは，4年前という我々の過去から来た光によるのであって，その星が“ただいま”どうなっているかはわからない；この星の“ただいま”の様子が我々に影響を与えるのは4年先のことである．“ただいま”のαケンタウルスというのは，我々の頭の中の考えであり観念であって，現在，物理的にちゃんと規定できるものではない．我々はまだそれを観測することはできない；“ただいま”すぐ規定することもできない．さらに，この“ただいま”というのは，座標系にも関係する．たとえば，αケンタウルス星が運動しているとすると，この星にいる観測者は，我々のいうことに合意しないだろう．何故ならば，その観測者は，我々の座標軸に対して斜めの座標軸を使い，彼の“ただいま”は我々の“ただいま”とは**ちがう**のである．同時ということがきちんと一つにきまるものではないことは，すでに述べた．

世に占師，すなわち未来を知っていると称する人がいる．また，未来圏について知識をもっていることに突如として気がついたなどという人について，さまざまの不思議な話がある．こういう話自体には，またたくさんのパラドックスが含まれている．もしも将来何かが起るということがわかっているのなら，適当なときに適当なことをすれば，それは確かに避けられるではないか，等々．しかし実際のところ，**現在**のことをさえ知らせてくれる占師はない！　かなり離れたところでいま何が起こっているかは，観測できないのだから，わかるはずはない．次に問題を出しておくから，その答は諸君がやってみればよ

い：領域1の空間的インタバルにおけることが，急にわかるようになったとしたら，何かパラドックスが生じるだろうか？

17-4 ふたたび4元ベクトルについて

ローレンツ変換と空間軸の回転とが似ているという問題に立ち戻って，もう少し考えを進めてみよう．すでに学んだように，座標と同じように変換する量をいっしょにまとめて，**有向量のベクトル**をつくると，便利である．ふつうの回転の場合に，x, y, z と同じように変換する量はいろいろある；例えば，速度の x, y, z の3成分がそれである．他の座標軸からみると，どの成分も，変換してみな新しい値になる．しかし，速度"それ自身"は，これら個々の成分よりもより真実であって，我々はそれをベクトルとして矢であらわす．

そこでこういう問題が考えられる：動いている系と静止している系との間で，x, y, z, t と同じように互いに変換しあう量があるか，ないか？ ベクトルの経験からいうと，そのうち x, y, z のような量は，ふつうの空間ベクトルの3成分になる．しかし第4の量，時間，は運動している座標系に移らないかぎり変化しないから，これは空間回転の際にもふつうのスカラーであるようにみえる．それならば，すでにわかっている"3元ベクトル"の何かに第4の"時間成分"の項を加えて，その四つのものがみな位置と時間と同じように時空間で"回転"するようにできないものだろうか？ そういうものは少なくとも一つある（実は，そういうものはいくつもある）：**運動量の3成分**，それと**時間成分としてエネルギーとをとると，それらはいっしょになって**，我々が"4元ベクトル"と称するものになる．このことを証明するのに，いちいち c を書くのはめんどうだから，エネルギー，質量，運動量の単位については方程式(17.4)のときのような技巧を使うことにする．例えば，エネルギーと質量とのちがいは c^2 という係数だけで，これは単位の問題に過ぎないから，エネルギーは質量**である**といって差支えない．いちいち c^2 を書く代りに，$E=m$ とおく．それで何かつじつまがあわなくなったら，最後の方程式に c の何乗かを入れて単位をちゃんとすればよく，途中の方程式では省略してよい．

こうすれば，エネルギーと運動の方程式は，次のようになる：

$$E = m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}},$$
$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{17.6}$$

同じ単位を使って

$$E^2 - p^2 = m_0^2 \tag{17.7}$$

である．例えば，エネルギーを電子ボルトで測るとすると，1電子ボルトの質量とは何か？ それは静止エネルギーが1電子ボルトであること，すなわち m_0c^2 が1電子ボルトだという意味である．例えば一つの電子の静止質量は 0.511×10^6 eV である．

さて，新しい座標系では，運動量とエネルギーはどうみえるか？それを求めるには，方程式(17.6)を変形する必要がある．速度の変換式はわかっているから，この変形はすぐできる．物体の速度が v であるとし，それを速度 u で飛んでいる宇宙船から眺めるとする．宇宙船の系には $'$ をつけて，静止系のものと区別する．まず，ことがらを簡単にするために，u と v とは同じ方向であるとする．(一般の場合は，後に取り扱う．) 宇宙船からみると，合成速度 v' は v と u との"差"で，前に求めた法則によって，

$$v' = \frac{v-u}{1-uv} \tag{17.8}$$

である．そこで新しいエネルギー E'，すなわち宇宙船にのっている人の目にうつるエネルギーを計算しよう．彼はもちろん同じ静止質量を使うが，速度としては v' を使う．そこで v' を自乗して1からひき，平方根を求めてその逆数をとればよい：

$$v'^2 = \frac{v^2-2uv+u^2}{1-2uv+u^2v^2},$$

$$\begin{aligned} 1-v'^2 &= \frac{1-2uv+u^2v^2-v^2+2uv-u^2}{1-2uv+u^2v^2} \\ &= \frac{1-v^2-u^2+u^2v^2}{1-2uv+u^2v^2} \\ &= \frac{(1-v^2)(1-u^2)}{(1-uv)^2}. \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{1}{\sqrt{1-v'^2}} = \frac{1-uv}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2}}. \tag{17.9}$$

エネルギー E' は，上の式に m_0 をかけたものである．しかし，それを $'$ のついていないエネルギーと運動量とであらわしたい．ところが，

$$E' = \frac{m_0-m_0uv}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2}} = \frac{(m_0/\sqrt{1-v^2})-(m_0v/\sqrt{1-v^2})u}{\sqrt{1-u^2}}$$

すなわち

$$E' = \frac{E-up_x}{\sqrt{1-u^2}} \tag{17.10}$$

であって，これは

$$t' = \frac{t-ux}{\sqrt{1-u^2}}$$

と全く同じ形をしている．次に新しい運動量 $p_{x'}$ を求めなければならぬ．運動量は，エネルギー E' かける v' であって，これも E と p とで簡単にあらわせる：

$$p_{x'} = E'v' = \frac{m_0(1-uv)}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{v-u}{(1-uv)} = \frac{m_0v-m_0u}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2}}.$$

よって

$$p_{x'} = \frac{p_x-uE}{\sqrt{1-u^2}} \tag{17.11}$$

であって，これは

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2}}$$

と全く同じ形である．

このように，新しいエネルギーと運動量とを古いエネルギーと運動量とであらわす変換は，t' を t と x とであらわし，x' を x と t とであらわす変換と全く同じである：つまり，(17.4)で t があればいつもそれを E におきかえ，x があればいつもそれを p_x におきかえるだけで，方程式(17.4)は，方程式(17.10)，(17.11)と同じになる．これで万事都合よくいくならば，$p_{y'}=p_y, p_{z'}=p_z$ ということになる．このことを証明するのには，前に戻って，上下運動を論じなければならない．しかし実は，上下運動の場合は前の章で取り扱ってある．すなわち，複雑な衝突を取り扱って，運動している系からみても，直角方向の運動量は**変化しない**ということになった；つまり，$p_{y'}=p_y, p_{z'}=p_z$ は証明ずみである．よって変換をすっかり書けばこうなる：

$$\begin{aligned} p_{x'} &= \frac{p_x-uE}{\sqrt{1-u^2}}, \\ p_{y'} &= p_y, \\ p_{z'} &= p_z, \\ E' &= \frac{E-up_x}{\sqrt{1-u^2}}. \end{aligned} \tag{17.12}$$

つまり，これらの変換で，x, y, z, t と同じように変換する量が四つあることがわかったわけで，これを**4元ベクトル運動量**という．運動している粒子の運動量は4元ベクトルだから，それは時空間図では，図17-4に示すように，途に接する“矢”によってあらわされる．この矢の時間成分はエネルギーに等しく，空間成分はその3元ベクトルになる；この矢は，エネルギーよりもまた運動量よりも，より“真実”である．エネルギーや運動量は，図のみかたに関係する．

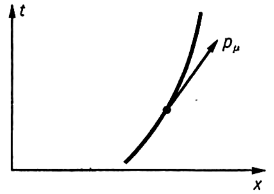


図17-4　粒子の4元運動量ベクトル

17-5　4元ベクトル代数

4元ベクトルに関する記号は，3元ベクトルに関するものとはちがう．3元ベクトルの場合には，ふつうの3元ベクトル運動量を $\mathbf{p}$ と書く．もっと具体的にいうならば，$\mathbf{p}$ はいま考えている軸に関して p_x, p_y, p_z という3成分をもっているといってもよい，あるいは一般的にその成分は p_i であって，i は x, y, z のどれでもよくそれが3成分をあらわすといってもよい．すなわち，i が x, y, z の三つの方向のどれか一つであると考える．4元ベクトルに関する記号もこれに似ているところがある：4元ベクトルに対して p_μ と書き，μ は t, x, y, z の四つのどれでもよい．

もちろんのぞみとあればどんな記号を使ってもよい；記号をばかにしてはいけない；記号というものを発明すれば大いに役に立つ．数学というものは，主として実は，よりよい記号の発明である．4元ベク

トルという考えも，実のことをいえば記号を改善して，上にのべた変換を覚えやすいようにしたものである．A_μ と書けば一般的の4元ベクトルであるが，特にそれが運動量である場合には，p_t はエネルギーであり，p_x は x 方向の，p_y は y 方向の，p_z は z 方向の運動量である．いくつかの4元ベクトルを加えるには，対応する成分をそれぞれ加える．

いくつかの4元ベクトルの間に一つの方程式が成り立つならば，**おのおのの成分**に対しても，同じ方程式がなりたつ．3元運動量ベクトルの場合には，粒子の衝突について保存の法則がなりたつ．相互に作用しあったり衝突しあったりする粒子がたくさんあって，その運動量の総和が一定であるならば，すべての粒子の x 方向の運動量，y 方向の運動量，z 方向の運動量の和もそれぞれ一定である．しかし相対論からみるとこの法則だけでは**不完全**で，こういうことにはならない；ちょうど3元ベクトルで成分を二つしか考えなかったのでは不完全なのと似ている．不完全だというわけは，軸を回転すると，いろいろの成分がまざってくるので，法則のなかに3成分全部を含ませなければいけないからである．これと同じように，相対論で運動量保存の法則を完全なものにするためには，**時間成分**をも含ませなければならない．他の3成分といっしょに時間成分を考えることは**絶対に必要**であって，3成分だけでは相対論的不変量にならない．**エネルギーの保存**と運動量保存とがいっしょになって，時空間の幾何学の4元ベクトル関係を成り立たせるのであるが，エネルギー保存はその第4番の方程式にあたる．4元記号によれば，エネルギーと運動量の保存の方程式は

$$\sum_{\text{入粒子}} p_\mu = \sum_{\text{出粒子}} p_\mu \tag{17.13}$$

あるいは，書き方を少し変えて

$$\sum_i p_{i\mu} = \sum_j p_{j\mu} \tag{17.14}$$

である．ここで $i=1,2,\cdots$ は衝突に入ってくる粒子，$j=1,2,\cdots$ は衝突で出てくる粒子であり，$\mu=x,y,z$ または t である．“どの軸で”と諸君は尋ねるかも知れないが，このことは軸によらない．どんな軸を使ってもこの法則は各成分について成り立つ．

もう一つ，ベクトル解析では，二つのベクトルのスカラー乗積のことを述べた．時空間でこれにあたる事を考えよう．ふつうの回転では，$x^2+y^2+z^2$ という不変量がある．4元では，$t^2-x^2-y^2-z^2$（方程式17.3）がこれにあたる．これをどう書いたらいいか？　一つの方法は，4角点 ◈ を4元の量の中間に書いて，A_μ◈B_μ のようにする；実際に使われている記号の一つは

$$\sum_\mu{}' A_\mu A_\mu = A_t^2-A_x^2-A_y^2-A_z^2 \tag{17.15}$$

である．$\sum$ に $'$ がついているのは，第1項すなわち“時間”の項が正で，他の三つの項にはマイナスの符号がついていることを示す．そう

すると，この量はどんな座標系をとっても同じで，4元ベクトルの長さの自乗といってよい．例えば，一つの粒子の4元運動量ベクトルの長さの自乗は何か？ それは $p_t^2-p_x^2-p_y^2-p_z^2$ に等しい．いいかえれば E^2-p^2 である．p_t は E であるからである．E^2-p^2 とは何か？ これは，ともかくあらゆる座標系で同じであるものでなければならない．とくに，粒子といっしょに運動していて，粒子が静止しているようにみえる座標系に対しても同じでなければならない．粒子が静止しているならば，運動量はない．だからこの座標系では，これはエネルギーだけであり，それはこの粒子の静止質量と同じである．したがって，$E^2-p^2=m_0^2$ である．これで4元ベクトル運動量の長さの自乗は m_0^2 に等しいことがわかる．

一つのベクトルの自乗から，"スカラー乗積"を発明することができる：a_μ が一つの4元ベクトルであり，b_μ が他の4元ベクトルであるとすると，そのスカラー乗積は

$$\sum{}' a_\mu b_\mu = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z \tag{17.16}$$

である．これはすべての座標系でも同じである．

最後に，静止質量 m_0 がゼロであるものについて述べておこう．光子がその例である．エネルギーと運動量とをもっているという点では，光子は粒子のようなものである．一つの光子のエネルギーは，その光子の振動数にプランクの定数をかけたものである：$E=h\nu$．このような光子も運動量をもっている．光子の運動量は(実は，どんな粒子の運動量も) h を波長でわったものである：$p=\dfrac{h}{\lambda}$．しかし，光子については，振動数と波長との間には，$\nu=\dfrac{c}{\lambda}$ という関係がある．(おのおのの波長に1秒間の波の数をかけたものは，光が1秒間に伝わる距離であって，それはもちろん c である.) だからすぐわかるように，光子のエネルギーは，c に運動量をかけたものであり，もしも $c=1$ ならば**エネルギーと運動量とは等しい**，すなわち静止質量はゼロである．もう一遍考えてみよう；これはまことに珍妙である．静止質量がゼロの粒子ならば，それが静止したらどんなことがおこるか？ **決して止まらないのである！** いつも速さ c で進む．エネルギーの式は，一般に $\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}$ である．$m_0=0$ で $v=1$ だからエネルギーは0だといえるか？ そうは**いえない**；光子は，その静止質量はゼロであるが，実際にはエネルギーをもつことができる(またもっている)．そして光の速さで進むことによって永久にエネルギーをもっているのである！

どんな粒子でも，その運動量は，その速度に全エネルギーをかけたものである：もしも $c=1$ ならば $p=vE$，ふつうの単位なら $p=\dfrac{vE}{c^2}$ である．どんな粒子でも，光の速さで運動していれば，$c=1$ とおけば $p=E$ である．運動系からみた光子のエネルギーの式は，方程式(17.12)であることはいうまでもないが，運動量については，エネルギーを c 倍(この場合には1倍)して使わなければならない．変換するとエネルギーが変わるが，これは振動数が変わることを意味する．これがドップラー効果といわれるものであって，$E=p$ と $E=h\nu$ とを使って，

方程式(17.12)からわけなく計算することができる.

　ミンコウスキーのいったように,“空間それ自身,時間それ自身は,単なる影と消えてしまう.それらがある組合せとなったものだけに意味がある”.

第18章
平面内の回転

18-1 質量の中心

前の各章で取り扱ったのは，点や小さい粒子などの力学であって，その内部の構造がどうなっているかということは，問題としなかった．これからの数章では，もう少し複雑な構造をもっているものにニュートンの法則をあてはめてみる．世界が複雑になれば，それだけ面白い．点よりも複雑な物体の力学現象は，たしかに顕著なものである．これらの現象は，もちろん，ニュートンの法則を組み合わせた以上のものではないが，$F=ma$ だけでこんなことが出てくるとはちょっと信じがたい．

複雑なものを取り扱うといっても，それにもいろいろの種類があろう：流れている水，渦を巻いている銀河系，等々．“複雑な”ものの中でまずはじめにいちばん簡単に取り扱えるのは“剛体”であって，動くときに回転する固体である．こんな簡単な物体でも，その運動がおそろしく複雑な場合がある．そこでまず，いちばん簡単な場合として，ひろがりのある物体が**固定軸**のまわりに回転することを考えよう．このとき，この物体のなかに1定点をとると，それは，軸に垂直な平面内を動く．固定軸のまわりの物体の回転を，**平面回転**または2次元における回転という．後にいろいろの結果を一般化して3次元にもっていくが，そのときわかるように，ふつうの点の力学とちがって，回転というものは，2次元で基礎をかためておかないとしっかり把握し理解するのがむずかしい．

複雑な物体の運動について興味ある定理があらわれてくるのは，まずかたまりや棒などをたくさん紐でつないで空中にほうり出したときの現象である．粒子のときには放物線になるのだから，これも放物線になることは当然である．しかし我々がいま考えているものは，**粒子ではない**；グラグラしたり，ブルブルしたりする．しかしそれでもその途は放物線である；これは目でみればわかる．しかし，**何が**放物線に沿って運動するのか？ かたまりのかどの点ではない．かどの点はグラグラしている；また木の棒のはじでもなければまんなかでもない．けれども**どこかの点**が放物線に沿って運動する．そしてそれは，“中心”の役目をする点である．そこで複雑な物体に関する第1定理は，それに一つの平均位置というものが**ある**ということである．この点は数学的にはっきり定義されるのであるが，物体自身の内部にあるとは限らない．放物線に沿って運動するのはこの点である．これが質量の

中心の定理であって，その証明は次のとおりである．

いま勝手な物体を考える．それはたくさんの小粒子，原子から成り立っていて，その間にいろいろの力がはたらいているとする．その粒子の一つ一つを指定するために i をつけてあらわす．(粒子の数は厖大だから，i は 10^{23} くらいにもなる．) i 番目の粒子にはたらく力は，その粒子の加速度に質量をかけたものである：

$$\mathbf{F}_i = m_i\left(\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2}\right). \tag{18.1}$$

これからの数章で取り扱う運動体では，そのすべての部分の速さはみな光の速さよりもずっと小さいとする．そこですべての量については，相対論を考えにいれない近似を使うことにする．このような場合には質量は一定であるから，

$$\mathbf{F}_i = \frac{d^2(m_i\mathbf{r}_i)}{dt^2} \tag{18.2}$$

である．すべての粒子にはたらく力を加える，つまり添字 i のちがう $\mathbf{F}_i$ をすべて加えあわせると，全力 $\mathbf{F}$ が得られる．上の方程式の右辺では，微分する前に加えるのだが，同じことになる．

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F} = \frac{d^2(\sum_i m_i\mathbf{r}_i)}{dt^2} \tag{18.3}$$

したがって，全力というのは，位置に質量をかけてすべて加え合わせたものの2階微分係数である．

さてすべての粒子にはたらく全力というのは**外力**と同じである．何故か？ 粒子の間には，ひもがあり，おしあいへしあいがあり，原子間の力があり，その他いろいろのものがあって，これらの力をすべて加えなければならないというたいへんなことになるのだが，ニュートンの第3法則があるので救われる．どの二つの粒子をとって考えても，その間の作用と反作用とは等しい．だから二つの粒子の間にどんな力がはたらいていても，方程式をすべて加えあわせるときに，それは互いに打ち消しあってしまう．だから，正味の結果は，いま和をとろうとしている物体の中に含まれていない他の粒子から来る力だけになる．いくつかの粒子を"物体"として考え，方程式(18.3)がそれらの粒子についての和だとすると，この全物体にはたらく**外力**というのは，その物体を構成するすべての粒子にはたらく**全部**の力の和に等しい．

さて方程式(18.3)を書き換えて，何かの加速度に全質量をかけたというものになるならば話がうまいが，そうなるのである．M がすべての質量の和，すなわち全質量であるとする．そこで $\mathbf{R}$ というベクトルを次のように**定義**する：

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i\mathbf{r}_i}{M}. \tag{18.4}$$

そうすれば，M は一定であるから方程式(18.3)は，単に

$$\mathbf{F} = \frac{d^2(M\mathbf{R})}{dt^2} = M\left(\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}\right) \tag{18.5}$$

となる．こうすれば，外力は，**R**という位置にある仮想点の加速度に全質量をかけたものになる．この点を物体の**質量の中心**という．この点は，物体の“まんなか”というべきところにあるのであって，いろいろの $\mathbf{r}_i$ にその質量に比例する重みあるいは重要さをつけてとった一種の平均である．

この大切な定理については，後章でくわしく論ずることにして，ここでは次の二つの点を指摘するに止めておこう：第1に，もしも外力がゼロであって，物体が虚空に浮いているとすると，この物体は回転したり，ブルブルしたり，またねじれ運動したりするなど，あらゆることをするだろうが，しかし，いま人為的に発明し計算した位置，すなわち**質量の中心**というのは，まんなかにあって，**一定の速度で運動する**のである．特に，はじめ静止していたとすれば，それは静止しつづける．いまここに一つの箱があるとする．その箱というのは宇宙船であって，それに数人のっているとする．その質量の中心の位置が静止しているとすると，外力がこの箱にはたらかない限り，この中心は静止しつづける．むろん宇宙船は少しは動くだろうが，これは乗っている人が，その中で前後に動くからである；1人が前の方に動けば，宇宙船は後の方に動いて，すべての質量の平均位置はきちんと同じ場所に止まって動かない．

質量の中心を動かすことができないというなら，ロケット推進は絶対に不可能ということになるか？ そうではない；大切な部分を推進させるには，大切でない部分を投げすてなければならないのである．いいかえれば，はじめ静止しているロケットの後端から気体をふきだすと，気体塊はこっちへ来てロケット船はあっちへ行く．しかし質量の中心は，前にあった位置から少しも動かない．つまり，我々は大切でない部分に対して，大切な部分を動かすだけのことである．

第2の点は，質量の中心というものは，物体の“内部”運動と別個に無関係に取り扱うことができるということである．回転を論ずるときにも無視してよいのであって，実はこれがこのことをいまここで述べておく理由である．

18-2 剛体の回転

次に回転について考えよう．ふつうの物体が回転運動だけをするということはない．物体は，ブルブルしたり，振動したり，曲がったりする．そこで事柄を簡単にするために，現実には存在しない理想的な物体を考えて，これを**剛体**と名付ける．そしてその運動を考えることにする．剛体というのは，そのなかの原子の間にはたらく力が非常に強くて，全体を動かすに要する力くらいでは曲がらないような性質をもった物体である．運動していても，その形はほとんど変わらない．このような物体の運動を考えるときに，その質量の中心の運動を問題外とすれば，残るものはただ一つ，それを**まわす**ということである．この運動を記述するにはどうすればよいか？ その物体のなかにある

直線を考えて，それは動かないでそのままになっているとする(この直線が質量の中心をとおっても，とおらないでもいい)．そしてこの物体がこの直線を軸として回転しているとする．この回転をあらわすにはどうすればいいか？　これはやさしいことである．軸以外のどこかの点にしるしをつけて，この点がどこへ行ったかということを知りさえすれば，この物体の位置がきまる．この点の位置を示すのに必要なのは，**角度**だけである．すなわち回転というのは，時間に対して角度がどう変わるかという問題である．

回転を考えるためには，物体がまわった角度に目をつける．物体自身の**内部**のある特定の角度ではない；**物体上**に角度をしるすのではない．我々が問題にするのは，**全体の位置を示す角度**が時間によってどう変化するかということである．

まず最初に，回転運動の有様を考える．時間によって角度が変化する．そして，1次元で位置と速度とを考えたように，平面回転の角位置と角速度とを考えることができる．面白いことに，2次元の回転と1次元の変位とは，ほとんどあらゆる量が互いに対応する．まず第1に，物体がどれだけ**まわったか**を示す角度θがある；これは物体がどれだけ**進んだ**かを示す変位yにあたる．同じように，回転速度$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$は，物体が1秒間にどれだけの角度の変化をしたかを示すが，これは$v=\dfrac{ds}{dt}$が，物体がどんな速さで動くか，あるいは1秒間にどれだけ動くかということに対応する．角度をラジアンで測れば，角速度ωも1秒間にこれこれラジアンということになる．角速度が大きければ大きいほど，物体は速くまわっているのであり，角度の変化も速い．更に進んで，角速度を時間で微分することができ，$\alpha=\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$を角加速度と名付ける．これは，ふつうの加速度に対応する．

さて，これから一つの物体の回転の力学を考えるにあたっては，それを，その物体を構成している粒子の力学の法則と関連させなければならない．そこでまず，角速度がこれこれであるとしたときに，ある一つの粒子がどのように運動するのかを求めなければならない．そのために，軸からrの距離にある1点を考えて，ある時刻におけるその点の位置が$P(xy)$であるとする(図18.1)．それから$\varDelta t$だけたって，この物体が全体として$\varDelta\theta$だけまわったとすると，今考えている粒子もそれとともに動く．Oからの半径は前と同じであるが，位置はQに移っている．まず，距離xはどれだけ変化するか，距離yはどれだけ変化するかということを求める．OPをrとすれば，PQの長さは，角度の定義に従って$r\varDelta\theta$である．よってxの変化は，$r\varDelta\theta$をx方向に投影したものに他ならない：

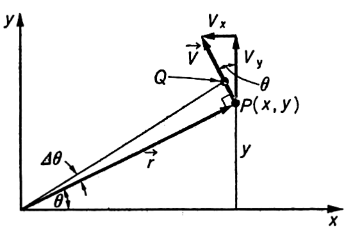


図18-1　平面内の回転の運動学

$$\varDelta x = -PQ\sin\theta = -r\varDelta\theta\cdot\left(\frac{y}{r}\right) = -y\varDelta\theta. \quad (18.6)$$

同様に

$$\varDelta y = +x\varDelta\theta \quad (18.7)$$

である．この物体の角速度をωとすれば，(18.6)と(18.7)の両辺を$\varDelta t$

でわって，いま考えている粒子の速度は

$$v_x = -\omega y \quad と \quad v_y = +\omega x \tag{18.8}$$

である．速度の大きさは，もちろん

$$v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} = \sqrt{\omega^2 y^2 + \omega^2 x^2} = \omega\sqrt{x^2+y^2} = \omega r \tag{18.9}$$

となる．速度の大きさが ωr であることは，別段不思議ではない；動いた距離が $r\Delta\theta$ であり，1秒間に動く距離は $\dfrac{r\Delta\theta}{\Delta t}$ すなわち $r\omega$ となるので，これは自明の理というべきである．

次に回転の**力学**に進もう．この場合には新しい力の概念を入れなければならない．力と直線運動との間にはある関係があるが，回転との間にこれと同じ関係をもつようなものを何か発明することができるかどうかを考えてみよう．そしてそのものをトルク(ラテン語の *torquere*, まわす，から来たことば)ということにする．力とは物体の直線運動に必要なものである．そして物体を回転させるものが，“回転力”あるいは“まわす力”で，これがトルクである．定性的にいえば，トルクはまわすことなのだが，定量的にいえば，何なのだろうか？ そこで一つの物体をまわすときになす**仕事**を考えて，トルクの理論を定量的に求めることにしよう．力がはたらいて物体がある変位をしたときにどれだけの仕事をしたかということを考えるというのは，力を定義する上に非常にうまい方法である．そこでこれにならうことにする．直線的のいろいろの量と，角度的のいろいろの量との間の対応をできるだけ残すことにして，物体に力がはたらいてそれを少しまわすときになす仕事を，**トルク**かける物体のまわった**角度**に等しいとおく．いいかえれば，仕事に関する定理が，完全に同じ形になるようにトルクというものを定義しようというのである：力かける距離が仕事である．そこでトルクかける角度が仕事になるようにしようというのである．このことから，トルクとは何かということがきまってくる．例えば，一つの剛体を考えて，それにいろいろな力がはたらいているとする．そしてこの剛体の回転軸を考える．まず一つの力だけをとり，この力が点 (x, y) にはたらいているとする．この物体を微少な角度だけまわすとすれば，そのときなされる仕事を求めるのはわけない．なされる仕事は

$$\Delta W = F_x \Delta x + F_y \Delta y \tag{18.10}$$

である．そこで，Δx と Δy に関する方程式(18.6)と(18.7)とをこれに代入すれば，

$$\Delta W = (xF_y - yF_x)\Delta\theta \tag{18.11}$$

が得られる．すなわち我々がなした仕事の量は，物体をまわした角度に，力と距離との妙な組合せをかけたものに等しい．この“妙な組合せ”が，トルクと称せられるものである．このように，仕事の変化をトルクかける角度と定義したので，トルクを力であらわす式が得られたわけである．(トルクというのは，ニュートン力学と無関係な完全に新しい概念でないことは，いうまでもない——トルクは力に準拠してはっきり定義されるべきものである.)

力がいくつかはたらいている場合には，なされる仕事は，すべての力がなす仕事の和である．よってΔWは，すべての力に対する項をいくつも全部加えあわせたものであるが，**そのおのおのは$\Delta\theta$に比例している．**この$\Delta\theta$をかっこの外にとり出してみれば，仕事の変化は，物体にはたらいているすべての力によるトルクを全部加えあわせたものかける$\Delta\theta$，であるといえる．この和を全トルクτという．このように，トルクのたしざんは代数のふつうの法則に従うのであるが，後にわかるように，これは平面の問題を取り扱っているからなのである．力学でも，1次元のときは，力のたしざんは代数的であるが，これは力がすべて同じ方向をむいているからであるのと似ている．3次元になると，ことがらは複雑になる．ともかく2次元の回転に対しては

$$\tau_i = x_i F_{yi} - y_i F_{xi} \tag{18.12}$$

及び

$$\tau = \sum \tau_i \tag{18.13}$$

である．ここに注意しておかなければならないのは，トルクというのは，一つの与えられた軸についていうものだということである．別の軸をえらべば，x_iもy_iもみな変わり，トルクの値も(一般には)変わる．

さてここでちょっと一息入れて，注意しておきたいことがある．それは上のように仕事という考えによってトルクを導入したのであるが，この考えによると，つりあいにある物体について，極めて重要な結果が出てくるということである；一つの物体にはたらいているすべての力が，平行変位に対しても回転に対してもつりあっているというのならば，微小な変位に対しては力は仕事をしない．だから**合力がゼロ**というだけでなくて，すべての**トルクの和もゼロ**である．すなわち$\Delta W = \tau\Delta\theta = 0$だから，すべてのトルクの和もゼロである．このように，つりあいに対する条件は二つある：力の和がゼロであることと，トルクの和がゼロであることとである．(2次元の場合には)ただ一つの任意の軸についてのトルクの和がゼロであることをたしかめればそれで充分であることを証明してみたまえ．

さて力が一つだけの場合に，$xF_y - yF_x$という妙なものがいったい何であるのか，幾何学的に吟味してみよう．図18-2において，力$\mathbf{F}$は点$\mathbf{r}$にはたらいている．物体が小さい角$\Delta\theta$だけまわったとすると，なされた仕事は，いうまでもなく変位の方向における分力かける変位である．すなわち，接線方向の分力だけがものをいうのであって，これに距離$r\Delta\theta$をかけるのである．したがって，トルクというのは，接線方向(半径に垂直)の分力かける半径である．これは，日常使っているトルクという考えからみてももっともである．というのは，力を完全に半径方向にはたらかしたのでは，物体は少しも“まわら”ない；まわすはたらきには，中心を外にひっぱり出すような力は入って来ないで，そうでない力だけが入って来る．これが接線方向の成分である．さらに，一つの力であっても，それが軸に近いところにはたらくよりも，長いうでにはたらく方がつよいことも明らかである．実際，

軸に**真正面から**おしても，物体は決してまわりはしない!! ねじりの大きさ，すなわちトルクが，力のはたらく点と軸との間の距離に比例し，また接線方向の分力に比例するのは，当然である．

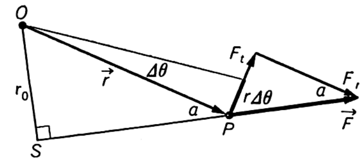


図 18-2 力によって生ずるトルク

トルクについてはこの他，第3の大切な式がある．いまわかったように，トルクは力かける半径かける図 18-2 の角 α の sin である．ところが，力のはたらいている方向を延長し，直線 OS をひくと，これは力のはたらいている線までの垂直距離(力の**うでの長さ**)であって，このうでの長さは r よりも短く，その割合は，接線分力が全力よりも小さいのと同じ割合である．したがってトルクの式は，力の大きさかけるうでの長さと書いてもよい．

トルクのことを，**力のモーメント**ということも多い．何故こうなったかということのおこりはよくわからないが，“モーメント”という言葉はラテン語の *movimentum* から来ていて，力が物体を動かす能力(てこやかなてこを使って)がてこのうでの長さに従って大きくなるということと関係があるかも知れない．数学で“モーメント”といえば，軸からの距離に応じて重みをつけるという意味である．

18-3 角運動量

これまで考えてきたのは，剛体という特殊な場合だけだった．しかし，トルクの性質やその数学的の関係は，剛体でない場合にも大切である．じっさい次のような大いに注目すべき定理を証明することができる：粒子のよりあつまりにはたらく外力は，p という量が時間的に変化する割合であって，p をその全運動量と名付けた．それと同じように，粒子のよりあつまりに外からはたらくトルクは，L という量が時間的に変化する割合であって，L をその**角運動量**というのである．

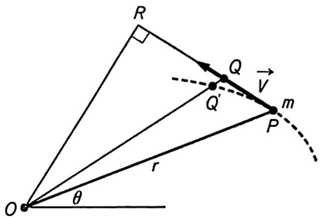


図 18-3 粒子は軸 O のまわりを運動する

これを証明するために，ここに粒子からなる系があって，それにいくつか力がはたらいているとする．これらの力によるトルクがはたらく結果として，この系にどんなことが起こるか．まず，粒子一つの場合からはじめるのがよかろう．図 18-3 において，質量 m の粒子一つと，軸 O とがある；粒子は O を中心とする円に沿って回転するのでなくてもよい．太陽のまわりをまわる惑星のように，楕円に沿って運動してもよく，また何か他の曲線でもよい．ともかく運動していて，それに力がはたらいている．そして，力の x 成分は，質量かける加速度の x 成分という例の式に従って，粒子は加速される．そこで，トルクは何をするか．トルクは xF_y-yF_x に等しく，x, y 方向の力は，質量かける，x, y 方向における加速度である：

$$\begin{aligned}\tau &= xF_y-yF_x\\ &= xm\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)-ym\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right).\end{aligned} \tag{18.14}$$

さて，これは簡単な量を微分したもののようにはみえないが，実は $xm\left(\dfrac{dy}{dt}\right)-ym\left(\dfrac{dx}{dt}\right)$ を微分したものなのである：

$$\frac{d}{dt}\left[xm\left(\frac{dy}{dt}\right)-ym\left(\frac{dx}{dt}\right)\right]$$
$$=xm\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\left(\frac{dx}{dt}\right)m\left(\frac{dy}{dt}\right)-ym\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)-\left(\frac{dy}{dt}\right)m\left(\frac{dx}{dt}\right)$$
$$=xm\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)-ym\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right). \qquad (18.15)$$

このように，トルクは何かが時間的に変化する割合だということになる！　そこでこの“何か”に注目して名前を付ける：これを角運動量Lとする：

$$L=xm\left(\frac{dy}{dt}\right)-ym\left(\frac{dx}{dt}\right)$$
$$=xp_y-yp_x. \qquad (18.16)$$

これまでの議論には相対論は入っていないが，上のLの形は，相対論でも正しい．このように，回転については運動量に対応する角運動量があって，それは直線的運動量の成分によってあらわされる．そしてその式はトルクが力の成分によってあらわされる式と全く同様である！　だから，一つの軸のまわりの一つの粒子の角運動量を求めるには，接線方向の運動量の成分をとって，それに半径をかけるだけでよいのである．別のいい方をすれば，角運動量にとって大切なことは，粒子が原点からどんな速さで**遠ざかる**かということではなくて，原点のまわりをどんなに**まわっている**かということなのである．運動量の接線方向の成分のみが，角運動量にとって大切なのである．さらに，運動量の線が軸から遠ければ遠いほど，角運動量は大きい．また我々が考えている量にpという名前をつけようがFという名前をつけようが，幾何学的の関係は全く同じことであるから，**運動量**の線をのばして，軸までの垂直距離を求めると，てこのうでにあたるものがあることになる．(粒子にはたらく力のうでとは**同じではない**！)　このように，角運動量とは，運動量の大きさ，かける，運動量のてこのうでである．よって，角運動量に対しては式が三つあるわけで，これはトルクに対して三つあるのと同じである．

$$L=xp_y-yp_x$$
$$=rp_{\text{接線}}$$
$$=p\cdot\text{うでの長さ}. \qquad (18.17)$$

トルクもそうだったが，角運動量はどの軸について考えるかという軸の位置によって大きさがちがう．

これから二つ以上の粒子がある場合に進むのであるが，その前に，太陽のまわりをまわっている惑星に対して，上の結果をあてはめてみよう．力はどちらをむいているかといえば，太陽の方にむいている．それなら惑星にはたらくトルクは何か？　これはもちろんどの軸について考えるかによってちがうが，太陽のところに軸をとれば，結果が非常に簡単になる．トルクは力かけるうでの長さ，あるいはrに垂直な力の成分かけるrである．ところがrに垂直な力の接線成分はない

のだから，太陽のところにとった軸のまわりにはトルクはない！ したがって，太陽のまわりをまわっている惑星の角運動量は一定で変化しないはずである．これはどういうことを意味するのかといえば，速度の接線成分，かける質量，かける半径，が一定だということである．というのは，これは角運動量であって，角運動量の時間的変化の割合がトルクで，いまの問題ではこのトルクがゼロだからである．質量も一定だから，すなわち，接線速度かける半径が一定ということになる．このことは，惑星の運動について我々のすでに知っていたことである．Δt という短い時間を考える．惑星が P から Q (図 18-3)に移ったとすれば，どれだけの距離を動いたことになるか？ またどれだけの**面積**をなめたことになるか？ $QQ'P$ という面積は非常に小さいから，それよりもずっと大きい OPQ という面積に対して無視すれば，なめた面積は，簡単に，底辺 PQ かける高さ OR の半分である．すなわち，単位時間になめられる面積は，速度，かける速度のうでの長さ，(かける $\dfrac{1}{2}$)である．よって，面積の時間的変化の割合は，角運動量に比例し，その角運動量は一定である．惑星の動径は相等しい時間に相等しい面積をなめるというケプラーの法則は，力によるトルクがない場合に角運動量が保存するということを言葉であらわしたものなのである．

18-4 角運動量の保存

さて，次に考えるのは，粒子の数が多くなったらどういうことになるか，また，一つの物体がいくつかの部分からなり，各部分相互の間にも力がはたらいており，また，外力も各部分にはたらいているような場合にはどういうことになるかということである．すでにわかっているように，任意の固定軸が与えられたときに，i 番目の粒子にはたらくトルク(i 番目の粒子にはたらく力，かける力のうでの長さ)は，その粒子の角運動量の時間的変化の割合に等しく，i 番目の粒子の角運動量は，その運動量，かける運動量のうでの長さ，である．そこですべての粒子にはたらくトルク τ_i をみな加えて，それを全トルク τ とする．そうすれば，これは，すべての粒子の角運動量 L_i をみな加えたものの時間的変化の割合となるだろう．そしてこれによって全角運動量 L という新しい量を定義することになる．一つの物体の全**運動量**がすべての部分の運動量を加えた和であるのと同じように，全角運動量はすべての部分の角運動を加えた和である．そうすれば，全 L の時間的変化の割合は全トルクである：

$$\tau = \sum \tau_i = \sum \frac{dL_i}{dt} = \frac{dL}{dt}. \tag{18.18}$$

さて，全トルクというと複雑なものであるようにみえるかも知れない．それには，内部の力も外部の力もみな考えなければならないのである．ところが，ニュートンの作用反作用の法則で，作用と反作用とが等しいという点だけでなく，作用と反作用とは**同じ方向でむきが正反対である**というところに着目すれば(ニュートンが実際こういったかどう

かはわからないが，このことは暗黙のうちに仮定している)，二つの部分が互いに作用しあっていると，どんな軸をとってもうでの長さは等しいから，それぞれに生ずる二つの**トルク**は，大きさは等しくむきは反対である．したがって，内部トルクは二つずつ対になって打ち消しあう．そこで，**任意の軸のまわりの全角運動量の時間的変化の割合は，その軸に関する外力のトルクに等しい**という重要な定理が出てくる！

$$\tau = \sum \tau_i = \tau_{外力} = \frac{dL}{dt}. \qquad (18.19)$$

これで，粒子がたくさんあつまっているものの運動について，実に有力な定理が求められたわけであって，これによって，我々は内部のこまかいからくりをみる必要はなく，全体としての運動を論ずることができるのである．この定理は，もののどんな集まりに対しても成り立つのであって，全体として剛体になっているか，いないかに関係はない．

上の定理で特に大切な事例は，**角運動量保存の法則**である：粒子系に外からはたらくトルクがないならば，角運動量は一定で変化しない．

その特別な場合で大切なのは，剛体の場合，すなわち，きまった形をしているものが回転している場合である．形も大きさもきまった物体を考え，それがある固定軸のまわりにまわっているとする．この物体のいろいろの部分は互いにその位置を変えない．そこでこの物体の全角運動量を求めてみよう．ある粒子の質量が m_i で，位置が (x_i, y_i) であるとする．問題は，この粒子の角運動量を求めることである．それがわかればこれらの粒子の角運動量のすべての和を求めればよい．円に沿って運動しているものの角運動量は，いうまでもなく，質量，かける速度，かける軸からの距離，である．そしてこの速度は，角速度かける軸からの距離に等しい：

$$L_i = m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \omega, \qquad (18.20)$$

あるいは，すべての粒子 i について加えると，

$$L = I\omega \qquad (18.21)$$

となり，ここに

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \qquad (18.22)$$

である．

これは，運動量が質量かける速度に等しいという法則に対応する．その速度が角速度に入れかわっており，また質量が新しいもの I に入れかわっている．この I を**慣性モーメント I** という．これは質量に対応する．方程式(18.21)，(18.22)によれば，物体は回転に対して慣性をもっているのであって，この慣性は各部分の質量だけによってきまるのではなく，それらが軸から**どのくらいの距離にあるか**ということによってきまる．同じ質量のものが二つあるとき，それらを軸から遠くにおけばおくほど，回転に対する慣性は大きくなる．図18-4に示

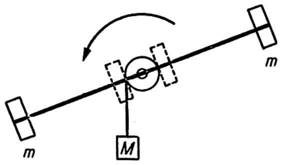


図 18-4 "回転に対する慣性" はおもりの腕の長さによってきまる

したような装置を使うと，このことはたやすくわかる．重い棒をまわさなければならないので，おもり M は速くは落ちられない．はじめ，両方の m を軸に近くしておくと，M はある割合でだんだん速くなる．しかし二つの m を軸からずっと遠くして慣性モーメントを大きくすると，M の加速度は前よりもずっと小さくなることがわかる．これは回転に対抗する慣性が大きくなったからである．慣性モーメントというのは，回転に対抗する慣性であって，質量かける軸からの距離の**自乗**をすべて加えあわせた和である．

質量と慣性モーメントの間には，たいへんなちがいがある．一つのものの質量は決して変わらないが，慣性モーメントは変えようと思えば変えられる．摩擦なく回転できる台に乗って両腕をのばし，手に何かおもりを持ってゆっくり回転する．そのとき，腕をちぢめると，慣性モーメントが変わるが，我々の質量は変わらない．こうすると，角運動量保存の法則に従って，いろいろ面白いことが起こる．外界からのトルクがゼロならば，角運動量すなわち慣性モーメントかけるオメガは一定で変化しない．最初には，我々の慣性モーメント I_1 は大きく，角速度 ω_1 は小さく，角運動量は $I_1\omega_1$ であった．そこで腕をちぢめて慣性モーメントを小さくして I_2 にしたとすると，積 $I\omega$ は $I_2\omega_2$ となるが，角運動量が一定だから，これも変わらない．すなわち $I_1\omega_1=I_2\omega_2$ である．だから，慣性モーメントを**小さく**すれば，角速度は必ず**大きく**なるのである．

第19章

質量の中心；慣性モーメント

19-1 質量の中心の性質

前章でわかったことは，次のとおりである．ここに粒子の複雑な集合体がある．それが剛体であるにしろ，ないにしろ，また星雲であるにしろ，何であるにしろ，それにいろいろの力がたくさんはたらいているとする．このときに，すべての力(もちろん外力だけでよい．内力は打ち消しあっている)の和を求める．またこの集合体全体を考えてその全質量をMとする．そうすると，この集合体の“内部”に**質量の中心**というものがあって，外力を全部あわせたものがその点に加速度を与える．そしてそれは全部の質量がこの点に集中しているとしたときと同じだというのである．これからこの質量の中心について，もう少しくわしく考えよう．

質量の中心(CM と略す)の位置は，次の方程式によって与えられる．

$$\mathbf{R}_{\mathrm{CM}}=\frac{\sum m_i\mathbf{r}_i}{\sum m_i}. \tag{19.1}$$

これはもちろんベクトル方程式であって，実は三つの方向のそれぞれに一つずつ方程式があるのである．これからはx方向だけを考えることにしよう．それがよくわかれば，他の二つもよくわかるからである．$X_{\mathrm{CM}}=\frac{\sum m_ix_i}{\sum m_i}$というのは，どういう意味か？　まず物体を小さな片にわけ，すべてが同じ質量mであるとする；1グラムでも何でもいいがある単位によって1片の質量を測り，それに片の数Nをかけたものが全質量である．そうすると，上の方程式によれば，すべてのxをたしあわせ，それを片の数でわれば，$X_{\mathrm{CM}}=\frac{m\sum x_i}{mN}=\frac{\sum x_i}{N}$である．いいかえれば，質量がすべて等しいなら，$x_{\mathrm{CM}}$はすべての$x$の平均である．ところで，この片の一つの目方が他のものの2倍であったとする．そうすれば，そのxが和に2回入ってくる．これは簡単に理解できる．すなわち，この2倍の質量が二つに等分されて，他のものと同じになったとみればよいわけだから，2回入ってくることになるのである．したがって平均をとるときに，xのところには質量が二つあるのだから，xを2度数えなければならない．よって物体を“小さなグラム”にわけたとして，あらゆる質量をその質量に比例した回数だけ数え，そのx方向の平均位置を求めたものがXである．このことからすぐわかるように，Xは一番大きいxと一番小さいxとの中間にあって，物体全体を含む範囲のなかにある．しかし物体をつくっている実質部分の**内部**にあるとは限らない．物体がフープのように輪であるときには，

質量の中心はフープの中心にあるが，フープそれ自体の内部にあるのではない．

物体に何か対称性がある場合，例えば長方形の場合ならば，対称面があって，質量の中心はこの対称面上のどこかにあることは明らかである．長方形には対称面が二つあるから，質量の中心の位置がキチンときまる．対称軸のある物体ならば，質量の中心はこの軸上のどこかにある．このような場合には，正の x と負の x とが同じだけあるからである．

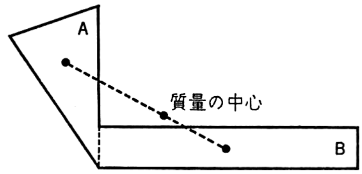


図 19-1　二つのものが組み合わさったものの質量の中心はそれぞれの部分の質量の中心を結ぶ直線上にある

面白いことには次のようなたいへん奇妙なことが起こるのである．いま，一つの物体が，A と B という部分から成り立っていると考える(図 19-1)．このとき，全体の質量の中心を計算するには次のようにすればよい．まず，A 部分の質量の中心を求め，次に B 部分の質量の中心を求める．またそれぞれの全質量 M_A と M_B とを求める．そこで改めてこういう問題を考える．**質点** M_A が A の質量の中心にあり，他の**質点** M_B が B の質量の中心にある．このとき，これら二つの質点の質量の中心が，この全体の物体の質量の中心なのである．いいかえれば，一つの物体の各部分の質量の中心が求められていれば，その物体全体の質量の中心を求めるのに，あらためて始めからやる必要はないのである；おのおのの部分を，その質量の中心にある質点として取り扱い，全体をいっしょに考えればよいのである．その理由を考えよう．物体全体の質量の中心を計算するのに，その粒子のあるものは A に属し，またあるものは B に属すると考える．$\sum m_ix_i$ という全体の和はこれを二つにわけて，A のみに対する和 $\sum_A m_ix_i$ と，B のみに対する和 $\sum_B m_ix_i$ とすることができる．そこで A だけの質量の中心を求めるとすると，A に対する和だけが問題になり，それは M_AX_A，すなわち A のすべての粒子の全質量かける A の質量の中心の位置である．これは質量の中心の定理を，A にあてはめたのである．同じように，B だけをみれば，M_BX_B になる．そしてこの二つをたせば MX になることはいうまでもない：

$$
\begin{aligned}
MX_{\mathrm{CM}} &= \sum_A m_ix_i + \sum_B m_ix_i \\
&= M_AX_A + M_BX_B. \qquad (19.2)
\end{aligned}
$$

ところが，M というのは M_A と M_B との和であるから，方程式(19.2)は，X_A にある質量 M_A と，X_B にある質量 M_B との二つの質点に対して，質量の中心を求める式をあてはめた特例であるとみなすことができる．

質量の中心の運動に関する定理は，非常に大切であって，物理学の理解を深める上に，大きい役割を果してきた．一つの大きなものがあって，その小さい部分部分に対してニュートンの法則が成り立つとしよう．そうすると，そのものの細部をいちいち調べなくても，それにはたらく全体の力と全体の質量がわかっていさえすれば，ニュートンの法則は，その全体に対しても成立する．この運動の定理はこのこと

を示しているのである．いいかえれば，ニュートンの法則は，もしも小さいスケールで成立するならば，そのまま大きいスケールでも成立するという特性をもっている．野球のタマをもってきたとき，それを厖大な数の粒子が相互に力を及ぼしあっているおそろしく複雑なものとは考えないで，その質量の中心の運動と，タマにはたらく外力だけを考えると，$\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ なのである．ここに $\mathbf{F}$ はタマにはたらく外力，m はその質量，$\mathbf{a}$ は質量の中心の加速度である．つまり $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ という法則は，大きいスケールに対してもそのまま成立するのである．（ある法則があって，それが大きいスケールに対してもそのまま成立するということをいいあらわすのに，うまいギリシャ語か何かがありそうなものだ.）

人間がまず発見するいくつかの法則というものは，大きいスケールに対してもそのまま成立するようなものであろうと思われる．それは何故か？　宇宙の基本的のからくりのスケールは実は原子的な大きさであって，我々が観測するものにくらべてはるかに微細であり，ふつうの観測にはこんなスケールのものはどこにもないからである．だから我々がまず最初に発見するであろうものは，原子的スケールとくらべて，特にどの大きさと限定しないものに対して成り立つようなものであるはずだ．もしも小さい粒子に対して成り立つ法則が，大きなスケールに対してそのまま成立しないというのだったら，これらの法則を発見するのは容易なことではなかろう．では逆の問題はどうだろうか？　小さなスケールに対する法則は，大きいスケールに対する法則と同じものでなければならないだろうか？　もちろん自然界では，原子的レベルにおける法則が，大きいスケールの法則と同じでなければならないということはない．いま，原子の運動の法則がほんとは奇妙な方程式によって与えられ，そしてそれは大きいスケールにもっていったときにそのまま同じ形にはならないが，ある**近似式によってあらわされ**，この近似式をどんどん先へ進めると，さらに大きいスケールに対してもそのまま成立しつづけるという性質をもっているとしよう．こういうことはありうることであり，また実際もそのとおりになっている．ニュートンの法則は，原子に対する法則を非常に大きいスケールにもっていった“しっぽの先”なのである．微小スケールにおける粒子の運動の実際の法則は，非常に奇妙なものである．しかし，それをたくさんとっていっしょにすると，それはニュートンの法則に近似する——**近似するだけ**のことである．ニュートンの法則は大きいスケールにどんどんおしひろめていいのであって，そうやってもやはり同じ法則であるようにみえる．じっさい，スケールを大きくすればするほど，ますます正確になる．このニュートンの法則が大きいスケールでもそのまま成立するという性質は，実は自然の基本的性質というわけではなく，重要な歴史的事実である．最初の観測というのはあらっぽいのだから，それによって原子的粒子の基本的法則が発見されるなどということは決してありえない．じっさい，量子力学と称する原子

的基本法則は，ニュートンの法則とは全くちがうのである．我々が直接に経験するものはみなずっと大きなスケールの問題であるが，小さなスケールの原子は，大きいスケールではみたこともないような行動をとるので，これはなかなか理解しにくい．だから"原子は太陽のまわりをまわっている惑星に似ている"などというわけにはいかない．それに**似たものはない**のだから，それは我々におなじみのもののどれ**にも似ていない**．量子力学をだんだん大きいものにあてはめていくと，たくさんの原子が集まっているものの行動については法則がそのまま同じ形で成立するのでは**なくて，新しい形の法則**になる．これがニュートンの法則であって，こんどはそれは，マイクロマイクログラム，——といっても，そこには何十億の原子があるのだが——そのマイクロマイクログラムの大きさから，ずっと地球の大きさ，またはそれ以上のものに対しても，そのままの形で成立するのである．

さて，質量の中心の問題に立ち戻ろう．質量の中心のことを重心ということもある．たいていの場合，重力は一様だと考えていいからである．ここに小さな範囲を考えて，それにはたらく重力は質量に比例するばかりでなく，どこでも一定の直線に平行であるとする．そこでいま一つの物体を考え，それを構成している各部分に重力がはたらいているとする．その一つの部分の質量を m_i とすれば，これにはたらく重力は，m_i かける g である．そこで問題は，この物体が剛体であるとしたとき，一つの力をどこに加えたら，物体全体にはたらく重力とつりあって，回転がおこらないか，ということである．この力は質量の中心をとおらなければならないというのが答であって，それは次のようにして証明される．この物体が回転しないでいるためには，すべての力によるトルクを加えあわせたときに，ゼロにならなければならない．もしもトルクがあれば，角運動量の変化があり，回転が起こる．そこで，すべての粒子にはたらくトルクを全部加えあわせて，ある与えられた軸のまわりのトルクを計算する：この軸が質量の中心をとおるなら，それはゼロになるはずなのである．さて，x を水平に，y を鉛直にとれば，トルクは，y 方向の力，かけるうでの長さ x（すなわち，力，かけるそのまわりのトルクを求める軸までのうでの長さ）である．全トルクは次の和になる．

$$\tau = \sum m_i g x_i = g \sum m_i x_i. \tag{19.3}$$

よって全トルクがゼロでなければならないというならば，和 $\sum m_i x_i$ がゼロでなければならない．ところが $\sum m_i x_i = MX$ であり，これは全質量かける，質量の中心と軸との間の距離である．だから，質量の中心と軸との間の x-距離はゼロである．

もちろんこれは x-距離についてしらべただけであるが，90° 回して考えれば，x の代りに y を使えばよいことになるから，質量の中心を支えれば，物体はどこでもつりあうのである．いいかえれば，一つの物体をその質量の中心で支えると，重力が平行だから，トルクは生じない．物体が非常に大きくて，重力が平行でないことがきいてくるよ

うな場合には，どの点へ力を加えればつりあうかということは，簡単にはいえない．しかしその点は，質量の中心から少しはずれている．質量の中心と重心とを区別する必要があるのはこのためである．正しく質量の中心を支えると，物体はどこでもつりあうというのであるが，このことから，また，次のような面白い結果が出て来る．重力の代りに，加速度によるみかけの力があるとすると，前と全く同じ数学的手続で，加速度による慣性力によってトルクが生じないようにするには，どこを支えたらよいかということを求めることができる．一つの箱の中に何かの方法で物体が支えられているとし，そしてこの箱もそれに入っているものもみな加速度を受けているとする．この加速しつつある箱に対して静止している人からみると，慣性によるみかけの力があらわれる．すなわち，物体を箱といっしょに運動させるためには，まず加速させるためにそれをおしてやらなければならない．そしてこの力が“慣性力”と“つりあう”のであって，この慣性力は，質量かける箱の加速度というみかけの力である．箱に入っている人からみると，これはその物体が一様な重力の場にあり，その“g”が加速度 a に等しいというのと事情が同じである．だから，一つの物体を加速することによって生ずる慣性力は，質量の中心のまわりにはトルクを生じない．

このことから，非常に大切な結果が出てくる．加速度を受けていない慣性系では，トルクは，つねに角運動量の時間的変化の割合に等しい．ところが，トルクは角運動量の時間的変化の割合に等しいということは，**加速度をうけている**物体の質量の中心をとおる軸のまわりについても，成り立つ．質量の中心が加速度を受けている場合でも，質量の中心をとおるという特別な軸をえらんで，トルクはその軸のまわりの角運動量の時間的変化の割合に等しいという関係が成り立つようにとることができる．よって，トルクが角運動量の時間的変化の割合に等しいという定理は，次の二つの一般的場合に成立する：(1)慣性系空間の固定軸，(2)物体が加速度を受けつつあっても，質量の中心をとおる軸．

19-2　質量の中心の位置を求めること

質量の中心の位置を求める計算は，数学課程の方の領分であって，これは積分学のいい練習になる．微積分を習ってからだと，質量の中心の位置を求めるのに役に立つ手をいろいろ覚えるのも，悪くない．そのような手の一つは，いわゆるパップスの定理を使うのである．それはこんな調子である：平面上に任意の閉域を考え，そのあらゆる点がこの平面に垂直に動くようにこれを空間に運動させて一つの立体をつくる．そうすると，それによってできる立体の全体積は，断面積かける質量の中心の動いた距離，に等しい！　面積をそれに垂直な直線に沿って動かせば，このことは確かに正しいが，それを円なり，また何かの曲線に沿って動かせば，できる体積は変な形になる．途が曲線だと，外側はとおくをまわり，内側は近くをまわるが，その影響が打

ち消しあうのである．そこで密度の一様な平面板の質量の中心を求めるには，それを一つの軸のまわりにまわしてできる体積が，質量の中心のまわった距離，かけるその板の面積，であることを考えればよいのである．

例えば，底辺が D，高さが H の直角三角形の質量の中心を求めるには(図 19-2)，次のようにすればよい．Hに沿った軸を考えて，この三角形をそのまわりに全周 360° まわす．こうすると円錐ができる．質量の中心の x 座標が動いた距離は $2\pi x$ である．動いた面積は，三角形の面積 $\frac{1}{2}HD$ である．質量の中心の x 座標の動いた距離，かける三角形の面積が，できた円錐の体積であって，これはもちろん $\frac{\pi D^2 H}{3}$ である．よって $(2\pi x)\left(\frac{1}{2}HD\right)=\frac{1}{3}\pi D^2 H$，すなわち $x=\frac{D}{3}$ である．同様にもう一方の軸のまわりにまわすか，あるいは対称の考えから，$y=\frac{H}{3}$ であることがわかる．三角形がどんな形をしていても，その質量の中心は，頂点から対辺の中点にひいた中線 3 本が 1 点に交わるところである．その点は各中線の $\frac{1}{3}$ のところにある．**手がかり**：三角形を一つの底辺に平行に細くきる．中線はそのあらゆる細片を 2 等分する．よって質量の中心はこの中線の上にある．

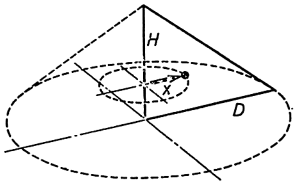


図 19-2　直角三角形とそれをまわしてできる直円錐

次に，より複雑な形を考えよう．密度の一様な半円形——円を半分にきったもの——の質量の中心を求めよう．円がすっかりあれば，質量の中心はもちろん円の中心にある．しかし半分になると話がめんどうになる．r を半径，x を半円のまっすぐな縁から質量の中心までの距離とする．このまっすぐな縁を軸としてこの半円をまわして，球をつくる．そうすれば，質量の中心は $2\pi x$ だけまわり，半円の面積は $\frac{\pi r^2}{2}$ (円の半分だから) である．またできる体積は，$\frac{4\pi r^3}{3}$ であることはいうまでもないから，これから

$$(2\pi x)\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right)=\frac{4\pi r^3}{3},$$

すなわち，$x=\frac{4r}{3\pi}$ である．

パップスの定理はもう一つあるが，これは上に述べたのの特別な場合で，やはり正しい．半円形の板の代りに，半円形の針金があって，その密度は針金に沿って一様であるとする．これの質量の中心を求める．この場合には，針金に質量があるだけで中の方にはない．この場合には，この平面曲線が前と同じように動いたとき，それがなめる**面積**は，質量の中心が動いた距離，かける，曲線の**長さ**である．(線は，非常に幅のせまい面積とみなせるので，前の定理をそれにあてはめることができる.)

19-3　慣性モーメントを求めること

次にいろいろなものの**慣性モーメント**を求める問題を考えよう．一つの物体の z 軸のまわりの慣性モーメントを求める式は

$$I=\sum m_i(x_i{}^2+y_i{}^2)$$

あるいは

$$I=\int(x^2+y^2)dm=\int(x^2+y^2)\rho\,dv \qquad (19.4)$$

である．すなわち，各質量に，軸からの距離の自乗をかけて全部を加えるのである．3次元的の物体であっても，問題となるのは3次元の距離ではなく，2次元の距離であって，それの自乗である．これからの議論では，だいたい話を2次元的の物体に限るけれども，z軸のまわりの回転に対する式は，どの3軸にも同じように通用する．

簡単な例として，一つの棒が，その一端をとおりそれに垂直な軸のまわりにまわっているとする(図19-3)．すべての質量に，x-距離の自乗をかけて，全部の和を求めなければならぬ．(この場合yはみなゼロである．) ここで"和"というのは，x^2かける微小質量の積分である．この棒を長さdxの小さな部分にわければ，それの質量はdxに比例し，Lが棒全体の長さで，Mが質量である．よって

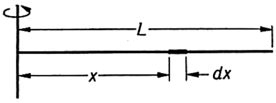


図19-3　長さLのまっすぐな棒がその一端をとおる軸のまわりにまわっている

$$dm=\frac{M\,dx}{L}$$

であるから

$$I=\int_0^L x^2\frac{M\,dx}{L}=\frac{M}{L}\int_0^L x^2dx=\frac{ML^2}{3} \qquad (19.5)$$

である．慣性モーメントの次元は必ず質量かける距離の自乗であるから，計算を要するのは実は$\frac{1}{3}$という係数なのである．

では回転軸が棒の中心にあったら，Iはどうなるか？ xの範囲を$-\frac{1}{2}L$から$+\frac{1}{2}L$として積分をやり直してもよかろう．しかしここで慣性モーメントというものについてちょっと考えてみよう．この棒が質量$\frac{M}{2}$，長さ$\frac{L}{2}$の二つの棒からできていると，考えてみる．この2本の短い棒の慣性モーメントは互いに等しく，式(19.5)によって与えられる．よって全体の慣性モーメントは

$$I=\frac{2(M/2)(L/2)^2}{3}=\frac{ML^2}{12} \qquad (19.6)$$

である．だから，棒をその一端のまわりにまわすよりも，中心のまわりにまわす方がずっと楽である．

その他いろいろのものの慣性モーメントももちろん同じように計算することができる．こういう計算は積分学のいい演習にはなるけれども，それだけでは我々にとって基本的の興味はない．ところがここに大いに役に立つ大切な定理がある．ここに一つの物体があって，ある軸のまわりの慣性モーメントを求めるとする．すなわち，その軸のまわりにこの物体を回すときに対する慣性を求めるとする．さてこの物体の質量の中心をピボットで支えて，物体が全体としてある軸のまわりにまわっても回転はしないようにすると(慣性の影響によってそれにトルクがはたらくことはないから，全体として動かしても回転はしない)，全体をまわすに要する力は，すべての質量が質量の中心に集中していたとしたときと同じであり，慣性モーメントは単に$I_1=MR_{\text{CM}}^2$である．ここにR_{CM}は，質量の中心から軸までの距離である．しかし，

物体が全体として軸のまわりにまわるとき，同時に回転もするという場合には，これだけでは慣性モーメントの正しい式にはもちろんならない．そのわけは，その質量の中心が円に沿って動いて慣性モーメント I_1 を生ずるだけではなく，物体を質量の中心のまわりにまわさなければならないからである．だから，質量の中心のまわりの慣性モーメント I_c を更に I_1 に加えるべきであると考えられる．だから，一つの軸のまわりの全慣性モーメントは，

$$I = I_c + MR_{CM}^2 \qquad (19.7)$$

となると考えても悪くないであろう．

これは平行軸の定理といわれるものであって，すぐに証明することができる．任意の軸のまわりの慣性モーメントは，x の自乗と y の自乗との和に質量をかけたものを物体全部にわたって加えあわせたものである：$I=\sum(x_i^2+y_i^2)m_i$．これから x だけを考える．y についてももちろん同じことになる．x は一つの点と軸との間の距離であるが，原点から測って x とする代りに，質量の中心から測って x' であるとしたらどういうことになるか．そのために

$$x_i = x_i' + X_{CM}$$

と書く．これを自乗すれば

$$x_i^2 = x_i'^2 + 2X_{CM}x_i' + X_{CM}^2$$

である．これに m_i をかけて，すべての i について加えあわせればどうなるか？ 定数を $\sum$ の外に出して

$$I_x = \sum m_i x_i'^2 + 2X_{CM}\sum m_i x_i' + X_{CM}^2 \sum m_i$$

である．右辺の第3項はやさしい：単に MX_{CM}^2 である．第2項には二つの部分があり，その一つは，質量に x' 座標をかけたものの和である．しかしこれからは何も出て来ない．何故ならば，x' は質量の中心から**測った**のであって，このようにとると，質量の重みをつけて，すべての粒子の平均位置を求めれば，それはゼロだからである．第1項はもちろん x から生ずる I_c である．よって方程式(19.7)となるのであって，これは前に推定したとおりである．

一つの例をとって(19.7)をためしてみよう．例として前の棒についてやってみよう．棒の一端をとおる軸のまわりの慣性モーメントは，前に計算したとおり，$\dfrac{mL^2}{3}$ であるはずである．一様な棒の質量の中心は，いうまでもなく棒の中心にあり，$\dfrac{L}{2}$ のところである．したがって $\dfrac{ML^2}{3}=\dfrac{ML^2}{12}+M\left(\dfrac{L}{2}\right)^2$ となるはずである．$\dfrac{1}{4}$ たす $\dfrac{1}{12}$ は $\dfrac{1}{3}$ であるから，我々はまちがっていなかった．

ところで，慣性モーメント(19.5)を求めるのに積分を使う必要は実はなかったのである．まずそれは ML^2 に未知の係数 γ をかけたものだと考える．そして，棒を二つにわけたものに応用すると，(19.6)の代りに $\dfrac{1}{4}\gamma$ を得る．そこで軸の移動から，$\gamma=\dfrac{1}{4}\gamma+\dfrac{1}{4}$ となるので，γ は $\dfrac{1}{3}$ でなければならない．ものにはいろいろのやり方があるものだ！

この平行軸の定理を応用して，ある軸のまわりの慣性モーメントを求めようとするときに，I_c の軸をそれに**平行にとる**ことを忘れてはな

らない．

もう一つ，慣性モーメントの性質で述べておくべきことがある．これはある種の物体の慣性モーメントを求めるときに，役に立つことが多い．その性質というのは，ここに**平面図形**と座標軸とがあって，その原点はこの平面上にあり，z 軸はその面に垂直であるとする．そうすると，z 軸のまわりのこの図形の慣性モーメントは，x 軸のまわりの慣性モーメントと y 軸のまわりの慣性モーメントとの和である．次のように考えればこれはやさしく証明される．$z_i=0$ だから

$$I_x=\sum m_i(y_i^2+z_i^2)=\sum m_iy_i^2.$$

同様に

$$I_y=\sum m_i(x_i^2+z_i^2)=\sum m_ix_i^2,$$

よって

$$\begin{aligned}I_z=\sum m_i(x_i^2+y_i^2)&=\sum m_ix_i^2+\sum m_iy_i^2\\&=I_x+I_y.\end{aligned}$$

一例として，質量 M，幅 W，長さ L の一様な矩形の板があるとして，その中心をとおり板に垂直な軸のまわりの慣性モーメントを求めると，それは

$$I=\frac{M(W^2+L^2)}{12}$$

である．何故ならば，その面内にあって長さ L の方向に平行な軸のまわりの慣性モーメントは，長さ W の棒の場合と同じく $\dfrac{MW^2}{12}$ であり，その面内の幅の方向の軸のまわりの慣性モーメントは，長さ L の棒の場合と同じく $\dfrac{ML^2}{12}$ だからである．

以上のことをまとめると，一つの軸(これを z 軸とする)のまわりの物体の慣性モーメントは，次の性質をもっている．

(1) 慣性モーメントは

$$I_z=\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)=\int(x^2+y^2)\,dm$$

である．

(2) 物体がいくつもの部分からなり，それぞれの慣性モーメントがわかっているとすると，全体の慣性モーメントは，各部分の慣性モーメントの和に等しい．

(3) ある与えられた軸のまわりの慣性モーメントは，質量の中心をとおってこの軸に平行な軸のまわりの慣性モーメントに，全質量，かける，軸から質量の中心までの距離の自乗を加えたものに等しい．

(4) 平面図形の面に垂直な軸のまわりのその慣性モーメントは，その平面内にあって，垂直軸のところで直交する2軸のまわりの慣性モーメントの和に等しい．

一様な密度をもっているいろいろな簡単な形のものの慣性モーメントは，表19-1に与えてある．また，他のもので上記の性質を使って，表19-1から求められるものの慣性モーメントは表19-2に与えてある．

表 19-1

物　　体	z 軸	I_z
細い棒，長さ L	中心をとおり棒に垂直	$ML^2/12$
うすい円環，半径 r_1, r_2	中心をとおり円に垂直	$M(r_1^2+r_2^2)/2$
球，半径 r	中心をとおる	$2Mr^2/5$

表 19-2

物　　体	z 軸	I_z
矩形板，辺 a, b	中心をとおり b に平行	$Ma^2/12$
矩形板，辺 a, b	中心をとおり板に垂直	$M(a^2+b^2)/12$
うすい円環，半径 r_1, r_2	任意の直径	$M(r_1^2+r_2^2)/4$
直方体，辺 a, b, c	中心をとおり c に平行	$M(a^2+b^2)/12$
直円柱，半径 r，長さ L	中心をとおり L に平行	$Mr^2/2$
直円柱，半径 r，長さ L	中心をとおり L に垂直	$M(r^2/4+L^2/12)$

19-4 回転の運動エネルギー

こんどは更に進んで，力学を考えよう．第18章では，直進運動と回転運動との類似を論じたが，そのとき仕事の定理を使っただけで，運動エネルギーには触れなかった．ある軸のまわりに，角速度 ω で回転している剛体の運動エネルギーは何であろうか？ 前のアナロジーを使えば正しい答を推定することができる．慣性モーメントが質量に，角速度が速度に対応するのだから，運動エネルギーは $\frac{1}{2}I\omega^2$ であろうと推定される．次に示すように，これはまさにそうなのである．物体がある軸のまわりに回転しているとすると，軸から半径 r_i のところにある点の速度の大きさは，ωr_i である．この点の質量が m_i だとすると，物体全体の全運動エネルギーは，この小部分すべての運動エネルギーを加えあわせたものであって，

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum m_i(r_i\omega)^2$$

である．ω^2 は定数であって，すべての点に対して同じである．よって

$$T=\frac{1}{2}\omega^2\sum m_i r_i^2=\frac{1}{2}I\omega^2 \tag{19.8}$$

である．

第18章の終りに述べたように，剛体ではないが，きまった慣性モーメントをもっている一つの剛体状態から，他の剛体状態に移行するような物体については，面白い現象がある．すなわち，回転台の例で，はじめに我々は腕をのばして慣性モーメント I_1 と，角速度 ω_1 をもっている．腕をちぢめると，慣性モーメントは変わって I_2 となり，角速度も変わって ω_2 となるが，我々はまた“剛体”になる．回転台の鉛直軸のまわりにはトルクはなかったのだから，角運動量は一定で変化しない．すなわち $I_1\omega_1=I_2\omega_2$ である．では，エネルギーはどうか？ これは面白い問題である．我々が腕をちぢめていると，回転は速く，慣性モーメントは小さいので，腕をちぢめていてものばしていても両方のエネルギーは同じであるようにみえる．しかし同じではない．何故

かというと，等しくなるのは $I\omega$ であって，$I\omega^2$ ではないからである．前と後との運動エネルギーをくらべるのに，前の運動エネルギーは $\frac{1}{2}I_1\omega_1{}^2=\frac{1}{2}L\omega_1$ であって，ここに $L=I_1\omega_1=I_2\omega_2$ は角運動量である．後の運動エネルギー T は，同じように考えて，$T=\frac{1}{2}L\omega_2$ である．そして $\omega_2>\omega_1$ だから，回転の運動エネルギーは，前よりも後の方が大きい．すなわち，腕をのばしていたときに，あるエネルギーを持っていたのであるが，腕をちぢめるとまわり方が速くなり，運動のエネルギーもふえる．それなら，エネルギー保存の法則はどうなったのだろうか？　誰かが何か仕事をしたにちがいない．その仕事は実は我々自身がしたのである！　いつしたのか？　おもりを水平に動かすときには，仕事をしない．腕をのばして一つのものを持っていて，それをひき入れても我々は仕事をしない．しかしそれは我々が回転していないときである．我々が**回転している**ときには，おもりに遠心力がはたらく．おもりは外に飛んでいこうとしている．だから我々が回転しているときに，おもりをひき入れようとすれば，遠心力に抗することになる．よって我々が遠心力に対してなす仕事が，前後の回転運動エネルギーの差と一致するはずであって，またもちろん実際に一致する．これがふえただけのエネルギーの源である．

もう一つ，ここでは記述的にいうだけなのだが，面白い一般的問題がある．これはやや高級のことなのだが，実に奇妙で面白い現象がたくさん出てくるので，ここに述べておくのがいいと思う．

もう一遍，回転台の実験を考えよう．回転している人からみて身体と腕とを別々に考えよう．おもりを引き入れると，全体は速くまわる．**身体の中心部分は前後で変化していない**が，ひき入れる前よりも速く回転しているのである．そこで身体の中心部分のまわりに円をかいてその円の内側にあるものだけを考えると，**その**角運動量は変化している．速く回転しているのである．だから我々が腕をちぢめるときに，この物体にトルクがはたらくはずである．遠心力は半径方向にはたらくのだから，トルクは生じない．だから，回転系にあらわれる力は，遠心力に尽きるのではなく，**別の力**があるということになる．この力を**コリオリの力**という．コリオリの力は，非常に奇妙な性質があって，回転系で何かものを動かすと，横におされるようにみえるのである．遠心力と同じく，コリオリの力は見かけ上の力である．我々が回転系にいて，何かを半径方向に動かそうとすると，横向きにも押さなければならない．この横向きに押さなければならない力が，身体の中心部分をまわすのである．

そこでこれから式をつくって，このコリオリの力がどんなふうにはたらくかを調べよう．次郎がメリーゴーラウンドに乗っているとすると，メリーゴーラウンドは彼からみれば静止している．太郎は地上にいて，正しい力学法則を知っているとすれば，この太郎の立場からみると，メリーゴーラウンドは回転している．そこでこのメリーゴーラウンドの半径方向に線をひいて，次郎は何かものをこの線に沿って半

径方向に動かすとする．そのためには横向きの力が必要であることを示そう．そのものの角運動量に着目すればよいのである．それはいつでも同じ角速度ωで回転していて，角運動量は

$$L = mv_{\tan}r = m\omega r \cdot r = m\omega r^2$$

である．だからものが中心に近いと，角運動量は小さく，それを外の方にもっていって，rを大きくすると，mの角運動量は大きくなる．だからこのものを半径方向に動かすためには，**トルクをはたらかせなければならない**．（メリーゴーラウンドの半径に沿って歩くには，身体を傾けて横むきに力を出さなければならない．いつかやってみ給え.）必要なトルクは，mが半径方向に動くときに，Lが時間的に変化する割合である．mが半径方向だけに動くのだとすると，ωは一定だから，トルクは

$$\tau = F_c r = \frac{dL}{dt} = \frac{d(m\omega r^2)}{dt} = 2m\omega r\frac{dr}{dt},$$

であって，ここにF_cはコリオリの力である．我々が求めたいのは，mを$v_r = \dfrac{dr}{dt}$の速さで動かすのに，次郎はどれだけの横の力を出さなければならないかということである．これは$F_c = \dfrac{\tau}{r} = 2m\omega v_r$である．

これでコリオリの力の式が求められたので，この様子をもう少しよく調べて，もっと初等的な見方でこの力のもとを理解することができるかどうかを考えてみよう．コリオリの力は半径のどこでも同じ大きさであって，中心でさえたしかにはたらいているのである！　地上に立っている太郎の慣性系からみて，中心のところで何が起こっているかを調べれば，この力を理解しやすい．図 19-4 に，mの三つの位置を順々に示してある．中心をとおる時刻を$t=0$とする．メリーゴーラウンドは回転しているのだから，mの運動は直線ではなく，$r=0$でメリーゴーラウンドの直径に接する**曲線**である．mが曲線の上を動くためには，絶対空間でそれに加速度を与える力がなければならない．これがコリオリの力である．

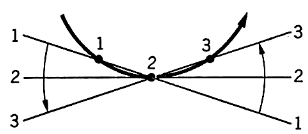


図 19-4　回転板の上を半径方向に運動する点の見え方 3 段階

コリオリの力が生じるのは，この場合に限らない．一つの物体が円の周に沿って一定の速さで動いているときにもコリオリの力がある．それは何故か？　次郎からみて，円周上の速度は$v_{次}$である．一方太郎からみると，mはメリーゴーラウンドといっしょに動いているのだから，円周上の速度は$v_{太} = v_{次} + \omega r$である．よってコリオリの力の本性が何であるかがわかる，すなわち，$v_{太}$による全求心力，すなわち$\dfrac{mv_{太}^2}{r}$なのであって，これは現実の力である．次郎の立場からいうと，この求心力は三つの部分からなる．それは次のように書ける：

$$F_r = -\frac{mv_{太}^2}{r} = -\frac{mv_{次}^2}{r} - 2mv_{次}\omega - m\omega^2 r.$$

ここでF_rは次郎が感じる力である．そのことを考えよう．次郎は第1項を感じるだろうか？　“感じます”と次郎はいうだろう，“私が回転していなかったとしても，円に沿って$v_{次}$の速度で走ると，求心力はあるはずです.” これは次郎に生ずる求心力であって，これは回転とは

関係がない．この他に，メリーゴーラウンドに対して静止しているものについても，別の求心力がはたらくことが，次郎によくわかる．これが第3項である．しかしその他に第2項があって，それは $2m\omega v$ である．速度が半径方向のときには，コリオリの力 F_c はそれに垂直であるが，いまの場合には速度が半径方向に垂直で力が半径方向なのである．じっさいコリオリの力は速度の方向がどうであっても，それに対していつも直角であり，その大きさは $2m\omega v$ である．

第 20 章
3次元空間における回転

20-1 3次元のトルク

この章では，回転円輪の運動の様子を論ずる．これは力学の成果の中で，もっとも注目すべき，そしてもっとも面白いものの一つである．そのためには，まず回転運動，角運動量，トルク等の数学的な取扱いを3次元に拡張しなければならない．しかし，我々は，これらの方程式を一般的に取り扱って，そこから出てくるすべての結果について検討しようというのではない．そんなことをしたら，何年もかかってしまうし，また我々は間もなく他の問題にも移らなければならないからである．入門的な課程では，基本的な法則を示すだけにして，それをごく少数の特殊な場合について適用してみるくらいのことしかできない．

いま3次元における回転があるとする．それが剛体の回転であろうと，何の回転であろうと，2次元のときに得られた結果は，3次元でもそのまま成立するのである．すなわち，xF_y-yF_x が“xy 平面における”トルクである，あるいは“z 軸のまわりの”トルクである，ということには変りはない．また，このトルクは xp_y-yp_x が変化する割合に等しいということにも変りはない．ニュートンの法則から方程式(18.15)を導いたところへさかのぼって考えてみると，何もその運動が平面にあると仮定する必要はなかったのである；xP_y-yP_x を微分すれば xF_y-yF_x が得られるのであって，この定理は3次元でも正しい．そこで xP_y-yP_x のことを，xy 平面に属する角運動量，あるいは z 軸のまわりの角運動量と呼ぶ．これが正しいのだから他の任意の一組の軸を使えばまた別の方程式が得られる．例えば yz 平面を使って，x を y で，y を z でおきかえると，yz 平面に関して，トルクとしては yF_z-zF_y が，また角運動量としては yP_z-zP_y が得られる．これは対称性を考えれば当然のことである．もう一つの zx 平面も考えることができるのはもちろんで，この場合には $zF_x-xF_z=\dfrac{d}{dt}(zp_x-xp_z)$ となる．

1個の粒子の運動に対して，これら三つの方程式をたてることができることは明らかである．更に多くの粒子に関する xP_y-yP_x などを集めて，それを全角運動量と呼ぶことにすると，三つの平面 xy, yz, zx に対して3種のものが得られる．また，力についても同じことをすると，xy, yz, zx 平面におけるトルクについても論じることができる．こうして，どの平面について考えても，外部トルクは，その平面につい

ての角運動量が変化する割合に等しいという法則が得られる．これは2次元について述べたことの一般化に他ならない．

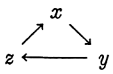
ところが，こういう人がいるかも知れない．“うーん，だけど平面はまだまだたくさんあるじゃないか；つまりある角度をしている平面をとって，その平面におけるトルクを力から計算するということになるのじゃないかな？　そうすると，そういう平面毎に別々の方程式を一組ずつ書かなければならないから，その数はたいへんなものになってしまう！”ところが面白いことに，別の平面で x', $F_{y'}$ 等を測って，その平面の $x'F_{y'}-y'F_{x'}$ という組合せを作ってみると，その結果は，xy, yz および zx 平面についての三つの表現をある方式で**組み合わせたもの**になってしまうのである．別段新しいものはでてこない．いいかえれば，xy, yz および zx 平面の三つのトルクがわかっていさえすれば，他のどんな平面のトルクでも，またしたがって角運動量も，これらのもののある組合せとして書きあらわすことができるのである：あるものが6%，次のものが92%などといった具合である．ここでこの性質について調べることにしよう．

いま，太郎は xyz 軸の系でトルクと角運動量を全て求め終わったとしよう．また一方，次郎の軸 $x'y'z'$ はどこか他の方向を向いているとする．問題を少し簡単にするために，x 軸と y 軸だけが回ったとする．次郎の x' と y' とは新しいが，z' はたまたま z と同じだったとする．すなわち，次郎にとっては，yz と zx とについて新しい平面を持ったことになる．したがって，彼は改めてトルクと角運動量とを求めなければならない．たとえば彼の $x'y'$ 平面におけるトルクは，$x'F_{y'}-y'F_{x'}$ になるであろうといったような具合である．そこで我々は，新しいトルクと古いトルクとの間の関係を求めて，一方の軸系と他の軸系とを結びつけることができるようにしなければならない．“それはベクトルについてやったこととすっかり同じものみたいだな”という人があるかもしれない．それこそまさに我々がやろうとしていることなのである．そこで更に“トルクはうまい具合にベクトルになってるのじゃあないかな？”というだろう．**たしかに**ベクトルだということになるのであるが，このことは検討を経ずにいきなりわかることではない．そこで以下にそのことを調べる．ただし，各段階をくわしく論ずることはやめて，それをどんな具合にやるかを示すだけにする．太郎が計算したトルクは次のようなものである．

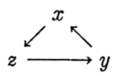
$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= xF_y - yF_x,\\ \tau_{yz} &= yF_z - zF_y,\\ \tau_{zx} &= zF_x - xF_z.\end{aligned} \qquad (20.1)$$

ここでちょっと本題をはなれて注意しておきたいことがある．それは，このような場合には座標を適切に取り扱わないと，量によってはまちがった符号をつけてしまうことがある，ということである．なぜ $\tau_{yz}=zF_y-yF_z$ とは書かないのか？　この問題の原因は，座標系は“右

手系”か，あるいは“左手系”のどちらかであるというところにある．たとえばτ_{xy}にある符号を(任意に)選んだとすると，τ_{yz}, τ_{zx}の正しい表現を得るには，xyzの文字を下のいずれかの順序におきかえなければならない．



あるいは



さて次郎は彼の系におけるトルクを計算する：

$$\begin{aligned}\tau_{x'y'} &= x'F_{y'}-y'F_{x'},\\ \tau_{y'z'} &= y'F_{z'}-z'F_{y'},\\ \tau_{z'x'} &= z'F_{x'}-x'F_{z'}.\end{aligned} \tag{20.2}$$

さて，いま，一つの座標軸がz軸とz'軸とは同じであるようにして，ある一定の角度θだけまわったとする．(この角θは，回転体あるいは座標系内で起こっている事柄とは何の関係もない．これは単に，ある人が使っている座標軸と他の人が使っている座標軸との間の関係をあらわすものであって，ここではそれはある一定の値であると仮定する.) そうすると，二つの系による座標の間には，次のような関係がある：

$$\begin{aligned}x' &= x\cos\theta+y\sin\theta,\\ y' &= y\cos\theta-x\sin\theta,\\ z' &= z.\end{aligned} \tag{20.3}$$

同様に，力はベクトルであるから，x, y, zと同じ変換を受ける．これは一つのものの各成分がx, y, zと同じように変換される場合に，かつその場合に限って，それはベクトルであるからである：

$$\begin{aligned}F_{x'} &= F_x\cos\theta+F_y\sin\theta,\\ F_{y'} &= F_y\cos\theta-F_x\sin\theta,\\ F_{z'} &= F_z.\end{aligned} \tag{20.4}$$

さて，そうすると(20.2)式のx', y', z'には(20.3)式を，$F_{x'}, F_{y'}, F_{z'}$には(20.4)式を代入するだけで，トルクがどのように変換されるかが求められる．このようにして$\tau_{x'y'}$については，やや長ったらしい式が得られるのであるが，(一見驚くべきことには)それは結局xF_y-yF_xになってしまう．これはxy平面のトルクに他ならない．

$$\begin{aligned}\tau_{x'y'} &= (x\cos\theta+y\sin\theta)(F_y\cos\theta-F_x\sin\theta)\\ &\quad-(y\cos\theta-x\sin\theta)(F_x\cos\theta+F_y\sin\theta)\\ &= xF_y(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-yF_x(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\\ &\quad+xF_x(-\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta)\\ &\quad+yF_y(\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta)\\ &= xF_y-yF_x=\tau_{xy}.\end{aligned} \tag{20.5}$$

この結果は当然のことなのである．というのは，我々の軸を**この平面の中**で回すだけならば，平面が同じなのであるから，その平面内でzのまわりのねじりは，前と変わるはずはない！　もっと重要なのは，

$\tau_{y'z'}$ の表現である．$y'z'$ 面は前になかった新しい面だからである．$y'z'$ 平面についても全く同じことをやると，次のようになる：

$$\begin{aligned}\tau_{y'z'} &= (y\cos\theta - x\sin\theta)F_z \\ &\quad - z(F_y\cos\theta - F_x\sin\theta) \\ &= (yF_z - zF_y)\cos\theta + (zF_x - xF_z)\sin\theta \\ &= \tau_{yz}\cos\theta + \tau_{zx}\sin\theta. \end{aligned} \tag{20.6}$$

最後に $z'x'$ についてやれば：

$$\begin{aligned}\tau_{z'x'} &= z(F_x\cos\theta + F_y\sin\theta) \\ &\quad - (x\cos\theta + y\sin\theta)F_z \\ &= (zF_x - xF_z)\cos\theta - (yF_z - zF_y)\sin\theta \\ &= \tau_{zx}\cos\theta - \tau_{yz}\sin\theta. \end{aligned} \tag{20.7}$$

我々は，新しい軸についてのトルクを，古い軸についてのトルクによってあらわす規則を求めようとしたのであるが，それがいまできた．この規則はどうすれば記憶しやすいか？ (20.5), (20.6)および(20.7)式を注意して見ると，これらの方程式と x, y, z に関する方程式との間に，密接な関係があることに気がつく．もしそこで τ_{xy} を何かの **z 成分**であると考えることにして，τ の z 成分と呼ぶことにしよう．それでうまくいくのである；(20.5)はベクトル変換と考えることができる．というのは，そう考えれば z 成分は当然変化しないことになるからである．同様に yz 平面には新しく考え出したベクトルの x 成分を対応させ，zx 平面には y 成分を対応させると，これらの変換の式は次のようになる．

$$\begin{aligned}\tau_{z'} &= \tau_z \\ \tau_{x'} &= \tau_x\cos\theta + \tau_y\sin\theta, \\ \tau_{y'} &= \tau_y\cos\theta - \tau_x\sin\theta. \end{aligned} \tag{20.8}$$

これはベクトルに関する規則そのものではないか！

かくして，$xF_y - yF_x$ という組合せは，人工的に考え出したあるベクトルの z 成分といわれるものと同じであるということが証明された．トルクは平面内のねじりであって，先験的にはベクトル的性質は持っているわけではないけれども，数学的には一つのベクトルであるようにふるまうのである．このベクトルは，ねじりの平面に対して直角の方向を向いており，その長さはねじりの強さに比例する．このような量の三つの成分は，真正のベクトルと同じように変換される．

このようなわけで，トルクはベクトルであらわすことになった；トルクがはたらいていると考える各平面に，それぞれそれに直角な方向を持っている直線を対応させるということにする．しかし“直角方向に”といっても，その符号はまだ決まっていない．符号を正しく定めるためには，規則を一つきめる．トルクがある意味において，例えば xy 平面にあるとすると，それと対応させたい軸は，z 軸の“上”方向を向いているというようなことにしなければならない．すなわち誰かが“右”と“左”とを決めなければならないのである．座標系が右手系の x, y, z であるとすると，次のような規則である：そのねじれが右ネ

ジをまわしているときのようなものだとすれば，そのねじれに対応させるべきベクトルはネジの進むむきを向いている．

何故，トルクはベクトルなのだろうか？ そもそも一つの平面に1本の直線を対応させることができ，したがってトルクにベクトルを対応させることができるというのは，まさに奇跡的な幸運である．これは3次元空間の特性である．2次元ではトルクはふつうのスカラーであり，それに方向を対応させるには及ばない．3次元ではトルクは一つのベクトルになる．4次元だったら，話は難しくなる．何故かというと(たとえば4番目の次元として時間があるとすると)，xy, yz, zx などの平面の他に tx, ty, tz 平面などもあることになるからである．これらのものは，全部で6個あり，6個の量を4次元の一つのベクトルとしてあらわすことはできない．

我々はこれからも3次元の話を長くつづけるのだから，改めて次のことを注意しておく．それは，今まで述べてきた数学的な取扱いは，x は位置で，F は力であるということには依存しなかった，ベクトルの変換法則にのみ依存したということである．したがって x の代りに，何か他のベクトルの x 成分を使っても別に変わるところはない．いいかえれば，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ がベクトルであるとき，$a_xb_y-a_yb_x$ を計算し，それをある新しい量 c の z 成分であるとみなすことにすれば，この新しい量はベクトル $\mathbf{c}$ を形作るのである．そこで三つの成分を持ったこの新しいベクトルとベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ との関連をあらわす数学的な記号が必要になる．そのために考え出された記号は $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ である．そうすると，ベクトル解析において通常のスカラー積の他に，**ベクトル積**と呼ばれる新しい種類の積ができたことになる．$\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ であるならば，これは次のように書いたのと同じことである．

$$\begin{aligned} c_x &= a_yb_z-a_zb_y, \\ c_y &= a_zb_x-a_xb_z, \\ c_z &= a_xb_y-a_yb_x. \end{aligned} \tag{20.9}$$

$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の順序を変えて，$\mathbf{a}$ を $\mathbf{b}$ と呼び $\mathbf{b}$ を $\mathbf{a}$ と呼ぶことにすれば，c_z は $b_xa_y-b_ya_x$ となるから，$\mathbf{c}$ の符号は逆になる．したがってベクトル積は，ふつうのかけ算と違って $ab=ba$ とならない；ベクトル積では $\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ である．このことから，もしも $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ であれば，ベクトル積はゼロであることを直ちに証明することができる．すなわち，$\mathbf{a}\times\mathbf{a}=0$ である．

ベクトル積は回転の現象を取り扱う上に非常に重要であって，三つのベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ との幾何学的な関係を理解するということも大切である．もちろん各成分間の関係は(20.9)式に与えられているのであって，そこから幾何学的な関係をきめることができる．答は，まずベクトル $\mathbf{c}$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のいずれにも直角であるということである．($\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$ を計算してみてゼロになるかどうかを見てみたまえ.) 次に，$\mathbf{c}$ の大きさは，$\mathbf{a}$ の大きさ，かける $\mathbf{b}$ の大きさ，かける両者の間の角のサインである．$\mathbf{c}$ はどっちの方向を向いているか？ 180° よりも小さい角度

だけまわして，$\mathbf{a}$ を $\mathbf{b}$ と重ねるようにしたとしよう；右ネジがこのむきにまわると，それの進むむきが $\mathbf{c}$ のむきである．左ネジとしないで，右ネジとするのは単に慣習であるに過ぎない．また $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は通常の意味での“まともな”ベクトルであり，$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ によってつくり出した新しい種類の“ベクトル”は特別な規則によったものであるから人工的なものである．あるいは，$\mathbf{a}$ や $\mathbf{b}$ とは少しばかり違った性質のものである．このことは常に念頭においておく必要がある．$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ がふつうのベクトルであるとすると，これらには**極ベクトル**という特別な名前が与えられているのである．このようなベクトルの例としては座標 $\mathbf{r}$，力 $\mathbf{F}$，運動量 $\mathbf{p}$，速度 $\mathbf{v}$，電界 $\mathbf{E}$ などがある．これらはみな通常の極ベクトルである．その定義の中にベクトル積が一つだけ入ってきているようなベクトルは，**軸ベクトル**，あるいは**擬似ベクトル**という．擬似ベクトルの例としては，もちろん，トルク $\boldsymbol{\tau}$ と角運動量 $\mathbf{L}$ がある．角速度 $\boldsymbol{\omega}$ も磁界 $\mathbf{B}$ もまたやはり擬似ベクトルであることになる．

ベクトルの数学的性質を尽くすのには，スカラー積とベクトル積を使って，そのかけ算の規則がすべてわかっていなければならない．我々の現在の問題に応用するのには，そのうちのごくわずかしか必要ではないが，完全なものにするために，ベクトル積に関するすべての規則を書いておくことにし，後で使うこともできるようにしておこう．すなわち

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{a}) && \mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c},\\
&(\mathrm{b}) && (\alpha\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b}),\\
&(\mathrm{c}) && \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c},\\
&(\mathrm{d}) && \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}),\\
&(\mathrm{e}) && \mathbf{a}\times\mathbf{a}=0,\\
&(\mathrm{f}) && \mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0.
\end{aligned}
\tag{20.10}
$$

20-2　ベクトル積を用いた回転の方程式

さて，物理学の方程式で，ベクトル積を用いて書くことができるものが何かあるか考えてみよう．もちろん答は，そのようにして書ける方程式はいくらでもあるということである．例えばトルクは位置のベクトルと力とのベクトル積であることはすぐにわかる：

$$\boldsymbol{\tau}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}. \tag{20.11}$$

これは $\tau_x=yF_z-zF_y$ 等の三つの方程式をベクトル的にまとめたものである．同様に，粒子が1個だけのとき角運動量ベクトルは原点からの距離に運動量ベクトルをかけたものである：

$$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}. \tag{20.12}$$

3次元空間の回転に対して，ニュートンの法則 $\mathbf{F}=\dfrac{d\mathbf{p}}{dt}$ に対応する力学的法則は，トルクベクトルは角運動量ベクトルが時間について変化する割合であるというものである：

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{d\mathbf{L}}{dt}. \tag{20.13}$$

多くの粒子についての(20.13)の和をとると，ある系へ外部からはたらくトルクは，全角運動量が時間に対して変化する割合に等しいということになる：

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}=\frac{d\mathbf{L}_{\text{tot}}}{dt}. \qquad (20.14)$$

もう一つの定理：外部トルクの総和がゼロであれば，その系の角運動量ベクトルの総和は0ではなく一定である．これは**角運動量保存**の法則と呼ばれている．与えられた系に何もトルクがはたらかなければ，角運動量は変化することができない．

角速度はどうか？ それはベクトルか？ 固体をある一つの固定軸のまわりに回している場合については，既に論じたが，ここではしばらくそれを**二つの**軸のまわりに同時に回しているものとしてみよう．例えば，この固体はある箱の中の軸のまわりに回っていて，その箱がまた何か他の軸のまわりに回っているというようなものである．このような運動をいっしょにして考えると，結局その物体はある新しい軸のまわりに回っているということになる！ 実にうまいことに，この新しい軸は，以下のようにすれば求められるのである．もしも，xy平面における回転の速さを，z方向を向いていてその長さが平面内の回転の速さに等しいようなベクトルで書きあらわし，また別のベクトルを，例えばy方向にかいてzx平面における回転の速さをあらわすものとすれば，この二つを平行四辺形の法則でベクトルとして加え合わせると，その和の大きさはその物体がどのくらいの速さで回っているかを示し，その方向はどの平面内で回っているかを示すのである．いいかえれば，角速度は要するにベクトルで**ある**ということなのであって，その場合三つの平面内での回転の大きさは，それらの平面におろした直角射影としてあらわされる*．

角速度ベクトルの簡単な応用例として，剛体にはたらいているトルクによって消費されている仕事率を求めてみる．仕事率というのはいうまでもなく，時間に対して仕事の変化する割合である；3次元では仕事率は$P=\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\omega}$ということになる．

平面内での回転について書いた公式は，すべて3次元のものに一般化することができる．例えば，剛体がある軸のまわりに角速度$\boldsymbol{\omega}$で回っているとすると“ある半径$\mathbf{r}$のところにある点の速度は何ほどか?”という問題がおこる．剛体中の粒子の速度は$\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$で与えられるのだが，これの証明は，諸君がやってみたまえ．ただし$\boldsymbol{\omega}$は角速度で$\mathbf{r}$は位置である．また，ベクトル積の別の例としてはコリオリの力の公式があり，これもまたベクトル積を用いてあらわすことができる：$\mathbf{F}_c=2m\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}$．すなわち，粒子がある座標系内を速度$\mathbf{v}$で動いていて，その座標系がまた角速度$\boldsymbol{\omega}$で回転しているというときに，その回転し

* これが本当にそうであるということは，微小時間Δtの間の物体中の粒子変位を合成してみればわかる．これは自明のことではないので，興味のあるものはやってみるとよい．

ている系を基準にして考えようとすると，この疑似的な力 $\mathbf{F}_c$ を加えなければならないということなのである．

20-3　ジャイロスコープ

さて，角運動量保存の法則に話を戻そう．この法則は，速く回転している円輪，あるいはジャイロスコープを使って，次のようにして実験的に示すことができる(図 20-1 参照)．回転椅子に坐り，回転している円輪をその軸が水平になるようにして持っていると，円輪はその水平軸のまわりに角運動量をもっている．椅子には(摩擦のない)支軸があって，**鉛直**軸のまわりの角速度は，変化することができない．そこで円輪の軸を鉛直方向に持っていくと，その円輪は鉛直な軸のまわりに回るようになるから，鉛直軸のまわりに角運動量をもつようになる．しかし，全体の**系**(円輪と我々と椅子)は鉛直成分をもつことは**できない**のだから，円輪との平衡を保つために，我々と椅子は円輪の回転と逆むきに回らなければならないのである．

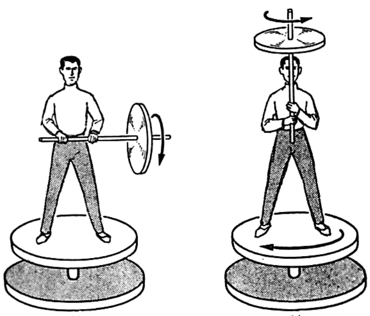


図 20-1　前：軸は水平；鉛直軸のまわりのモーメント＝0
後：軸は鉛直；鉛直軸のまわりのモーメントはあいかわらずゼロ　人と台とは円輪と逆のむきにまわる

今述べたことをもっと詳しく調べてみよう．これは驚くべきことであると同時に，また理解しておかなければならないことなのであるが，ジャイロスコープの軸を鉛直方向にもっていったときに，我々と椅子とを回らせる力の源は何かということである．図 20-2 は y 軸のまわりに速く回転している円輪を示している．したがって，その角速度はその軸のまわりにあり，また角運動量も同様にその方向を向いていることになる．さてそこで，この円輪を x 軸のまわりに小さな角速度 Ω で回したいものとしよう；その場合どれだけの力が必要か？　短時間 Δt の後に軸は水平から $\Delta\theta$ だけ傾いた新しい位置に達している．角運動量の大部分は軸のまわりの回転によるものであり，その軸がかわったのだから(ゆっくり回していることからの寄与は非常に少ない)，角運動量ベクトルは変化したことがわかる．では角運動量はどれほど変化したのか？　角運動量の**大きさ**は変わらず，その**方向**が $\Delta\theta$ だけ変わるのである．したがってベクトル $\Delta\mathbf{L}$ の大きさは $\Delta\mathbf{L}=\mathbf{L}_0\Delta\theta$ である．そうするとトルク $\boldsymbol{\tau}$ は角運動量が時間的に変化する割合であるから，$\boldsymbol{\tau}=\dfrac{\Delta\mathbf{L}}{\Delta t}=\dfrac{\mathbf{L}_0\Delta\theta}{\Delta t}=\mathbf{L}_0\Omega$ である．いろいろの量の方向を考慮にいれると，これは次のようになることがわかる．

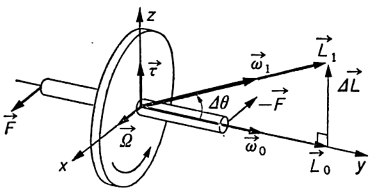


図 20-2　ジャイロスコープ

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{L}_0. \qquad (20.15)$$

したがって，もしも $\boldsymbol{\Omega}$ と $\mathbf{L}_0$ とが両方とも図に示したように水平であるならば，**$\boldsymbol{\tau}$ は鉛直**である．このようなトルクを生ぜしめるには，水平な力，$\mathbf{F}$ と $-\mathbf{F}$ とを軸棒の両端にかけなければならない．こういう力はどうやってかけたらよいのか？　円輪の軸を鉛直方向にもっていこうとするのに，手で押してやればよい．ところでニュートンの第3法則によれば，大きさが等しくて方向が逆な力が(大きさが等しくて逆むきの**トルク**が)**我々**の方にはたらくことを要請されている．この理由によって，我々が鉛直軸 z のまわりに逆むきに回ることになるのである．

この結果は一般化して，速く回転しているコマに適用することができる．おなじみの回転しているコマの場合には，その重心にはたらいている重力が，床との接触点のまわりのトルクを生じる(図 20-3 参照)．このトルクの方向は水平であって，そのため，コマは歳差運動を起こして，鉛直方向のまわりにその軸が円錐を描くようになる．$\mathbf{\Omega}$ が歳差運動の(鉛直方向の)角速度であるとすれば，ここでもまた次のようになることがわかる．

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\mathbf{\Omega}\times\mathbf{L}_0.$$

したがって，速く回転しているコマにトルクをはたらかせたときに生ずる歳差運動の方向は，トルクの方向である．いいかえればトルクを作り出している力と直角な方向である．

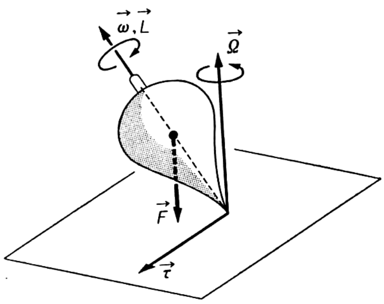


図 20-3 はやくまわっているコマ トルクベクトルのむきが歳差運動のむきと同じであることに注意

ここでもう我々は，ジャイロスコープの歳差運動のことはよくわかったといってもよいかもしれない．また数学的には事実そうである．しかし，これはあくまで数学的な話であって，現象としてはある意味では“奇跡”的なものである．今後，物理学のもっと程度の高いところに入っていくと，大したことにはみえないようなことでも，それを基本的な，あるいは明解な意味で本当に理解することの方がたいへんで，数学的にはかえって早く出てくるものがたくさんあるということになる．これは奇妙な特質であって，もっともっと進んだ部分にはいっていくと，端的には**誰も本当には理解できない**ような結果が，数学からは導き出されるというような場合があるのである．ディラックの方程式がその一例である．この方程式は一見したところ非常に簡単で，きれいな形なのであるが，それから得られる結果を理解するのは難しい．我々のいまの問題に限っていうならば，コマの歳差運動は直角とか円とか，ねじれとか右手ネジとかいうものを含んでいるある種の奇跡の一つであるようにえみる．我々は，それをもっと物理的な意味で理解しなければならない．

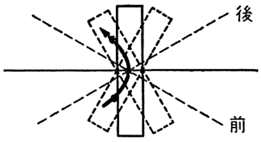


図 20-4 図 20-2 の回転円輪の軸の方向がかわっていくとき円輪の粒子は曲線に沿って運動する

トルクを真正の力と加速度とで説明するにはどうしたらよいか？円輪が歳差運動をしていると，その円輪の中にあって回転している粒子の運動は，実際には一つの平面内にはないのである(図 20-4 参照)．前にも説明したように(図 19-4)，歳差運動の軸をよこぎる粒子は**曲線**にそって動くのであり，そのためには横方向の力を必要とする．この力は我々が軸を押すことによって供給されるのであって，軸は輻を通じて縁の方へその力を伝達させるのである．“ちょっと待てよ，それじゃあ反対側で逆の方向に動いている粒子はどうなるんだろう?”と誰かがいうだろう．そっちの側には**逆方向**の力が働いていなければならないという結論を出すのには，それほど時間はかからない．そうすると，我々が加えなければならない力の総和はゼロである．これらの**力**はちょうど釣り合うのであるが，その一方は円輪の片側に加えられ，他方はその反対側に加えられなければならない．これらの力は直接に加えてもよいが，円輪は固体であるから，車軸に力をかけてもよい．

力が輻を通じて伝達されるからである．

これまでに証明したことは，もしも円輪が歳差運動をしていれば，それは重力によるトルクやその他のトルクと均衡を保つことができるということである．しかし我々が証明したことは，これがある一つの方程式の**一つ**の解であるということである．すなわち，トルクが与えられたとき，**ちょうどうまく回転をはじめさせれば**，円輪はなめらかに一様に歳差運動をするというのである．だから，トルクが与えられた場合に，一様な歳差運動が，回転中の物体がとり得る**最も一般的な**運動であるということはまだ証明してない(事実このことは正しくない)のである．一般的な運動には，平均としての歳差運動のまわりの"揺れ"もまた生じているのである．この"揺れ"は**章動**と呼ばれている．

ジャイロスコープにトルクを加えると，それはまわり，そして歳差運動をする．トルクは歳差運動を**起こさせる**のであるといういい方をするのを好む人もいる．ジャイロスコープから急に手をはなすと，それは重力によって**落ち**はしないで，横方向に動く！　これは非常に不思議なことである．我々がよく**知って**もいるし，**感じ**もする重力の**下むき**の力が，何故**横むき**にそれを動かすのだろうか？　(20.15)のような公式を世界中から集めてきてもわからない．というのは，(20.15)はジャイロスコープがうまく歳差運動をしているときにだけ通用する特殊な方程式だからである．実際に起こっているのは，くわしくいえば次のようなことである．もし我々が軸を絶対に動かないようにおさえて，どんな歳差運動も起こらないようにすると(しかしコマは回っている)，トルクは何もはたらいていないことになる．重力によるトルクもない．それは我々の指の力と平衡を保っているからである．しかし急に手を離すと重力によるトルクが瞬間的にかかる．正気の人間なら誰でもコマは倒れると思うであろう．事実そうなろうとするのであって，コマがあまり速く回っていなければたしかにそうなる．

ジャイロは予想通り本当に倒れるのである．しかし倒れはじめるとすぐに横にまわりはじめる．そして，続けて横にまわるためにはトルクが働くことが必要である．この方向にトルクが働いていないと，そのトルクのない方向と反対の方向に，ジャイロは"倒れ"はじめる．これによってジャイロには鉛直軸のまわりの運動の成分が与えられ，それは定常の歳差運動の場合のものと同じである．しかし実際の運動は定常の歳差運動の速度を"超過"して，軸はまた最初の高さに戻る．この軸の端がえがく途は，サイクロイド(自動車のタイヤの溝にひっかかった小石が通る軌跡)である．通常この運動は速すぎるので，目で追うことはできない．また，がんどう吊りのベアリングに摩擦があるので，この運動は急速に減衰してしまい，定常の歳差運動による動きだけが残る(図20-5)．円輪の回転がゆっくりであればあるほど，章動ははっきりとよく観察できる．

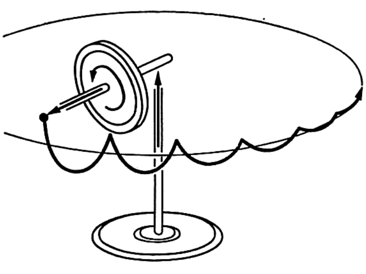


図20-5　ジャイロスコープの軸をおさえていたのを放した直後その軸が重力によって下がる実際の運動

運動が落ちついたときには，ジャイロの軸の位置は始めよりも少し

低くなっている．それは何故だろうか？ このことは複雑なこまかいことではあるが，とくにこのことをここにもち出したのは，ジャイロスコープが全くの奇跡であると読者諸君に思ってもらいたくないからである．素晴らしいことであるには**違いない**が奇跡ではない．軸を完全に水平に保っておいて急に手を離したとすると，歳差運動の簡単な方程式から判断すれば，それは歳差運動をし，水平面内をまわることになる．しかし，それは不可能なのである！ 前には無視したけれども，円輪が歳差軸のまわりに**若干の**慣性モーメントを持っているのは事実であって，たとえゆっくりとではあっても，それが軸のまわりを回っていれば，それは軸のまわりに微小な角運動量を持っているのである．それはどこからきたのだろうか？ 支点のところが完全にできていれば，鉛直軸のまわりにトルクはない．角運動量に変化がないというのに，どうして歳差運動をすることが**できる**のだろうか？ 軸の端はサイクロイドを描いている．サイクロイドは円がころがるとき，その１点が描く曲線であるが，軸の端の運動はだんだん減衰して，円の中心の平均的な一様な運動のところへ落ちつくのである．これが上の問に対する答である．すなわち少しばかり低いところへ落ちつくということになる．それが低くなるので，回転の角運動量も小さい鉛直成分を持つようになるのであり，それがまさに歳差運動のために必要だったものである．というわけで，ぐるぐるまわるためには，少しばかり低い方へ下がらなければならないということがわかったであろう．重力のいうことを少しばかりきかなければならないのである；その軸をわずかに下げることによって，鉛直軸のまわりの回転が維持されるのである．まあ以上がジャイロスコープの動き方についての説明である．

20-4 剛体の角運動量

3 次元における回転の問題をおしまいにする前に，3 次元の回転で起こる現象のうちで，必ずしも自明でない二,三のものについて少なくとも定性的に，述べておくことにする．最も主なことは，一般的にいって，剛体の角運動量は**必ずしも**角速度と同じ方向を向いているとは限らないということである．車軸に斜めに円輪を固定し，車軸はその重心を確かに通るようにしたものを考えよう（図 20-6）．車軸のまわりにこの円輪を回転させると，斜めにとりつけてあるので，ベアリングのところが揺れる．このことは誰でも知っているとおりである．定性的に考えると，回転している系においては遠心力が円輪にはたらいていて，その質量を軸からできるだけ遠くへ飛ばそうとしているということはすでにわかっている．このことによって，円輪の面は軸に垂直になろうとする．この傾向に抵抗するために，ベアリングがトルクをはたらかす．ベアリングがトルクをはたらかすというならば，角運動量がある割合で変化しなければならない．円輪を単に軸のまわりに回しているというだけだのに，角運動量の変化の割合などというも

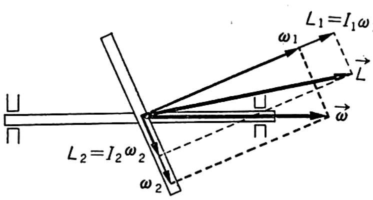


図 20-6 回転体の角運動量と角速度とは必ずしも平行ではない

のがどうしてありうるのだろうか？ 角速度ωを円輪の面に平行な成分と垂直な成分，ω_1とω_2とにわけたとする．角運動量はどうなるか？ これら二つの軸のまわりの慣性モーメントは**同じではない**．したがって，(この場合の特別な軸についてのみいえるのであるが,) 角運動量すなわち慣性モーメントかけるそれぞれの角速度成分という量の比は，角速度成分の比とは**異なった比**になる．したがって空間における角運動量ベクトルの方向は，軸の方向では**ない**方向である．この物体を回すときには，我々は空間内の角速度ベクトルを回さなければならないので，車軸にトルクを加えなければならないのである．

角運動量の非常に重要で，また面白い性質で，ここで証明するにはあまりにも複雑すぎることではあるが，書くのも使うのも容易であり，また上に述べた解析の基本になっているものがある．この性質は次のようなものである：どんな剛体でも，じゃがいものように不規則な形をしていても，重心を通る三つの互いに垂直な軸であって，そのうちの一つの軸のまわりの角運動量は重心を通るすべての軸についての値のうちの最大値を持ち，残りの軸のうちの一つのまわりの角運動量は**最小値**をとり，3番目の軸のまわりの角運動量はそれらの中間の(あるいはそれらのいずれかに等しい)値をとるような軸をもっている．これらの軸はその物体の**慣性主軸**といわれ，もしその物体が，それらのうちの一つのまわりに回転していれば，その角運動量は角速度と同じ方向を向いているという重要な性質を持っている．対称軸をもった物体においては，主軸は対称軸と一致する．

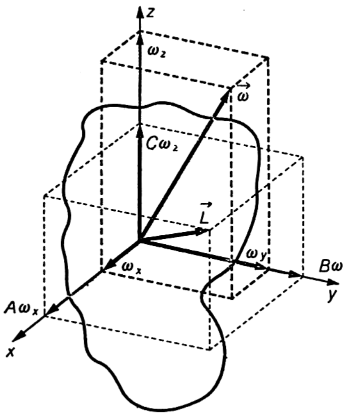


図 20-7　剛体($A>B>C$)の角速度と角運動量

x, y, z軸を主軸にそってとり，そしてそれぞれに対応した主慣性モーメントをA, B, Cと呼ぶことにすると，任意の角速度ωに対するその物体の角運動量と回転のエネルギーをすぐ計算することができる．ωをx, y, z軸にそって各成分$\omega_x, \omega_y, \omega_z$に分解し，また$x, y, z$にそって$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$という単位ベクトルを使うと，角運動量は次のように書くことができる．

$$\mathbf{L} = A\omega_x\mathbf{i} + B\omega_y\mathbf{j} + C\omega_z\mathbf{k}, \tag{20.16}$$

回転エネルギーは

$$\text{K.E.} = \frac{1}{2}(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2)$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{L}\cdot\omega \tag{20.17}$$

である．

第21章
調和振動子

21-1　線型微分方程式

物理の課程は通常，力学，電気学，光学などの部門に分かれていて，学生はそれを次々に勉強するようになっている．例えばこの講義では，いままで主として力学を取り扱ってきた．しかし不思議なことがたびたび起こる：すなわち物理学のいろいろな分野ばかりでなく，他の科学においてもほとんど全く同じ方程式が出てくることがしばしばあるのである．ということは，これらは分野こそ違っているが，類似性のある現象がたくさんあるということである．いちばん簡単な例をあげるならば，音波の伝播は光波の伝播に似ている点が多い．音響学をよく勉強すれば，その多くは光学をよく勉強するときのと同じものであることがわかるだろう．このようなわけで，一つの分野のある現象に関して勉強するということは，別の分野における我々の知識を拡張するのに役立つことがある．このような拡張が可能であるということは，あらかじめ知っていた方がよいと思う．そうでないと，力学のごく小部分としか思えないようなところに何故こんなに時間とエネルギーをつぎ込むのか，その理由がのみこめないかも知れないからである．

これから調和振動子について勉強するのだが，これは他の多くの分野にも，ぴったりこれに相当するものがある．ここではバネの端につけたおもり，あるいは振れの小さい振子，その他何か機械的なものというような力学的な例から始めるが，本当のところはある**微分方程式**について勉強するわけである．この方程式は，物理学やその他の科学にしばしばあらわれてくるものである．そして事実，非常に多くの現象の一部をなしているので，それについてよく勉強しておく値打が十分ある．この方程式の出てくる現象としては，例えばバネに取り付けられたおもりの振動；電気回路の中で前後に流れている電荷の振動；音を発生している音叉の振動；光波を発生している原子中の電子の振動；温度調節のサーモスタットのような自動調節機構の作動；化学反応における複雑な相互作用；食物の供給とバクテリア自身が作り出す毒物との間に干渉がある場合のバクテリアのコロニーの成長；狐が兎を食い，兎が草を食うというような現象；等々があるが，これらの現象が従う方程式はすべて互いに非常によく似ている．我々が力学的な振動子をこんなに深く勉強するのはこのためである．この方程式を**定数係数を持った線型微分方程式**という．定数係数を持った微分方程式というのは，いくつかの項の和から成り立っている微分方程式であっ

て，その各項は従属変数を独立変数で微分したものに，ある定数をかけたものである．そして

$$\frac{a_n d^n x}{dt^n}+\frac{a_{n-1}d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+\frac{a_1 dx}{dt}+a_0 x=f(t) \qquad (21.1)$$

はn階の定数係数線型微分方程式(各a_iは定数である)という．

21-2　調和振動子

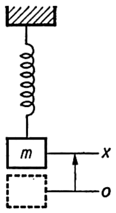


図 21-1　バネにつるされたおもり　調和振動子の簡単な一例

定数係数を持った線型微分方程式に従った運動をする最も簡単な力学系は，おそらくバネに取り付けたおもりであろう：まず，重力と釣合いを保つためにバネは延びている；そしていったん釣合い状態になったところで，その位置からのおもりの縦方向の変位について考える(図 21-1)．ここでは上方向の変位をxととることにし，またバネは完全に線型であると仮定する．すなわちバネが引き延ばされたときに，もとに戻そうとする力は，延びの量に完全に比例するものとする．すなわち，はたらく力は$-kx$だということである(負の符号は戻そうとする力であることを忘れないためのものである)．そこでおもさと加速度との積は$-kx$に等しくなければならないから：

$$\frac{md^2x}{dt^2}=-kx. \qquad (21.2)$$

話を簡単にするために，たまたま(あるいは時間を測る単位を適当に変えたと考えてもよい)$\frac{k}{m}=1$であったとしよう．そこで

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-x \qquad (21.3)$$

という方程式をまず検討してみる．後で(21.2)式にもどってkとmがはっきりとあらわれている場合について論じる．

(21.3)式はすでに数値的にくわしく取り扱った；すなわち，はじめて力学に入ったとき，この方程式を解いて運動を求めた(方程式 9.12 をみよ)．数値積分によって，図 9-4 の曲線を得たのだが，それによれば，もしmの位置がはじめゼロではなくしかも静止していたとすれば，mは下に降りてきてゼロを通過する；それから先のことはやらなかったが，それ以後は単に上下に動き続ける――すなわち**振動する**ことは我々の知っているとおりである．この運動を数値的に計算して，mは$t=1.570$のとき平衡点を通過することを知った．全サイクルの長さはこの長さの 4 倍すなわち$t_0=6.28$“秒”である．この値は数値的に求めたのであって，それはまだ我々が微積分についてあまりよく知らないころであった．ところでその後，数学科の講義では，2 回微分するとはじめのものにマイナスの符号をつけたものになるような関数を求めたことと思う(もちろん直接的にこの関数を求める方法もあるのだが，答がすでにわかっている場合にくらべればもちろんより複雑である)．この関数は$x=\cos t$である．これを微分すれば$\frac{dx}{dt}=-\sin t$および$\frac{d^2x}{dt^2}=-\cos t=-x$を得る．関数$x=\cos t$は$t=0$のとき$x=1$で初速は無しというところから始まるが，これは我々が数値的に解いたとき

の出発点の状態と同じである．さて $x=\cos t$ ということがわかったのであるから，今度はそれが $x=0$ の点を通る時刻を**正確に**計算することができる．その答は $t=\frac{\pi}{2}$ すなわち 1.57079 である．数値計算に誤差があったので，前の $t=1.570$ の最後の桁が間違っていたのだが，本当にすれすれのところまであっていた！

さて，もとの問題に帰って，時間の単位を本当の秒にもどすことにする．そのときの解は何になるだろうか？ まず $\cos t$ に何かを掛ければ，定数 k と m が入ってくるだろうと思われる．そこで $x=A\cos t$ という式をこころみてみよう；そうすると $\frac{dx}{dt}=-A\sin t$ であるから，$\frac{d^2x}{dt^2}=-A\cos t=-x$ となることがわかる．というわけで，(21.2)式を解くことに成功しなかったばかりか，なんとも困ったことには，またもとの(21.3)式に逆もどりしてしまった．このことは線型微分方程式の最も重要な性質の一つを示しているのである！ **方程式の一つの解にどんな定数を掛けても，それもまた解になる**．このことの数学的な理由は明白である．いま x が一つの解であるとして，その解の式の両辺に，例えば A を掛けると，すべての微分項にもまた A が掛けられることになるから，Ax は，x と同様に，もとの方程式の立派な解である．その物理的な意味は次のとおりである．いまバネにおもりをつけたとし，それを2倍の距離までひっぱると，それにはたらく力は2倍になり，したがって，その加速度も2倍で，与えられた時間内に得る速度もまた2倍，与えられた時間内に動く距離もまた2倍ということになる；しかしこのおもりは，2倍の距離だけ引き下げられていたのであるから，原点に戻るためには，2倍の長さの距離を**動かねばならない**のである．したがって，はじめにどれだけはなれていたかには無関係に，原点に戻るまでには**同じ時間**がかかるのである．いいかえれば，線型方程式が成り立つ場合には，運動がどんなに"強い"ものであっても**時間に対しては同じように変化する**のである．

さて，上のやり方はだめだった――上のやり方でわかったことは，解に何をかけてもまた同じ方程式を満足するということだけであって，別の方程式を満足するということにはならなかった．x に違う定数が掛かった解を得るように，いろいろやってみると，**時間**の尺度を変えなければならないということに気がつく．すなわち方程式(21.2)は次のような形の解を持つということである．

$$x=\cos\omega_0 t. \tag{21.4}$$

(今度の ω_0 は回転体の角速度ではない．一つの文字は一つ以上のことには使えないということにしたら，途中で文字が足りなくなってしまう.) ω に添字"0"をつけたのは，やがていろいろなオメガを使うようになるからである；とにかく，ω_0 はこの振動子の自己運動に関する値であることを頭にとどめておこう．さて，方程式(21.4)を試みてみると，こんどはうまくいく．というのは，$\frac{dx}{dt}=-\omega_0\sin\omega_0 t$ であり，$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega_0{}^2\cos\omega_0 t=-\omega_0{}^2x$ となるからである．このようにして，我々がまさに解きたいと思っていた方程式がとうとう解けた．$\omega_0{}^2=\frac{k}{m}$ と

おけば $\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega_0{}^2x$ という方程式は(21.2)と同じである．

次に調べなければならないのは，ω_0 の意味である．コサイン関数は，その角度が 2π だけ変わるごとにその値が繰り返すことはわかっている．したがって，$x=\cos\omega_0t$ ならば，その運動は繰り返しであり，"角度"が 2π だけ変わると一つの完全な周期をたどるであろう．ω_0t という量は運動の**位相**といわれている．ω_0t を 2π だけ変えるには時刻 t は t_0 だけ変わらなければならない．この t_0 は一つの完全な振動の**周期**といわれるのであるが，t_0 はもちろん $\omega_0t_0=2\pi$ となるようなものでなければならない．すなわち ω_0t_0 は角度の1サイクル分だけなければならないのであって，そのときすべてが繰り返されるわけである——t を t_0 だけ増せば，位相は 2π だけ増す．よって

$$t_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{21.5}$$

したがって，より重いおもりを使えば，バネの上下に振動する時間が長くなる．それはその物の慣性がそれだけ大きく，したがって力の大きさは同じであっても，おもりを動かすのに余分に時間がかかるからである．一方，バネがもっと強ければ，それだけ速く動くように思えるが，まさにそのとおりである：バネが強ければ周期は短い．

ここで注意してほしいのは，バネにつけたおもりの振動の周期は，その振動が**どのように**始められたか，すなわち，どれだけひっぱられていたところからはじまるかということには全然関係しないということである．**周期**はこのようにしてきまるが，振幅は運動の方程式(21.2)からは**きまらない**．実は，振幅は運動をどのように始めるかによって**きまる**のであって，それは**初期条件**あるいは始動条件といわれている．

実は，これで方程式(21.2)式のあらゆる一般的な解をすべてみつけてしまったわけではない．他にも解はある．その理由はすぐにわかるはずである：理由というのは，$x=a\cos\omega_0t$ で表わされる解は，すべて初期の変位はあるが，初速はないという場合についてだけのものだからである．しかし，例えば $x=0$ から運動をはじめて，瞬間的な衝撃を与え，$t=0$ である初速を持たせることもできるのである．このような運動はコサインでは表わされない——サインで表わされる．別のみかたをしてこう考えてみる．$x=\cos\omega_0t$ が解であるとして，我々が，たまたまある時刻(その時刻を"$t=0$"と呼ぶとする)に部屋に入ったら，ちょうどおもりが $x=0$ を通るところがみえたとする．それでもおもりは同じ運動を続けることは明白ではなかろうか？　こういうわけだから，$x=\cos\omega_0t$ が最も一般的な解だということはありえない；いわば時間のはじめといったようなものを移動させることが可能でなければならない．例えば，解を次のように書くことができる：$x=a\cos\omega_0(t-t_1)$，ここで t_1 はある定数である．このことはまた，時間の原点をある新しい瞬間に移動させることに相当する．更に，これを展開すると

$$\cos(\omega_0t+\Delta)=\cos\omega_0t\cos\Delta-\sin\omega_0t\sin\Delta$$

となって次のように書ける：

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t,$$

ただし，$A = a\cos\Delta$ および $B = -a\sin\Delta$ である．これらの形は，いずれも(21.2)式の完全な一般解をあらわす一つの書き方である：すなわち $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x$ という微分方程式のこの世の中に存在するすべての解は，次のような形で表わしうるということである：

(a) $$x = a\cos\omega_0(t - t_1), \tag{21.6a}$$

あるいは

(b) $$x = a\cos(\omega_0 t + \Delta), \tag{21.6b}$$

あるいは

(c) $$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t. \tag{21.6c}$$

(21.6)式のうちのある量には名前がついている：ω_0 は**角振動数**という；これは位相が1秒間に変化するラジアン数である．これは微分方程式によってきまる．他の定数は方程式によってきまるのではなく，その運動がいかにして始められるかという条件によってきまる．これらの定数のうち，a はおもりが到達する最大のふれを与えるものであって，これを**振幅**という．定数 Δ は，振動の**位相**と呼ばれることもあるが，$\omega_0 t + \Delta$ を位相という人もあり，位相は時と共に変わるものであるといったりするので紛らわしい．我々は，Δ をある基準のゼロからみた**位相のずれ**とでも呼ぶことにしよう．別のいい方をするならば，異なる Δ は位相の異なる運動に対応する．このことは正しいのであるが，Δ を位相と名付けるかどうかということは別の問題である．

21-3 調和振動と円運動

方程式(21.2)の解にコサインが含まれているということから考えると，円と何らかの関係があるのではないかと思われる．実際の線型の運動には，円が関連したりしていないで，単に上下に動くだけであるから，これはもちろん人為的な考え方である．ところが，実は我々が円運動の力学を勉強したときに，すでにこの微分方程式を解いてしまっていたのだといってもよいのである．粒子が一定の速さ v で円運動をするならば，円の中心から粒子へ向けてひいた動径は，時間に比例した角度だけまわる．この角度を $\theta = \dfrac{vt}{R}$ と呼ぶとすると(図21-2)，$\dfrac{d\theta}{dt} = \omega_0 = \dfrac{v}{R}$ である．このとき中心に向かって $a = \dfrac{v^2}{R} = \omega_0^2 R$ という加速度があることはすでに知っている．さて，また，ある与えられた瞬間の位置 x は，円の半径に $\cos\theta$ をかけたものであり，また y は半径かける $\sin\theta$ であるということもわかっている：

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta.$$

ところで加速度はどうか？ 加速度の x 成分，$\dfrac{d^2x}{dt^2}$ は何であるか？ それはすでに幾何学的に求めてしまってある；それは加速度の大きさに射影角のコサインをかけ，それにマイナスの符号をつけたものである．マイナスの符号をつけたのは，それは中心を向いているからである．

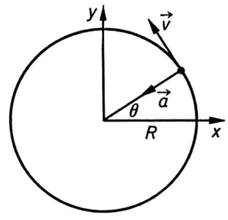


図21-2 一定の速さで円形の途を運動している粒子

$$a_x = -a\cos\theta = -\omega_0{}^2 R\cos\theta = -\omega_0{}^2 x. \quad (21.7)$$

いいかえれば，粒子が円運動をしているときには，その運動の水平成分は，中心からの水平移動距離に比例した加速度を持つということである．もちろん円運動に対する解も得られる：$x=R\cos\omega_0 t$．方程式(21.7)は円の半径には関係しない．だから ω_0 が与えられれば，円の半径の如何にかかわらず，それに対して同じ方程式が得られるのである．このようなわけで，幾つかの理由から考えて，バネに取り付けられたおもりの変位は $\cos\omega_0 t$ に比例し，したがって角速度 ω_0 で円運動をしている物体の位置の x 成分をみているのと全く同じ運動になるであろうと期待される．実験によってこのことを確かめることができる．図21-3において光源から出た光はスクリーンにあたり，回転軸に取り付けられたピンの影と，上下方向に振動しているおもりの影とが並んでうつるようになっている．おもりを，ちょうどよいときに，ちょうどよいところからはなすものとし，また軸の回転の速さは，ていねいに調節されて周期が一致するようになっているとすれば，それぞれの影は正確に互いに同じように動くはずである．また前に求めた数値解をコサイン関数とくらべてみて，よく一致するかどうかを調べてみることもできる．

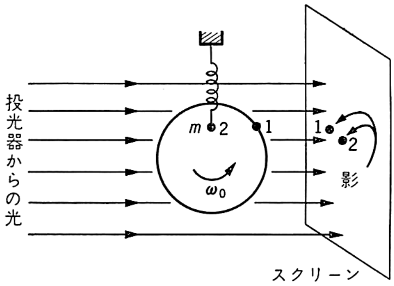


図21-3　単振動と一様な円運動とが同等なものであることを示す実験

ここで指摘しておきたいことは，一様な円運動が振動の上下運動に数学的に非常によく似ているから，振動運動を何か円運動をしているものの投影であると想定した方が，その運動を調べるのに簡単だということである．いいかえれば，振動の問題においては距離 y は別に意味がないのだけれども，それでも y を使ったもう一つの式を方程式(21.2)に人為的に補って，これらの式をいっしょにすることができる．こうすると，1次元の振動子を円運動として考えることができるであろうし，それは微分方程式を解かなければならないことにくらべれば，はるかに容易である．実際にこれをやるための秘訣は，複素数を用いることであって，その方法については次章で述べる．

21-4　初期条件

さて次に考えるのは，定数 A と B，あるいは a と Δ は何によってきまるのかということである．もちろんこれらの値は，運動がどのように始まるかによってきまる．ごくわずかに変位したところから運動を始めても，それはそれで振動の一つの形である；ある初期の変位から始めて，手からはなすときに押し上げてやると，これもまた別の運動になる．定数 A と B，あるいは a と Δ，あるいはそれらを他のどんな形であらわしたものであっても，それらはもちろん運動が始まるときの様子によってきまるのであって，他のどの条件によってもきまるものではない．これらのものを**初期条件**という．いま我々は初期条件と定数とを結びつけたいのであるが，それには方程式(21.6)のどれをとってもできるけれども，方程式(21.6c)を使うといちばんやさしい．いま $t=0$ のときに，はじめの変位 x_0 のところからある速度 v_0 で運動

を始めたものとしよう．これは，運動を始める最も一般的な場合である．（はじめの**加速度**をきめることはできない．加速度は x_0 を指定したときに，使うバネによってきまるものだからである.）さて A と B とを計算しよう．x に関する方程式

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

からはじめる．あとで速度も必要になるので，x を微分して

$$v = -\omega_0 A\sin\omega_0 t + \omega_0 B\cos\omega_0 t$$

を得る．これらの式はすべての t に対して成り立つのであるが，我々は $t=0$ における x と v とについて特別な知識を持っている．そこでこれらの式に $t=0$ をいれると，左辺は $t=0$ における x と v とであるから，x_0 と v_0 とになる；またゼロのコサインは1であり，ゼロのサインはゼロである．したがって

$$x_0 = A\cdot 1 + B\cdot 0 = A$$

および

$$v_0 = -\omega_0 A\cdot 0 + \omega_0 B\cdot 1 = \omega_0 B$$

となる．こうしてこの特別な場合には

$$A = x_0, \quad B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

であることがわかる．これらの A と B の値から，a と $\varDelta$ を求めることもできる．

これで解を求めることはおわりであるが，物理的に重要な事柄で，もう一つ確認しておかねばならないことがある．それはエネルギーの保存である．摩擦による損失は無いのだから，エネルギーは保存されているはずである．そこで

$$x = a\cos(\omega_0 t + \varDelta)$$

という公式を使うと

$$v = -\omega_0 a\sin(\omega_0 t + \varDelta)$$

となる．次に運動のエネルギー T と，位置のエネルギー U とを求めてみよう．あらゆる瞬間の位置のエネルギーは $\frac{1}{2}kx^2$ である．ただしここで x は原点からの距離であり，k はバネの定数である．上の式を x に代入すると

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}ka^2\cos^2(\omega_0 t + \varDelta)$$

となる．もちろん位置のエネルギーはつねに一定ではない；また位置のエネルギーは当然負にはならない――バネの中にはつねにいくらかのエネルギーがあるのであり，そのエネルギーの量が x とともに変化するのである．一方運動のエネルギーは $\frac{1}{2}mv^2$ で，v に代入することによって

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0{}^2 a^2\sin^2(\omega_0 t + \varDelta)$$

が得られる．さて x が極大のときには速度がなくなるので運動のエネルギーはゼロになる；一方 x がゼロをよぎるところでは最も速く動い

ているので，運動のエネルギーは極大になる．この運動エネルギーの変化は，位置のエネルギーの変化とちょうど逆である．しかし全エネルギーは一定でなければならない．いま $k=m\omega_0^2$ であることに着目すると次のようになることがわかる．

$$T+U=\frac{1}{2}m\omega_0^2a^2[\cos^2(\omega_0t+\Delta)+\sin^2(\omega_0t+\Delta)]$$
$$=\frac{1}{2}m\omega_0^2a^2.$$

エネルギーは振幅の自乗に比例する；振幅を2倍にすれば4倍のエネルギーを持った振動になる．位置のエネルギーの**平均**は，極大値の半分であり，したがって全エネルギーの半分である．運動のエネルギーの平均も同様に全エネルギーの半分である．

21-5　強制振動

次に**強制調和振動子**，すなわち外力がはたらいている場合について論じよう．そのときの方程式は次のようになる：

$$\frac{md^2x}{dt^2}=-kx+F(t). \tag{21.8}$$

このようなときにはどんなことが起こるかを求めたいわけである．外から加えられる駆動力は時間の関数であるが，それにはいろいろな種類のものがありうる；最初に調べるのは，非常に簡単なものである——その力が振動しているものとする：

$$F(t)=F_0\cos\omega t. \tag{21.9}$$

しかし ω は ω_0 と等しいとは限らないことに注意してほしい：ω は我々の勝手になる；強制は種々の振動数で行なうことができる．そこで方程式(21.8)を特別な力(21.9)の場合について解いてみよう．(21.8)の解はどうなるか？　一つの特解は(より一般的な解については後で論じる)次のようなものである．

$$x=C\cos\omega t. \tag{21.10}$$

ここで定数はこれからきめられるべきものである．いいかえれば，おもりを前後に押し続ければ，それは力に調子を合わせて前後に動くと考えてもよかろうということである．とにかくやってみればいい．そこで(21.10)を(21.8)に入れると次式が得られる．

$$-m\omega^2C\cos\omega t=-m\omega_0^2C\cos\omega t+F_0\cos\omega t. \tag{21.11}$$

あとでこの方程式を理解しやすいように，$k=m\omega_0^2$ もいれておいた．さてすべての項にコサインがあるので，それを通分すると，C を適当に選びさえすれば(21.10)が本当に解になることがわかる．C は次のようなものでなければならないというのが答である．

$$C=\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}. \tag{21.12}$$

すなわち，m は外力と同じ振動数で振動するが，その振幅は外力の振動数と振動子の自己振動数とに依存する．ω が ω_0 にくらべて非常に小さければ，変位の方向と外力の方向とは同じである．一方，非常に

速く前後にゆすぶったときには，(21.12)によるとωが振動子の自己振動数以上になるとCが負になる(ω_0を振動子の自己振動数といい，ωを入力振動数という)．振動数が大きくなると，分母が非常に大きくなり，振幅はたいへん小さくなる．

もちろん我々がみつけた解は，ちょうどうまく運動が始められたときだけの解である．そうでない場合には，しばらくたつと衰えて消えてしまうような振動部分も存在するのである．この部分というのは，$F(t)$に対する**過渡**応答と呼ばれるものである．一方(21.10)と(21.12)は**定常**応答と呼ばれる．

公式(21.12)によれば，また非常に注目に価することが起こる筈である：もしもωがω_0にほとんど一致すれば，Cは無限大に近づかなければならない．そこでもしも外力の振動数を自己振動数に"同期"するように調節すると，ものすごい変位が得られる筈である．このことはブランコに乗っている子供を押したことのある者なら誰でもよく知っていることである．目をつぶってでたらめな速さで押していたのでは，あまりうまくいかない．ちょうどうまいタイミングだと，ブランコは非常に高くまで行くけれども，タイミングが悪いと引くべきときに押していたりして，うまくいかない．

ωをω_0に全く等しいようにすると，**無限大**の振幅で振動することになるが，それはもちろん不可能なことである．そうならない理由は，方程式に何か不都合が起きるということである．他に摩擦力の項もあるし，またその他にも(21.8)にはないけれども，実際の自然界には存在するような力がある．このようなわけで，なんらかの理由によって，振幅は無限大にはならない；その理由はバネがこわれるということでもありうるのだ！

第22章
代　　数

22-1　たし算とかけ算

我々は振動系について勉強しているのだが，そうやっているうちに，すべての数学のなかでもっとも素晴らしい，そして驚くべき方法の一つを使うことになる．物理的な見方をすれば，この方法を説明するのに2分そこそこしかかからない．しかし，科学というものは，実用上のためのものであると同時に，また知性の喜びのためのものでもあるのだ．そこでこの素晴らしい宝石にたった2,3分しか費さないなどということはしない．その宝石のまわりを初等代数と呼ばれる数学の一部門の偉大な崇高な構成でつつんで，それにうまくおさめてみよう．

さて，“物理の講義に数学とはいったいどういうことだ？”と諸君は疑問に思うかもしれない．しかし，そのいいわけになりそうなものはいくつかある：第一に，もちろん数学は重要な道具だからである．しかし，これでは2分間で方法の説明をすませるということのいいわけにしかならない．一方，我々は，理論物理学における法則は，すべて数学的な形で表現されるものであることを知っている．そしてまた，それにはある意味の単純さと美しさがあることを知っている．したがって結局のところ，自然を理解するためには，数学的関係についてより深い知識を持つことが必要であろう．けれども，本当の理由はこのことが面白いからなのである．我々人間は，自然をいろいろに切りきざんで，それぞれの学科に対してそれぞれの講義があるのだけれども，このような部門化はしょせん人工的なものなのであって，知性のよろこびがあれば，我々は意の向くままにそれを追求していっていいのではないか．

諸君はほとんどみな高校ですでに代数を学んでいる．しかし，それにもかかわらず，ここで代数についてさらにていねいに勉強しようとするのは，次の理由によるのである．それは，高校で代数を習ったときははじめてであった；方程式はみな見なれないものばかりで，難しかった．ちょうどいまここで物理を勉強しているようなものであったと思う．

自分の歩いてきた道をときどきふり返ってみて，どんなところを通ってきたのか，また全自然の雄大な構図や意図がどんなものであるのかを考えてみることは，はなはだ楽しいものである．そのうちに，誰か数学科の先生の力学の講義があるだろう．それに出れば，我々が物理の講義で勉強しようとしていることが何であったかがわかるだろう

と思う.

代数について，ここで話を進める進め方は，必ずしも数学者的な見方にはよらない．それは，数学者というものが興味をもつのは，主として，いろいろな数学的事実をどうやって証明するか，そしてそれにはどれだけの仮定が必要で，どれだけが不必要であるのかなどという面だからである．証明してしまったあとの結果については，数学者はあまり興味をもたない．例えば，直角三角形の2辺の自乗の和は斜辺の自乗に等しいというピタゴラスの定理があるが，我々はこれを非常に面白いと思う．まことに面白い事実で，不思議なくらい簡単である．それをどうやって証明するかとか，あるいはそのためにどんな公理が必要かなどという問題にふれないでも，このことは玩味することができる．そこで，ここでもこの精神にしたがって初等代数の体系もいわば定性的に述べることとしようというのである．**初等**代数とここでとくにことわったのは，別に**近代**代数というものがあって，この数学部門では，$ab=ba$ というような規則は放棄されているのだが，これがやはり代数と呼ばれているからである．しかし，ここではこの近代代数にはふれない.

さて，我々の問題を論ずるにあたっては，半ばから始めることにする．我々はすでに整数とは何か，ゼロとは何か，ある数を1単位だけ増すというのはどういうことなのかということ等についてはすでに知っているものとする．“それじゃ半ばじゃない！”という人があるかも知れない．しかし数学の立場からいえば，半ばなのである，何故ならば，更にもとをいえば，整数のある性質を**導き出す**のに集合論までさかのぼって論ずることになるからである．しかし我々は，そんな数学的な考え方や数学的論理などというような方向へは進まない．整数とは何であるか，どうやって数を数えればよいかということなどはすでにわかっているものとして，もっと別の方向へ進むことにする.

ある整数 a から出発したとして，1単位を b 回数えたときに達する数を $a+b$ という．これが整数の**加法**の定義である.

ひとたび加法を定義してしまえば，次のようなことを考えることができる：何もないところから出発して，それに a を b 回続けて加える，これを整数の**乗法**という；そして $\boldsymbol{a}$ **の** $\boldsymbol{b}$ **倍**という.

そこで**連続乗法**も考えられる：1から出発して a を b 回続けてかける，それを**累乗**：a^b というのである.

これらの定義からいって，以下に述べる関係はすべて正しいことが容易にわかる：

$$
\begin{array}{llll}
\text{(a)} & a+b=b+a, & \text{(b)} & a+(b+c)=(a+b)+c, \\
\text{(c)} & ab=ba, & \text{(d)} & a(b+c)=ab+ac, \\
\text{(e)} & (ab)c=a(bc), & \text{(f)} & (ab)^c=a^cb^c, \\
\text{(g)} & a^ba^c=a^{(b+c)}, & \text{(h)} & (a^b)^c=a^{(bc)}, \\
\text{(i)} & a+0=a, & \text{(j)} & a\cdot 1=a. \\
\text{(k)} & a^1=a. & &
\end{array}
\qquad (22.1)
$$

これらの結果はよくわかっていることなのだから，深入りしないで，単に書き並べるだけにしておく．もちろん，1と0の性質は特別である；例えば $a+0$ は a であり，a かける1は a，a の1乗は a である．

本当のことをいうと，ここの議論には連続性だとか順序づけだとかいうような他の二,三の性質も仮定しなければならないのであるが，これらを定義するのは非常に難しい．それは厳密な理論に任せておくことにする．また上には“規則”をたくさん書きすぎたことも事実である．これらの規則のうちのあるものは，他のものから導かれるのであるが，しかしここではそんなことにはかかずらわないことにする．

22-2 逆演算

加法，乗法，冪(べき)乗などの順演算の他に，**逆演算**というものがある．逆演算というのは次のようなものである．a と c とが与えられたとき b がどんな値ならば，$a+b=c$，$ab=c$，$b^a=c$ などの方程式が満足されるかを求めるとする．もし $a+b=c$ であれば，b は $c-a$ であると定義され，これは**減法**と呼ばれる．除法と呼ばれる演算も明白である：もし $ab=c$ であれば $b=\dfrac{c}{a}$ が除法の定義である——これは $ab=c$ という方程式の“後ろ向き”の解である．また $b^a=c$ が与えられたとき“b は何だろう？”と考えたとする．これは c の **a 乗根**と呼ばれるものである：$b=\sqrt[a]{c}$．例えば次のような問題があったとする．“どんな整数を3乗したら8になるか？”その答は8の**3乗根**と呼ばれるものであり，2である．b^a と a^b は同じではないから，冪に関しては逆演算が**2種類**ある．もう一つの逆演算問題は，“8を得るためには2を何乗したらよいか？”というのである．これは，**対数**をとるといわれる．もし $a^b=c$ であるならば，$b=\log_a c$ と書く．この記号は他のものにくらべて複雑であるが，それだからといって他の諸演算より高等だというわけではない．少なくとも整数の場合にはそうである．代数の講義では対数は終りの方で出てくるが，実際には，根に開くのと同じくらい簡単なものである；対数は一つの代数方程式の別種の解だというだけのことである．順演算と逆演算を以下にまとめておく：

$$
\begin{array}{llllll}
\text{(a)} & \text{加法} & a+b=c, & \text{(a}'\text{)} & \text{減法} & b=c-a, \\
\text{(b)} & \text{乗法} & ab=c, & \text{(b}'\text{)} & \text{除法} & b=\dfrac{c}{a}, \\
\text{(c)} & \text{累乗} & b^a=c, & \text{(c}'\text{)} & \text{根} & b=\sqrt[a]{c}, \\
\text{(d)} & \text{冪} & a^b=c, & \text{(d}'\text{)} & \text{対数} & b=\log_a c.
\end{array}
\qquad (22.2)
$$

さてここにいい考えがある．これらの関係，あるいは規則といったものは，整数について成り立つものである．それは，これらは加法，乗法および冪乗の定義から導かれたものだからである．そこでこの考えというのは，**a や b や c であらわされているものの種別を拡張して，しかも上と同じ規則に従わせることはできないか**ということである．そして，そこでは $a+b$ 等というような手続が，例えば1を加えるとか，整数を続けてかけるとかいう直接的な方法では定義できなくてもかまわないとする．

22-3 抽象化と一般化

上に述べたような定義を使って簡単な代数方程式を解こうとしても，解けない問題にすぐにぶつかる．例えば次のようなものである．いま $b=3-5$ という方程式を解こうとしたとする．すなわち減法の定義によれば，これは5に加えれば3になるような数をさがせということである．しかし，我々は正の整数だけしか考えていないのだから，もちろんそんな数は**ない**というより他はない．つまりこれは解けない問題である．しかしここに名案がある．素晴らしいアイデアがあるというのは，**抽象化と一般化**に他ならない．規則と整数とからなる代数学の全構成のなかから，加法と乗法に関するいちばんはじめの定義を抽象する．しかしこのとき(22.1)と(22.2)の規則はそのまま残しておく．これらの規則はもともとは特定の種別の数に対して定義されたものであるけれども，それがより広い種別の数に対しても**一般的**に成り立つものと仮定する．つまり，規則を定義するために整数を記号的に用いる代りに，むしろ規則そのものの方を使って記号を定義するのである．そうすれば，その記号がより一般的な種別の数をあらわすことになる．規則について考えるだけで，例えば $3-5=0-2$ であることを示すことができる．すなわち $0-1$，$0-2$，$0-3$，$0-4$ 等々という新しい一連の数を定義すれば，**すべての**減法を行なうことができることになる．これらの新しい数を負の整数と名付ける．そこで更に $a(b+c)=ab+ac$ 等というような他のすべての規則を利用すれば，負の数の乗法の規則が求められる．このようにして，実際すべての規則は，負の整数に対しても正の整数のときと同じように適用できることがわかる．

このようなわけで，我々はこれらの規則があてはまるものの範囲を広げたことになる．しかし記号の持つ意味は変わっている．

例えば -2 かける5というのは，実際に5を続けて -2 回加えることを意味するとはいえない．こういっても何の意味もなさない．しかしそれにもかかわらず，これらの規則に従えば，万事うまくいくのである．

羃乗については面白い問題が一つある．いま $a^{(3-5)}$ が何を意味するかを知りたいとする．我々が知っているのは，$3-5$ は $(3-5)+5=3$ という問題の解であるということだけである．だから $a^{(3-5)}a^5=a^3$ ということがわかる．したがって除法の定義から $a^{(3-5)}=\dfrac{a^3}{a^5}$ となる．もう少しひねると，これを $\dfrac{1}{a^2}$ という形にすることができる．このようなわけで，負の羃乗は正の羃乗の逆数であることがわかる．しかし $\dfrac{1}{a^2}$ というのはいまのところ意味のない記号である．というのは，もし a が正か負の整数であればその自乗は1よりも大きく，我々はまだ1を1より大きい数で割ったものが何を意味するか知らないからである！

前へ進め！ 我々の遠大な計画は一般化の作業を推進することである；新しい解けない問題に遭遇したときには，いつでも数の種別を拡張するのである．除法を考えてみたまえ：3を5で割ったものに等し

いような整数はない．負の整数を考えてもだめである．しかし，すべての分数が例の規則を満足するものと仮定しさえすれば，分数をかけたり加えたりすることに意味が生まれ，前と同様にすべてうまくいくのである．

もう一つ羃乗の例をとってみよう：$a^{3/5}$ とは何のことであろうか？ $\left(\frac{3}{5}\right)5=3$ ということだけはわかっている．それが $\frac{3}{5}$ の定義である．だから $(a^{(3/5)})^5=a^{(3/5)5}=a^3$ ということになる．これは規則の一つに他ならない．そうすれば，開方の定義から $a^{(3/5)}=\sqrt[5]{a^3}$ ということがわかる．

このようにして，いろいろな記号に分数をあてはめるということの意味を定義することができる．その定義をきめるのには規則自体を利用しているのである——勝手にきめているのではない．すべての規則が分数にも正の整数にも負の整数にも成り立つということは素晴らしいことではないか！

一般化をさらに推し進めよう．解けない方程式はまだ他にもあるか？ ある．例えば次の方程式は解くことができない：$b=2^{1/2}=\sqrt{2}$．有理数(分数)でその自乗が2になる数はない．しかし今日の我々にとっては，この問題に答えることはわけない．我々は小数を知っているので，小数をどんどん続けていって2の平方根の近似の一つとするということの意味を理解するのに何の困難もない．しかし歴史的にみると，これはギリシャ人を非常に悩ました問題であった．ここでいおうとしていることを本当に**厳密に**定義するのには，連続と順序づけとに関することを少々つけ加えなければならないのであって，事実，ここのところこそが，一般化の過程のうちでもっとも難しい段階なのである．その形式を整理し，厳密なものにしたのはデデキントである．

しかし，数学的な厳密さはいま問題にしないとすれば，我々のやろうとすることの目的ははっきりいって次のことである．それは，求める値にだんだん近付いていくような一連の分数を求めることである．この分数は真正の分数である(なぜなら，どんな小数でもどこかで終りになっていれば，それは当然分数であらわすことができるからである)．いま我々が論じようとしていることに対してはこれで十分であって，この方法で無理数を取り扱うことができる．十分な手間をかければ，2の平方根というようなものも望みの精度で計算することができるのである．

22-4　無理数の近似

次は指数が無理数の場合はどうなるかという問題である．いま例えば $10^{\sqrt{2}}$ を定義したいとする．原理的にはその答は簡単である．2の平方根を適当な桁の小数で近似すれば，指数は有理数になる．そしてこの近似平方根を使えば，$10^{\sqrt{2}}$ の**近似値**を求めることができる．そこでもう少し小数の桁を増し(それでもやはり有理数である)，適当な根をとることができるが，今度は分数の分母が大きくなるので，はる

かに高次の根を求めることになり，また近似の度もよくなる．もちろん，この場合すごく高次の根を扱うことになるので，ことは非常に難しくなる．この問題はいったいどう処理したらよいのだろうか？

平方根や3乗根，その他の低次の根を計算するのには，小数の桁を次々に求めていく計算法もある．しかし，指数が無理数であるような数や，それにつれて出てくる対数(逆の問題)を計算するのには，非常に大きな手間が必要で，実用的な簡便な計算法はない．そこで，これらの羃数等を求めるために数表が作られている．これらの数表はその作り方によって，対数表あるいは羃数表と名付けられている．しかしこれは単に時間の節約の問題である；ある数を無理数乗しなければならないときに，それを計算する代りに，表から読みとることができるのである．もちろんこのような計算は，単にテクニック上の問題にすぎないのであるが，なかなか面白いし，また歴史的にも非常に重要である．まず第一に，$x=10^{\sqrt{2}}$ を解くという問題ばかりではなく $10^x=2$ あるいは $x=\log_{10}2$ を解くという問題も出てくるのである．しかしこの種の問題は，結果を得るために新しい種類の数を定義しなければならないというようなものではなくて，単なる計算上の問題である．答は単に無理数，すなわち無限に続く小数なのであって，これは別に新しい種類の数ではない．

さて，次にこのような方程式の解を求める計算法について述べる．全体としての考え方は実に簡単なものである．もし 10^1 と $10^{4/10}$ と $10^{1/100}$ と $10^{4/1000}$ などが計算できさえすれば，これらを掛け合わせれば $10^{1.414\cdots}$ すなわち $10^{\sqrt{2}}$ が得られる．これがこれからの全体的の考え方である．しかし，$10^{1/10}$ などを計算する代りに，$10^{1/2}$，$10^{1/4}$ などを計算することにする．ところでその前に説明しておかなければならないのは，ほかの数ではなくてなぜ特に10という数にばかりこんなにこだわるのかということである．さて，平方根などを求めるという問題からはなれても，対数表が実用上非常に便利なものであることはよくわかっている．それはどんな底数に対しても次のことが成り立つからである：

$$\log_b(ac)=\log_b a+\log_b c. \qquad (22.3)$$

対数表があれば，数をかけ合わせるのに，このことを実用的に利用できることはみなよく知っている．そこで残る問題は何を底数にして計算すべきかということである．しかし実は何を底数にしてもかまわないのである．同じ原理が常に使えるのである．いまある特定の底数による対数を使っているとすると，単にスケールを変えるだけで他のどんな底数による対数にでも移行できるのである；すなわちある係数をかけさえすれば，それでよいのである．(22.3)式に61をかけてもやはり式は正しいのである．またいま b を底数とする対数表があったとき，誰かが表全体の値に61をかけてしまったとしても，本質的な変りは何もないのである．さて，いま b を底数とする対数が，すべての数についてわかっているとしよう．いいかえれば，$b^a=c$ という式が c

のどんな値に対しても表から求められるものとしよう．そこで問題は，他の数を底数としたとき c の対数を求めることである．その底数を例えば x としよう．つまり，$x^{a'}=c$ を解きたいのであるが，これはわけない．それは常に $x=b^t$ と書くことができ，x と b がわかっていれば，t がきまるからである．すなわち $t=\log_b x$ である．そこでこのことを考えに入れて a' について式をたてると，$(b^t)^{a'}=b^{ta'}=c$ になる．いいかえれば，ta' は b を底数とする c の対数である．したがって $a'=\dfrac{a}{t}$ である．すなわち，x を底数とする対数は b を底数とする対数に $\dfrac{1}{t}$ という定数をかけたものだということである．したがって，どんな対数表でもそれに適当な定数をかければ，他の任意の対数表と同等なものになる．このときの定数は $\dfrac{1}{\log_b x}$ である．このことからわかるように，底数として何か一つの数を使えばよい．それで我々は便宜上 10 を底数とすることにしているのである(もっと自然な底数はないか，すなわちそれを底数とすることによって，ものごとがなにか簡単になるようなものがないかということが問題になる．それについての解答は後で求めることにして，今のところは 10 を底数として使っておく)．

表 22-1　10 からはじめた逐次平方根

冪 s	$1024s$	10^s	$(10^s-1)/s$	
1	1024	10.00000	9.00	
1/2	512	3.16228	4.32	
1/4	256	1.77828	3.113	
1/8	128	1.33352	2.668	
1/16	64	1.15478	2.476	
1/32	32	1.074607	2.3874	
1/64	16	1.036633	2.3445	
1/128	8	1.018152	2.3234	211
1/256	4	1.0090350	2.3130	104
1/512	2	1.0045073	2.3077	53
1/1024	1	1.0022511	2.3051	26
			↓	26
Δ/1024 ($\Delta\to 0$)	Δ	$1+0.0022486\Delta$ ←	—2.3025	

さて，ここで対数を求める計算法について考えてみよう．まず 10 の平方根から出発して，つぎつぎと逐次に平方根を求めることから始める．その結果を表 22-1 に示す．10 の肩にくる指数 s が最初の列に示してある．そして，10^s が 3 番目の列に示してある．例えば $10^1=10$ である．$10^{1/2}$ は 10 の平方根であるから，その値を求めるのはわけない．すべての数の平方根をとるのには簡単な方法があるからである*．この方法を使って，最初の平方根が 3.16228 であることがわかる．しかし，だからどうしたというのか？　これであることがわかったのだ．すなわち $10^{0.5}$ のとり方がわかったのだ．つまり我々は少なくとも対

*　平方根を求めるのには，きまった手続きがあるのだが，その中でいちばんやさしいのは次のとおりである．ある数 N の平方根に比較的近い数 a を適当にえらんで，N/a を求め，a と N/a とを平均して $a'=1/2[a+(N/a)]$ とし，この平均値 a' を次の段階の a とするのである．収束は非常に速い――有効数字の数は毎回 2 倍になる．

数を**一つ**知ったことになる．たまたま 3.16228 の対数は何かというようなときには，それは 0.50000 に近い値なのである．しかし我々はこれよりもう少しましなことをやらなければならない；これだけでは不十分である．そこでもう一度平方根をとると，$10^{1/4}$ がわかり，1.77828 が得られる．これで前よりも多く数の対数が得られたわけである．例えば 1.250 が 17.78 の対数であるということである．またもしも，だれかがたまたま $10^{0.75}$ を知りたいというならば，それも求められる．というのは，それは $10^{(0.5+0.25)}$ であり，したがって 2 番目の数と 3 番目の数の積だからである．もし s の欄に数をたくさんならべて，ほとんどどんな数字でもあるくらいにすれば，第 3 欄の数を適当にかけあわせて 10 のどんな羃数の値でも求めることができる；これがこれからやろうとすることである．そこでまず 10 の平方根，その平方根，そのまた平方根等を逐次に 10 回求める．これがこれからの計算作業の大部分である．

なぜ精度をもっとあげていかないかといえば，それはちょっと気がついたことがあるからである．それは 10 の非常に小さな羃乗を求めると，1 に小さな数を加えたものになるということである．その理由は明瞭である．例えば $10^{1/1000}$ を 1000 乗しなければ 10 にならないのだから，そのためにはあまり大きな数から始めたのではだめだからである；1 に近い値でなければならないのである．そこで気がついたことというのは，この 1 に加えられる小さい数というのが，その度毎に半分半分となっているようだということである；表をみると，1815 が 903 となり，450 となり，225 となっていることからわかる．したがって，その次の平方根をとると，かなりよい近似で 1.00112 なにがしという値が得られるに違いない．そして最後には，実際に平方根を**計算**しないで**推定**するのである．Δ がだんだん小さくなって，ゼロに近付いたとき，$\dfrac{\Delta}{1024}$ の答はどうなるであろうか？ 1 に加えるべき数は，もちろん 0.0022511Δ に近いだろう．しかし正確には 0.0022511Δ にならない．——次のような手を使うと，もっといい値が得られる：まず 1 を引いて，それから指数 s でそれを割る．こうすると余分の部分が補正されてある同一の値になるはずである．表をみるとたしかにそうなっている．$\dfrac{10^s-1}{s}$ の値は，表の上の方では等しくはないが，下の方にくるにしたがって，ある一定の値に次第に近付いている．この値は何であろうか？ この数列がどのようになっているのか，s とともにどのように変化しているのか，もう一度みてみよう．その値の変化は，211, 104, 53, 26 というようになっている．明らかにこれらの変化は，進むにしたがってほぼ半分ずつになっている．したがってそれを続けていけば，その変化はおおよそ 13, 7, 3, 2, 1，すなわち 2 で割っていって結局全部の和が 26 になる．したがって，あと 26 だけ進めばよいことになる．そして，そのことから真の値は，2.3025 であることがわかる(実際には，後でわかるように**正確な**値は 2.3026 であるが，現実性を持たせるために，ここでは計算に何も変更を加えないことにす

る)．この表から$\frac{1}{1024}$の冪乗を適当に合成することによって，10のどんな冪乗でも計算できる．

さてそこで実際に対数を計算してみよう．ここで使うのは，実際に対数表を作るのに用いられている方法なのである．その手順を表22-2に示し，数値を表22-1(第2欄と第3欄)に示す．

表22-2　$\log_{10} 2$ の計算

$$2 \div 1.77828 = 1.124682$$
$$1.124682 \div 1.074607 = 1.046598, \text{ 等々}$$
$$\therefore\quad 2 = (1.77828)(1.074607)(1.036633)(1.0090350)(1.000573)$$
$$= 10^{\left[\frac{1}{1024}(256+32+16+4+0.254)\right]} = 10^{\left[\frac{308.254}{1024}\right]}$$
$$= 10^{0.30103} \qquad \left(\frac{573}{2249} = 0.254\right)$$
$$\therefore\quad \log_{10} 2 = 0.30103$$

いま2の対数を求めるとしよう．これは10を何乗したら2になるかという答を求めることである．そこで10を$\frac{1}{2}$乗したらよいだろうか？　いや，それでは大きすぎる．要するに答は$\frac{1}{4}$より大きくて$\frac{1}{2}$より小さい．$10^{1/4}$を外に出す；すなわち2を1.778…で割る．そうすると，1.124が得られる．以下同様に続くわけであるが，これは求める対数から0.250000を除いたものである．次には1.124…という数の対数を求めなければならない．全部終わってから$\frac{1}{4}$，すなわち，$\frac{256}{1024}$をもとの値に加え戻す．次に表で1.124…のすぐ次の数をみると，1.074607である．したがって1.074607で割ると1.046598が得られる．このことから，2は，表22-1に示された数を下に示すようにかけあわせたものであることがわかる．

$$2 = (1.77828)(1.074607)(1.036633)(1.0090350)(1.000573).$$

1.000573の項は表からはみだしているので，当然のことながら残ってしまった．この項の対数を求めるためには，さっきの$10^{\Delta/1024} \approx 1 + \frac{2.3025\Delta}{1024}$という結果を使う．いまの場合には$\Delta = 0.254$である．よって答は10のつぎのような冪乗になる：$\frac{256+32+16+4+0.254}{1024}$．これらを加えると，$\frac{308.254}{1024}$となる．割算をすれば0.30103となるから，$\log_{10} 2 = 0.30103$であって，これは5桁までも正しい！

1620年に，ハリファックスのブリッグスがはじめて対数を計算したのが，この方法である．彼は“私は10からはじめて平方根を54回逐次に計算した”といっている．しかし彼は実際には最初の27回しか計算しなかったに違いない．というのは，あとの残りは，Δを使うこの手を利用して求めることができるからである．ブリッグスの計算は，10からはじめて，平方根を27回求めたわけだが，それは我々の10回にくらべてそれほど多くはない；しかしもっとずっとたいへんだったというのは，ブリッグスは小数点以下16桁まで計算しておいて，出版するときにそれを14桁にまで減らして，切上げや切捨ての誤差をなくすようにしたからである．彼はこのようにして14桁の対数表を作ったのであるが，これは全くあきあきするような仕事である．

しかしその後300年の間に出た対数表は，みなブリッグスの表から値を借りてきて，それを適当な桁に減らして作ったのである．新しい数表が独立して作られるようになったのは，やっとこのごろのことで，WPA* や計算機のおかげである．今日では，ある種の級数展開を利用した，はるかに効率のよい対数の計算法がある．

上述の方法で，我々はちょっと面白いことをみつけた．それは指数 ε が非常に小さいときには 10^{ε} を計算するのはわけないということである；数値解析だけから $10^{\varepsilon}=1+2.3025\varepsilon$ であることをみつけた．n が非常に小さければ $10^{n/2.3025}=1+n$ であるといっても，もちろん同じことである．さて，どんな数を底数とする対数も，10を底数とする対数に一定の数をかけたものに過ぎない．10を底数として使ったのは，たまたま我々の指が10本であって，またその算術もやさしいからである．しかし数学的にみてもっと自然な数，すなわち人類の指の数などとは無関係な数を底数にしようとするならば，対数の**スケール**をかえて便利なそして自然なようなものにするということが考えられる．そうして選ばれた方法は，10を底数とする全ての対数に 2.3025… を掛けて新しい対数をつくりなおすというのである．これは，何か他の底数を使うということであって，それを**自然**底数，あるいは底数 e と名付ける．$\log_e(1+n)\approx n$，いいかえれば，$n\to 0$ のとき $e^n\approx 1+n$ であることに注意したまえ．

e を求めるのはわけない：$e=10^{1/2.3025}$ すなわち $10^{0.434294\cdots}$ であって，これは無理数冪である．10からはじめた逐次平方根の表からは，対数だけではなく，10の何乗でも計算することができるから，これを使って自然底数 e を計算してみよう．便宜上，0.434294… を $\dfrac{444.73}{1024}$ とする．さて 444.73 は 256+128+32+16+2+0.73 である．これは冪数の和であるから，e は次の積である．

$$(1.77828)(1.33352)(1.074607)(1.036633)(1.018152)(1.009035)(1.001643) = 2.7184.$$

(一つだけ困るのは最後の値 0.73 で，これは表にない．しかし Δ が十分小さければそれは $1+2.3025\,\Delta$ となることがすでにわかっている.)これらの数をすべてかけ合わせると 2.7184 となる．(本当は 2.7183 でなければならないのだが，まあこれで十分である.) というわけで，無理数冪や無理数の対数を計算するのに，すべてこのような方法が使われるのである．これで無理数が片づく．

22-5 複 素 数

さて，これだけやっても，**まだ**すべての方程式が解けるというわけではないのである！ いま $x^2=-1$ を解かなければならないとしよう．有理数，無理数など，いままで我々の知っているもののの**どれを**自乗し

---

* 事業計画局，Work Progress Administration(アメリカの不況対策政策の一つとして，1935年につくられた機関)(訳者注)．

ても −1 になるものはない．そこでまた我々は数を一般化して，より広いものにしなければならない．そこで $x^2=-1$ の解の一つに何か名前をつけることにして，i とよぶことにしよう．i は定義によって，その自乗が −1 であるという性質をもっている．これがいいたいことのほとんどすべてである；ところで方程式 $x^2=-1$ にはもちろんまだ他にも根がある．それを i と書く人がいるかもしれないが，また他の者は“いや僕は $-i$ の方がいい．僕の i は君の i のマイナスだ”というかもしれない．いずれにしろ，これもまた同様に**りっぱな解である**．i の定義は $i^2=-1$ ということだけなのであるから，どんな方程式も，その i の符号すべてを反対にしてもやはり同様に成立する．このことを**共役**複素数をとるという．

さて，そこで我々のもっているすべての規則に従って i を順次加えたり，i に数をかけたり，また他の数を加えたりなどして数を作りあげていこうというのである．こうやってみると，すべての数は $p+iq$ という形に書けることがわかる．ただし，ここで p と q はいわゆる**実数**，すなわちいままでに定義してきたような数である．i という数を**単位虚数**と名付ける．i を実数倍したものを**純虚数**という．もっとも一般的な数 a は，$p+iq$ といった形で，**複素数**と名付ける．こういう数を二つ，例えば $(r+is)(p+iq)$ というようにかけ合わせても事態は別に悪化しない．$ii=i^2=-1$ であるから，この例の場合には規則に従って，次のようになる．

$$\begin{aligned}(r+is)(p+iq)&=rp+r(iq)+(is)p+(is)(iq)\\&=rp+i(rq)+i(sp)+(ii)(sq)\\&=(rp-sq)+i(rq+sp).\end{aligned}\qquad(22.4)$$

というわけで，こんど(22.1)の規則に従う数はすべて $p+iq$ という形になる．

“この調子でいったらきりがないじゃないか？　いま虚数の冪乗やその他の数を定義したのだけれど，それが一段落ついたところでまた誰かが $x^6+3x^2=-2$ というような解けない問題を持ちこんでくるかも知れない．そうしたらまたはじめから一般化をやり直さなければならないではないか！”と諸君はいうかもしれない．ところが −1 の平方根という**このたった一つの発明のおかげで，すべての代数方程式は解けるようになったのである！**　これはすばらしいことであるが，その証明は数学科の講義に任せる．証明は非常に見事で面白いのだが，とても自明とはいかない．実は，ちょっと考えると，こういう発明を次から次へ，次から次へと続けていかなければならないだろうと予想される．ところが世にも不思議なことにそうではないのである．発明はこれで終りである．いったん，この複素数を発明したあとは，いままでに述べたいろいろの規則はこの複素数についてもそのまま有効であることがわかるので，新しい数を発明することは，もうこれでおしまいである．どんな複素数でも，その複素数乗を求めることもできるし，またどんな代数方程式でも有限個の記号で解くことができる．別

に新しい数は入ってこないのである．例えば i の平方根もちゃんと答がきまるのであって，新しいものではない．i^i もある値になる．次にそのことを述べる．

かけ算についてはすでに述べたが，たし算もまた簡単である；二つの複素数を加えると $(p+iq)+(r+is)$ となり，答は $(p+r)+i(q+s)$ である．というわけで，複素数のたし算とかけ算ができる．しかし本当に難しい問題はもちろん**複素数の複素数乗**を計算することである．ところが，この問題の難しさは実際には実数の複素数乗を求めるのと同じようなものである．そこで10の複素数乗を計算する問題を考えよう．単なる無理数乗ということではなく $10^{(r+is)}$ ということである．もちろん(22.1)と(22.2)の規則には，常に従わなければならない．したがって，

$$10^{(r+is)}=10^r10^{is} \tag{22.5}$$

である．ところが，10^r の計算法はもうわかっているし，また常に何に何をかけてもよいのであるから，問題は 10^{is} を計算することだけである．その値をある複素数 $x+iy$ であるとしよう．問題：s が与えられたとき x を求めよ，y を求めよ．さて，もし

$$10^{is}=x+iy$$

であるならば，この方程式の共役複素方程式もまた成り立たなければならないから

$$10^{-is}=x-iy.$$

(このように，実際には何も計算しないでも規則を利用するだけでいろいろなことを推論することができるのである.) $x+iy$ と $x-iy$ の積をとるともう一つの重要な事柄が導かれる：

$$10^{is}10^{-is}=10^0=1=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2. \tag{22.6}$$

だから，もしも x が求まれば，y も求まる．

さてそこで問題は，10の虚数乗を計算するには**どうすればよいか**ということである．どんな方針でやればよいだろうか？ これまでに述べたいろいろの規則をいじりまわして，いけるところまでいくという手もあろう．しかしここに一つ，割合うまいやり方がある：それは，もしある特定の s についての計算ができれば，他のすべての場合についてもできるということである．もしある一つの s についての 10^{is} がわかっていて，10^{2is} を求めようというならば，自乗すればよい，等々．しかし，たとえある特定の s であるにしても，10^{is} を求めるにはどうすればよいだろうか？ そのためにもう一つ仮定を追加する．この仮定はこれまでの他の規則と同じ種類だとはいえないが，それによって妥当な結果が得られるし，さらに先に進むのに役に立つ：それは羃数が小さいときには，$10^\varepsilon=1+2.3025\varepsilon$ という“法則”が成り立つということ，しかもそれは，ε が実数の場合だけではなく，**複素数の場合にも同様に成り立つ**ということである．すなわちこの法則が一般に正しいという仮定から出発する．これは $s\to0$ のとき $10^{is}=1+2.3025is$ ということである．こういうわけで，1にくらべて s が非常に小さいと

き，例えば $\frac{1}{1024}$ のようなときには，10^{is} の比較的よい近似が得られるのである．

そこで表を作って，それを使って10のあらゆる虚数乗が計算できるようにする．すなわち x と y を計算することができるようにする．それは次のようにやればよい．羃数はまず $\frac{1}{1024}$ からはじめるが，これは $1+\frac{2.3025i}{1024}$ に非常に近いと考えられる．そこで

$$10^{i/1024}=1.00000+0.0022486i \qquad (22.7)$$

から始めて，この数にそれ自体を逐次かけてゆくと，より高次の虚数羃の値を求めることができる．つまり，前に対数表を作るときに使った方法を逆にして，(22.7)の自乗，4乗，8乗等を計算して，表22-3に示したような一連の値を作りあげることができるのである．この表から面白いことに気がつく．それは x がはじめは正であるが，あとで負に変わるということである．このことについては，すぐ後でもう少しふれる．まず我々は s という数が何であったら，10^{is} の実数部分がゼロになるのか知りたいものである．このとき y の値は1になるはずだから $10^{is}=i$ あるいは $is=\log_{10}i$ となる．この表の使い方の一例として，前に $\log_{10}2$ を計算したときと同じようにして，表22-3から $\log_{10}i$ を求めてみよう．

表 22-3
$10^{i/1024}=1+0.0022486i$
からはじめた逐次自乗

羃 is	1024s	10^{is}
$i/1024$	1	1.00000+0.00225i*
$i/512$	2	1.00000+0.00450i
$i/256$	4	0.99996+0.00900i
$i/128$	8	0.99984+0.01800i
$i/64$	16	0.99936+0.03599i
$i/32$	32	0.99742+0.07193i
$i/16$	64	0.98967+0.14349i
$i/8$	128	0.95885+0.28402i
$i/4$	256	0.83872+0.54467i
$i/2$	512	0.40679+0.91365i
$i/1$	1024	−0.66928+0.74332i

* ほんとうは 0.0022486i

純粋な虚数を得るためには，表22-3のどの数とどの数とをとって，その積をとればよいであろうか？ 少しばかり試行錯誤を繰り返してみるとわかるように，x をできるだけたくさん減らすには，"512" に "128" をかけるのがいちばんよい．こうすると $0.13056+0.99144i$ になる．さてここで，この0.13056という実数部分をなくせばよいのであるが，そのためにはそれと大きさのほぼ等しい虚数部分をもった数をかければよいのである．ところで "64" の y の値は0.14349で0.13056にいちばん近いから，この数をえらぶと，$-0.01350+0.99993i$ が得られる．こんどは行きすぎてしまったので，$0.99996+0.00900i$ で**割ら**なければならない．それにはどうすればよいか？ i の符号を変えて，$0.99996-0.00900i$ をかければよい（これは $x^2+y^2=1$ であるとうまくいく）．このような方法を続けると，その値が i になるようにするのに必要な10の乗数は，$\frac{i(512+128+64-4-2+0.20)}{1024}$，すなわち $\frac{698.20i}{1024}$ であることがわかる．10をこの数乗すると i が得られるのである．したがって $\log_{10}i=0.668226i$ である．

22-6　指数が虚数の場合

虚数乗の問題をさらに調べるために，10の羃を毎回2倍にしていくのではなく，**一つずつ**求めて，表22-3の値をさらに続けていって，負の符号にどんなことが起こるかみてみよう．これを表22-4に示した．ここでは $10^{i/8}$ をとり，それをずっとかけていく．x は減少していってゼロを通り，ほとんど -1 のところまでいき（$p=10$ と $p=11$ の間の値が求められれば，あきらかに -1 までいく），そしてまたもとの方にもどる．y の値も同様に振動的である．

図 22-1 に点であらわしたのは，表 22-4 の数値である．線は見やすいように引いたものである．こうして，x と y が振動することがわかる；10^{is} はそれ自身を**繰り返し**，**周期的**なものである．そのこと自体は簡単に説明できる．というのは，もしある羃乗が i であれば，その 4 乗は i^2 の**自乗**であるからである．すなわちまた $+1$ になるのである．したがって $10^{0.68i}$ が i に等しいから，その 4 乗をとれば $10^{2.72i}$ が $+1$ に等しいことがわかる．したがって例えば $10^{3.00i}$ を求めたいときには，$10^{2.72i}$ かける $10^{0.28i}$ と書くことができる．いいかえればそれは周期を持ち，繰り返すのである．ここで我々はもちろん，この曲線が何かに似ていることに気がつく！　曲線はサインとコサインに似ているので，しばらくの間はこれらを代数的なサインおよび代数的なコサインと呼ぶことにする．しかし，底数を 10 としないで，自然底数を使うことにする．これは水平軸の目盛を変えるだけである；そこで $2.3025s$ を t であらわし，$10^{is}=e^{it}$ と書く．ただし t は実数である．$e^{it}=x+iy$ であるから，これを t の代数的なコサインたす代数的サインに i をかけたものという和の形に書く．すなわち

$$e^{it}=\underline{\cos}\,t+i\,\underline{\sin}\,t. \qquad (22.8)$$

$\underline{\cos}\,t$ と $\underline{\sin}\,t$ はどんな性質を持っているか？　例えば，まず x^2+y^2 は 1 でなければならないことがわかっている；このことは前にすでに証明したものであり，底数が e のときでも底数が 10 であったときと同様に正しい．というわけで，$\underline{\cos}^2\,t+\underline{\sin}^2\,t=1$ である．また t が小さいときには $e^{it}=1+it$ である．したがって $\underline{\cos}\,t$ はほとんど 1 であり，$\underline{\sin}\,t$ は t に近い数である．このような具合に続くのであるが，虚数乗をとることによって入ってくる**これらの素晴らしい関数のいろいろの性質は，すべて三角関数のサインおよびコサインの性質と同じものであることがわかる**．

表 22-4
$10^{i/8}$ からはじめた累乗

p＝羃·8/i	$10^{ip/8}$
0	$1.00000+0.00000i$
1	$0.95882+0.28402i$
2	$0.83867+0.54465i$
3	$0.64944+0.76042i$
4	$0.40672+0.91356i$
5	$0.13050+0.99146i$
6	$-0.15647+0.98770i$
7	$-0.43055+0.90260i$
8	$-0.66917+0.74315i$
9	$-0.85268+0.52249i$
10	$-0.96596+0.25880i$
11	$-0.99969-0.02620i$
12	$-0.95104-0.30905i$
14	$-0.62928-0.77717i$
16	$-0.10447-0.99453i$
18	$+0.45454-0.89098i$
20	$+0.86648-0.49967i$
22	$+0.99884+0.05287i$
24	$+0.80890+0.58836i$

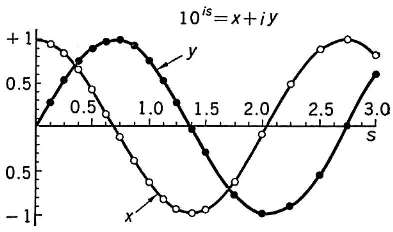


図 22-1

周期も同じであろうか？　しらべてみよう．e の何乗が i になるのか？　e を底数としたときの i の対数は何か？　これは前にやったのであって，底数が 10 のときには $0.68226i$ であったのだが，対数の目盛を e に変えたのだから，それに 2.3025 をかけねばならないが，そうすると 1.5709 となる．そこでこれを“代数的な $\frac{\pi}{2}$”と呼ぶことにする．しかしみればわかるように，これが通常の $\frac{\pi}{2}$ と最後の桁で 1 だけしか違わない．これはいうまでもなく算術の誤差からきているのである！　こうして全く代数的な方法で二つの新しい関数を作り出したのである．そしてこのコサインとサインは代数に属するのであり，そして代数のみに属するのである．そしてその関数も作り出した後，目がさめてみたらそれらの関数が，幾何学で自然に得られたものと同じであることを発見したのである．というわけで，究極的にいって代数と幾何との間には関連があるのである．

数学における最も素晴らしいこの公式で，我々の結びとする：

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta. \qquad (22.9)$$

これは我々の至宝である．

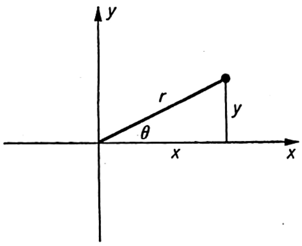


図 22-2　$x+iy=re^{i\theta}$

複素数を平面内にあらわせば，幾何学を代数学に関連づけることができる；ある点の水平方向の位置が x であり，上下方向の位置が y である(図 22-2)．こうやって，すべての複素数 $x+iy$ をあらわすのである．原点からこの点までの半径を r とし，その角度を θ とするならば，代数の公式によって $x+iy$ は $re^{i\theta}$ と書ける．x, y, r および θ の幾何学的な関係は図に示した．これが代数学と幾何学の一元化である．

この章をはじめたときには，整数と数の数え方という基本的な考え方だけが武器であって，抽象化とか一般化とかいう方法の威力についてあまり認識をもっていなかった．一組の代数的な“規則”あるいは数の性質である方程式(22.1)と逆演算の定義(22.2)を用いることによって，ここに数ばかりでなく対数表，羃乗表および三角関数というような有用なものまで作り出すことができたのであり(というのは，これらが実数の虚数乗と同じものだからである)，しかもそれはすべて単に 10 の平方根を逐次 10 回とることだけから得られたのである！

第 23 章
共　　鳴

23-1　複素数と調和振動

この章でもひき続いて調和振動について述べるが，とくに，新しい解析法を使って強制調和振動を取り扱う．前の章で複素数の考えを導入した．複素数は，実数部分と虚数部分とからなり，縦軸は虚数部分を，また横軸は実数部分を示す図に，あらわすことができる．もしも a が複素数であれば $a=a_r+ia_i$ と書くことができる．添字 r は a の実数部分を，添字 i は a の虚数部分を意味する．図 23-1 からわかるように，ある複素数 $a=x+iy$ を $x+iy=re^{i\theta}$ とかくこともできる．ここで $r^2=x^2+y^2=(x+iy)(x-iy)=aa^*$ である(a^* は a の共役複素数で，これは a の中の i の符号を変えたものである)．そこで，複素数をあらわすのに二つの方法がある．すなわち，一つは実数部分たす虚数部分という形であり，もう一つは絶対値 r といわゆる偏角 θ とを使う形，そのいずれかである．r と θ とが与えられれば，x と y とは，明らかに $r\cos\theta$ と $r\sin\theta$ とである．また逆に，複素数 $x+iy$ が与えられれば $r=\sqrt{x^2+y^2}$ であり，また $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ で，これはすなわち虚数部分と実数部分の比である．

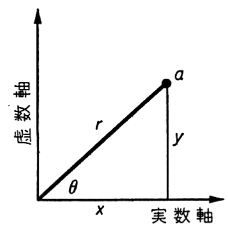


図 23-1　複素数は“複素平面”の 1 点によってあらわされる

そこで複素数を物理現象の解析に適用するときに，我々は次のような細工をするのである．振動するものの例は幾つもある；そしてそれには，ある定数に $\cos\omega t$ をかけた形の強制力がはたらいていることもありうる．さて，このような力 $F=F_0\cos\omega t$ は，複素数 $F=F_0e^{i\omega t}$ の実数部分であるということができる．それは $e^{i\omega t}=\cos\omega t+i\sin\omega t$ だからである．このようにするのは，コサインよりも指数関数の方が取り扱いやすいからである．つまり我々の細工というのは，振動関数を適当な複素関数の実数部分であらわすということにつきる．力というものは実際，複素数ではないのだから，このように定義した複素数 F は，実際の物理的な力ではない．実際の力には虚数部分などはなく，実数部分があるだけである．それにもかかわらず，我々は“力” $F_0e^{i\omega t}$ について論ずるのである．もちろん実際の力はこの表現の**実数部分**である．

もう一つ別の例をとろう．いま位相の遅れが $\varDelta$ であるようなコサイン波の力を表現しようとする．これはもちろん $F_0e^{i(\omega t-\varDelta)}$ の実数部分であるが，指数関数の形はそのまま残すとして $e^{i(\omega t-\varDelta)}=e^{i\omega t}e^{-i\varDelta}$ と書くことができる．このことから指数関数の演算はサインやコサインの演算よりもずっと簡単であることがわかる；これが指数関数を使うこ

とにした理由である．我々はこれからしばしば

$$F = F_0 e^{-i\Delta} e^{i\omega t} = \hat{F} e^{i\omega t} \tag{23.1}$$

という書き方をする．＾というしるしは，F が複素数であることを忘れないためである．この複素数は

$$\hat{F} = F_0 e^{-i\Delta}$$

である．

さて複素数を使って方程式を解いて，実際問題をうまく取り扱うことができるかどうかをみてみよう．例えば，

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{kx}{m}=\frac{F}{m}=\frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{23.2}$$

を解いてみよう．ただし F は振動子を動かす力で，x は変位である．ここでちょっとおかしく思えるかもしれないが，数学的な目的だけのために，x と F が実際に複素数であると仮定しよう．すなわち x は実数部分と i のかかった虚数部分とからなり，また F も実数部分と i のかかった虚数部分とからなると考える．(23.2)式の複素数解があったとして，この複素数をこの方程式に代入すると

$$\frac{d^2(x_r+ix_i)}{dt^2}+\frac{k(x_r+ix_i)}{m}=\frac{F_r+iF_i}{m},$$

すなわち

$$\frac{d^2x_r}{dt^2}+\frac{kx_r}{m}+i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}+\frac{kx_i}{m}\right)=\frac{F_r}{m}+\frac{iF_i}{m}$$

が得られる．さて，二つの複素数が等しければ，それらの実数部分は等しくなければならないし，また虚数部分も等しくなければならないから，**x の実数部分は力の実数部分に対する方程式を満足する**ということになる．しかし，ここで強調しておかなければならないのは，このように実数部分と虚数部分とへ分離するということは，必ずしも一般には**可能ではない**ということである．できるのは，方程式が**線型**の場合，すなわち各項にあらわれる x が1次あるいはゼロ次のものだけであるような方程式に限るのである．例えば，方程式の中に λx^2 という項があったとすると，x_r+ix_i を代入すると $\lambda(x_r+ix_i)^2$ が得られるが，これを実数部分と虚数部分にわけると，実数部分は $\lambda(x_r{}^2-x_i{}^2)$ となり，虚数部分は $2i\lambda x_r x_i$ となる．それでこの方程式の実数部分に入ってくるのは $\lambda x_r{}^2$ だけでなく，$-\lambda x_i{}^2$ も入ってくる．この場合，我々の解きたいと思っていたものとはまったく別な方程式になってしまい，そこには解析にあたってまったく人為的に導入した x_i が混入してくるのである．

さてここで，すでにその解のわかっている強制振動の問題をとって，それに我々の新しい方法を試みてみよう．前と同様に方程式(23.2)を解きたいのであるが，こんどは $\hat{F}e^{i\omega t}$ を複素数として，

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{kx}{m}=\frac{\hat{F}e^{i\omega t}}{m} \tag{23.3}$$

という方程式を解くのだとする．もちろん x も複素数になるであろう

が，実際に起こっている現象を知るためには，実数部分をとるという法則を忘れてはならない．とにかく強制振動に対する(23.3)を解くのである．他の解については後で述べる．強制振動の振動数は，加えられる力の振動数と同じであって，またある振幅とある位相とをもっている．だからそれは適当な複素数 $\hat{x}$ であらわされ，その絶対値は x の振れの大きさをあらわし，その位相は力の場合と同様に時間の遅れを表わす．さて指数関数の素晴らしい特長の一つは，$\dfrac{d(\hat{x}e^{i\omega t})}{dt}=i\omega\hat{x}e^{i\omega t}$ ということである．指数関数を微分するときには，指数を単なる乗数として肩からおろせばよい．2次導関数も同様で，もう一つ $i\omega$ をおろす．したがってちょっとみただけで，すぐに $\hat{x}$ に関する方程式を書きおろすことができる：微分があるごとに，単に $i\omega$ をかければよい．(いまや微分はかけ算と同じようにやさしい！　線型微分方程式に指数関数を使うというこの思いつきは，かけ算をたし算でおきかえるという対数の発明と同じぐらい大したものである．ここでは微分がかけ算でおきかえられる．) したがって，方程式は

$$(i\omega)^2\hat{x}+\left(\frac{k\hat{x}}{m}\right)=\frac{\hat{F}}{m} \tag{23.4}$$

となる．(共通因子 $e^{i\omega t}$ は約した.) 実に簡単ではないか！　微分方程式を一見するだけで，ただちに，より代数的な方程式に変換されたのである；そこで見ただけで解がわかったようだ．すなわち $(i\omega)^2=-\omega^2$ であるから

$$\hat{x}=\frac{\hat{F}/m}{(k/m)-\omega^2}$$

である．これに $\dfrac{k}{m}=\omega_0{}^2$ を代入すると，少し簡単になって

$$\hat{x}=\frac{\hat{F}}{m(\omega_0{}^2-\omega^2)} \tag{23.5}$$

となる．これはもちろん我々が前に得た解と同じである；というのは $m(\omega_0{}^2-\omega^2)$ は実数であるから，前の看板にいつわりはなく，$\hat{F}$ と $\hat{x}$ との位相角は等しい(もしも $\omega^2>\omega_0{}^2$ であれば $180°$ はなれている)．どれだけ大きく振れるかということを示す $\hat{x}$ の大きさは，$\hat{F}$ の大きさの $\dfrac{1}{m(\omega_0{}^2-\omega^2)}$ 倍であって，この因子は ω と ω_0 とがほとんど等しくなると非常に大きくなる．したがって適当な振動数 ω を加えると，応答が非常に大きくなる(振子の紐の端を持って，それをちょうど適当な振動数でゆすると，非常に大きく振らせることができる)．

23–2　減衰のある強制振動

いままでに述べたのが，振動をよりエレガントな数学的手法で取り扱う方法である．しかし，この方法がエレガントであるということは，他の方法でも簡単に解けるような問題では本当に生きてはこない．それはもっと難しい問題に適用したときに，はじめて生きてくるのである．そこで別のもっと難しい問題を解くことにしよう．この問題は難しいというだけではなく，前の問題に，比較的現実的な点をさらにつ

け加えたものである．方程式(23.5)によれば，もしも振動数 ω と ω_0 とがまったく等しければ，応答が無限大になる．もちろん実際にはそのような無限大の応答は起こらない．それは，いままで無視していた他のなんらかのことがら，例えば摩擦のようなものが入ってきて，応答を制限するからである．したがって方程式(23.2)に摩擦項を付け加えてみよう．

一般には摩擦の性質や複雑さとかのために，こういう問題は非常に難しい．しかし摩擦の力が，その物体が動く**速さに比例**するという場合が少なくない．このような摩擦の例は，油あるいはどろどろした液体の中を物体がゆっくりと動く場合の摩擦である．それがじっとしているときは何も力がはたらかないが，それが速く動けば動くほど，油はその物体の横を速く通らなければならないから，したがって摩擦も大きくなる．そこで(23.2)式の諸項の他に，もう一つの項，すなわち速度に比例した抵抗力：$F_f=-\dfrac{cdx}{dt}$ があると仮定しよう．これからの取扱いでは定数 c を m と γ との積であらわすと方程式が少し簡単になって好都合である．これは k を $m\omega_0{}^2$ でおきかえて，勘定を簡単にしたのと同じ手法である．結局，我々の方程式は

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)+c\left(\frac{dx}{dt}\right)+kx=F, \tag{23.6}$$

あるいは $c=m\gamma$，$k=m\omega_0{}^2$ とおき，両辺を質量 m で割って，

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\gamma\left(\frac{dx}{dt}\right)+\omega_0{}^2x=\frac{F}{m} \tag{23.6a}$$

となる．

これで方程式は解くのに最も都合のよい形になった．γ が非常に小さければ，それは摩擦が少ないことを表わす；また γ が非常に大きければ，たいへんな摩擦がある．この新しい線型微分方程式は，どうやって解いたらよいか？　駆動力は $F_0\cos(\omega t+\Delta)$ であるとする；これを(23.6a)に代入して解いてみてもいいが，ここでは新しい方法で解いてみよう．そこで F が $\hat{F}e^{i\omega t}$ の実数部分であり，x が $\hat{x}e^{i\omega t}$ の実数部分であるとして，これらを方程式(23.6a)に代入する．この場合，実際に代入してみる必要さえない，というのは，みただけで方程式は次のようになることがわかるからである．

$$[(i\omega)^2\hat{x}+\gamma(i\omega)\hat{x}+\omega_0{}^2\hat{x}]e^{i\omega t}=\left(\frac{\hat{F}}{m}\right)e^{i\omega t}. \tag{23.7}$$

(事実，もし方程式(23.6a)を旧式の直接的な方法で解いてみようとしたならば，我々は“複素数法”の魔術に心から感謝するであろう.) 両辺を $e^{i\omega t}$ でわると，与えられた力 $\hat{F}$ に対する応答 $\hat{x}$ が求められる；それは

$$\hat{x}=\frac{\hat{F}}{m(\omega_0{}^2-\omega^2+i\gamma\omega)} \tag{23.8}$$

である．

このようなわけで，ここでもまた $\hat{x}$ は $\hat{F}$ にある係数をかけたものと

して与えられた．この係数にはとくに術語もないし，また特別な文字もきまっていないが，ここでは話を進めていく都合から，それをRとすることにしてもよかろう：

$$R=\frac{1}{m(\omega_0{}^2-\omega^2+i\gamma\omega)},$$

そして

$$\hat{x}=\hat{F}R. \tag{23.9}$$

(γとω_0という文字は非常によく使われるが，このRには何も特別な名前はない.) この係数Rは$p+iq$とも書けるし，あるいはまたある大きさρと$e^{i\theta}$との積の形にも書ける．後者のように積の形に書かれたとき，それが何を意味するかを考えてみよう．さて，$\hat{F}=F_0e^{i\Delta}$で，実際の力Fは$F_0e^{i\Delta}e^{i\omega t}$の実数部分，すなわち$F_0\cos(\omega t+\Delta)$である．次に方程式(23.9)によれば，$\hat{x}$は$\hat{F}R$に等しい．そこで$R=\rho e^{i\theta}$の$R$を別の書き方をすると，次のようになる．

$$\hat{x}=R\hat{F}=\rho e^{i\theta}F_0e^{i\Delta}=\rho F_0e^{i(\theta+\Delta)}.$$

最後に，さらにさかのぼって，物理的な意味をもったx，すなわち複素数$\hat{x}$の実数部分は，$\rho F_0e^{i(\theta+\Delta)}e^{i\omega t}$の実数部分に等しい．ところが$\rho$と$F_0$とは実数であるから，$e^{i(\theta+\Delta+\omega t)}$の実数部分は単に$\cos(\omega t+\Delta+\theta)$である．したがって

$$x=\rho F_0\cos(\omega t+\Delta+\theta). \tag{23.10}$$

このことからわかるように，応答の振幅は，力Fの大きさにある倍率係数ρをかけたものである．これから振動の"大きさ"がわかる．しかし，またxは位相Δの力と位相がちがい，更にθだけずれていることを示している．このように，ρとθとはそれぞれ応答の大きさと応答の位相のずれをあらわしている．

さてρが何であるかを求めよう．ここに一つの複素数があるとすると，その絶対値の自乗は，この複素数にその共役複素数をかけたものである：すなわち

$$\begin{aligned}\rho^2&=\frac{1}{m^2(\omega_0{}^2-\omega^2+i\gamma\omega)(\omega_0{}^2-\omega^2-i\gamma\omega)}\\&=\frac{1}{m^2[(\omega_0{}^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2]}\end{aligned} \tag{23.11}$$

である．

位相角を求めるのは簡単である．というのは

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{\rho e^{i\theta}}=\left(\frac{1}{\rho}\right)e^{-i\theta}=m(\omega_0{}^2-\omega^2+i\gamma\omega)$$

と書くと，

$$\tan\theta=-\frac{\gamma\omega}{\omega_0{}^2-\omega^2} \tag{23.12}$$

となるからである．これがマイナスになるのは$\tan(-\theta)=-\tan\theta$だからである．すべての$\omega$に対して$\theta$は負になるが，これは変位$x$が力$F$よりもおくれていることに相当する．

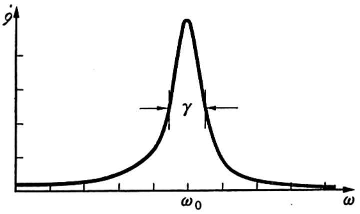


図 23-2　ρ^2 対 ω の関係

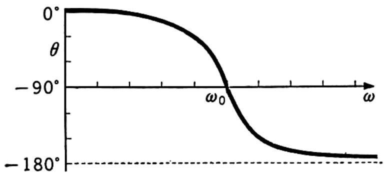


図 23-3　θ 対 ω の関係

図 23-2 は，ρ^2 が振動数の関数としてどう変わるかをあらわしたものである(物理的には，ρ^2 の方が ρ よりも興味がある．というのは ρ^2 は振幅の自乗に比例し，それはいいかえれば力によって生じた振動の**エネルギー**に比例しているといっていいからである)．γ が非常に小さいと，$\dfrac{1}{(\omega_0{}^2-\omega^2)^2}$ がいちばん重要な項となって，ω が ω_0 に等しいと応答は無限大になろうとする．しかしこの“無限大”は実際には無限大ではない．何故かというと，たとえ $\omega=\omega_0$ であるとしても，まだ $\dfrac{1}{\gamma^2\omega^2}$ が残っているからである．位相のずれは図 23-3 に示したように変化する．

場合によっては，方程式(23.8)と少し違った公式になることもあるが，これもやはり“共鳴”公式とよばれる．それは別の現象をあらわすのではないかと思うかもしれないが，そうではない．そのわけはこうである．もしも γ が非常に小さければ，曲線のもっとも重要なところは，$\omega=\omega_0$ の近くであって，そのとき ω が ω_0 に近ければ非常に正確なような適当な近似式で(23.8)をおきかえるのである．$\omega_0{}^2-\omega^2=(\omega_0-\omega)(\omega_0+\omega)$ であるから，ω が ω_0 に近ければこれは $2\omega_0(\omega_0-\omega)$ になり，$\gamma\omega$ は $\gamma\omega_0$ にほぼ等しくなる．これらの関係を(23.8)式にあてはめると，$\omega_0{}^2-\omega^2+i\gamma\omega\approx2\omega_0\left(\omega_0-\omega+\dfrac{i\gamma}{2}\right)$ となり，したがって，

$$\hat{x}\approx\frac{\hat{F}}{2m\omega_0(\omega_0-\omega+i\gamma/2)}\quad ただし\quad \gamma\ll\omega_0,\ \omega\approx\omega_0 \qquad (23.13)$$

であることがわかる．ρ^2 についてこれにあたる式を求めることはわけない：それは次のようになる．

$$\rho^2\approx\frac{1}{4m^2\omega_0{}^2[(\omega_0-\omega)^2+\gamma^2/4]}.$$

次のことを証明するのは，諸君の問題としておく：ρ^2 と ω との関係の曲線の最大の高さを単位と考えたとき，最高の高さの半分のところで曲線の幅 $\Delta\omega$ はどれだけかというと，γ が小さいときには，$\Delta\omega=\gamma$ である．摩擦の効果が小さくなればなるほど共鳴はますます鋭くなる．

この幅をあらわすもう一つの尺度として $Q=\dfrac{\omega_0}{\gamma}$ という量を使う人もある．共鳴が狭ければせまいほど，Q は大きくなる：$Q=1000$ というのは，曲線の幅が振動数目盛でわずか $\dfrac{1}{1000}$ であるような共鳴を意味する．図 23-2 に示した共鳴曲線の Q は 5 である．

共鳴現象の重要な点は，それが他のいろいろな場合にも起こるということである．そこでこの章の残りの部分では，そのような場合のいくつかについて述べることにする．

23-3　電気的共鳴

共鳴のもっとも簡単な，そしてもっとも広い技術的な応用面は電気にある．電気ではいろいろなものがあって，それをつなぐと電気回路になる．これらのものは回路要素といわれることが多いが，それには主な型が三つある．もっとも，その一つには他の二つが少しまざってはいる．これらの回路要素についてもっとくわしく論じる前に，注意

しておきたいことは，バネの端に質量をつけた力学的振動子という考え方そのものがすでに一つの近似にすぎないということである．すべての質量は，実際に“おもり”のところにあるわけではない；質量の一部はバネの慣性の中にもある．同様に，すべてのバネが“バネ”にあるのではない；おもり自体も少し弾性をもっているのであって，見たところ**絶対的な**剛体にみえるが，そうではない．そして上下に動くたびにそれを引張っているバネのはたらきでごくわずかひずむのである．電気についても，同様なことがいえる．いろいろなものを“回路要素”にまとめるのも一つの近似なのであって，それではこれらの要素は純粋な理想的な性質をもつものと仮定されている．ここでその近似そのものについて論じるのは適当ではないので，さしあたり，これらは正しいものと仮定しておこう．

回路要素の三つの主要な種類というのは，次のようなものである．第1のものは**キャパシター**と名付ける(図 23-4)；例えば金属板2枚をほんの少しはなして，その間に絶縁物の入っているものである．これらの平板が荷電されると，その間に，ある電圧，すなわち電位の差ができる．端子AとBとの間にあらわれる電位差も同じである．何故かといえば，もしもこれらの導線に電位の差があったとすれば，すぐに電気が流れるからである．したがって，平板にそれぞれ電荷$+q$と$-q$とがあれば，それらの間には電圧Vが存在する．そして平板の間には電場が存在する；Vを与える式は，すでに前に求めた(第13章および第14章)：

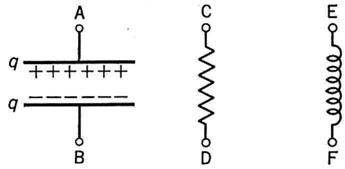


図 23-4　三つの回路素子

$$V=\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}=\frac{qd}{\varepsilon_0 A}. \tag{23.14}$$

ただしdは平板の間隔，Aはその面積である．電位差が電荷に比例することに注意したまえ．平行平板でなくて，何か勝手な形をした電極が絶縁されている場合にも，電位の差はやはり電荷に正確に比例するが，その比例定数を計算するのはそうやさしくはない．しかし要するに，キャパシターにかかる電位差は**電荷に比例し**，$V=\dfrac{q}{C}$であって，その比例定数が$\dfrac{1}{C}$であると覚えておけばいい．このCがそのものの**容量**である．

回路要素の第2のものは**レジスター**である．これは電流の流れに抵抗する．針金やその他の多くのものがこのように電気の流れに抵抗するのである：ある物質片の両端に電位の差があると，電位差に比例した電流$I=\dfrac{dq}{dt}$が生ずる：

$$V=RI=\frac{R\,dq}{dt}. \tag{23.15}$$

この比例係数を**抵抗**Rという．この関係には諸君もすでになじみ深いであろう：これはオームの法則に他ならない．

キャパシターの電荷qが力学系の変位xに対応すると考えれば，電流$I=\dfrac{dq}{dt}$は速度に，$\dfrac{1}{C}$はバネの定数kに，そしてRは抵抗係数γに対応することがわかる．さて，非常に面白いことには，もう一つ**質量**

に対応する回路要素があるのである！ これはコイルであって，電流が流れているときにそれ自身の内部に磁場を生ずるようなものである．磁場が**変化している**と，$\dfrac{dI}{dt}$ に比例した電圧がコイルに生ずる(これが変圧器がはたらく原理なのである)．磁場は電流に比例し，コイル内のいわゆる誘導電圧は電流が変化する割合に比例する：

$$V=\frac{L\,dI}{dt}=\frac{L\,d^2q}{dt^2}. \tag{23.16}$$

係数Lは**自己インダクタンス**であり，力学的な振動系でいえば質量に対応している．

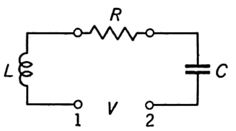


図23-5　抵抗 インダクタンス キャパシタンスのある電気振動回路

この3種類の回路要素を直列につないで，回路を作ったとしよう(図23-5)；そうすると1から2までの全体にかかる電圧は，回路をとおして一つの電荷をずっと運ぶときになす仕事に等しく，それは幾つかの部分の和である：インダクターには $V_L=\dfrac{L\,d^2q}{dt^2}$ がかかる；抵抗には $V_R=\dfrac{R\,dq}{dt}$ がかかる；キャパシターには $V_C=\dfrac{q}{C}$ がかかる．これらの和が与えられた電圧Vに等しい：

$$\frac{L\,d^2q}{dt^2}+\frac{R\,dq}{dt}+\frac{q}{C}=V(t). \tag{23.17}$$

さて，この方程式が力学的な方程式(23.6)とまったく同じであることがわかる．そしてこの方程式が同じ方法でとけることはいうまでもない．いま $V(t)$ が振動しているものとしよう：純粋な正弦波をもった発電機で回路を駆動しているとするわけである．実際のVを求めるには，あとで $e^{i\omega t}$ をかけて実数部分をとるのだが，そういう了解の下に，$V(t)$ を複素数 $\hat{V}$ であらわすことができる．電荷qもこれと同じように扱う．そうすると方程式(23.7)に対応してまったく同じような方程式を書くことができる：$\hat{q}$ の2次導関数は$(i\omega)^2\hat{q}$であり，1次の導関数は $(i\omega)\hat{q}$ である．したがって方程式(23.17)は次のように変形される：

$$\left(L(i\omega)^2+R(i\omega)+\frac{1}{C}\right)\hat{q}=\hat{V},$$

すなわち

$$\hat{q}=\frac{\hat{V}}{L(i\omega)^2+R(i\omega)+1/C}.$$

さらにこれは次のように書くこともできる．

$$\hat{q}=\frac{\hat{V}}{L(\omega_0{}^2-\omega^2+i\gamma\omega)}. \tag{23.18}$$

ただし $\omega_0{}^2=\dfrac{1}{LC}$ および $\gamma=\dfrac{R}{L}$ である．この分母は力学系の場合とまったく同じであり，共鳴の性質もまったく同じである！ 電気の場合と力学の場合との対応のあらましをまとめると，表23-1のようになる．

ここでちょっとした技術的なことを述べておかねばならない．電気関係の文献では別の記号が用いられているのである．(その取り扱う対象は本当は違わないのに，分野ごとに記号の書き方が違うことが多

表 23-1

一般的特性	力学的性質	電気的性質
独立変数	時間(t)	時間(t)
従属変数	位置(x)	電荷(q)
慣性	質量(m)	インダクタンス(L)
抵抗	抵抗係数($c=\gamma m$)	抵抗($R=\gamma L$)
かたさ	かたさ(k)	(キャパシタンス)$^{-1}$($1/C$)
共鳴振動数	$\omega_0^2=k/m$	$\omega_0^2=1/LC$
周期	$t_0=2\pi\sqrt{m/k}$	$t_0=2\pi\sqrt{LC}$
するどさ	$Q=\omega_0/\gamma$	$Q=\omega_0L/R$

い.）まず電気工学では，$\sqrt{-1}$ をあらわすのに i の代りに j が一般に使われている.（ともかく i は電流でなければならない！）また技術者は，$\hat{V}$ と $\hat{q}$ との関係よりもむしろ $\hat{V}$ と $\hat{I}$ との関係を知りたがる．その理由はただ，そちらになれているからというだけのことにすぎない．したがって $\hat{I}=\dfrac{d\hat{q}}{dt}=i\omega\hat{q}$ であるから，$\hat{q}$ に $\dfrac{\hat{I}}{i\omega}$ を代入して

$$\hat{V}=\left(i\omega L+R+\frac{1}{i\omega C}\right)\hat{I}=\hat{Z}\hat{I} \tag{23.19}$$

が得られる．もう一つの方法は方程式(23.17)を書きかえて，もっと見なれた形にすることである；次のように書かれたものもよくみかける：

$$\frac{LdI}{dt}+RI+\left(\frac{1}{C}\right)\int^t Idt=V(t). \tag{23.20}$$

いずれにしても，電圧 $\hat{V}$ と電流 $\hat{I}$ との間に(23.19)の関係が得られ，これは(23.18)とまったく同じであるが，ただ $i\omega$ で割って(23.19)になっているだけのことである．$R+i\omega L+\dfrac{1}{i\omega C}$ という量は複素数であって，電気工学においては非常によく使われるので**複素インピーダンス** $\hat{Z}$ という名前がついている．したがって $\hat{V}=\hat{Z}\hat{I}$ と書くことができる．技術者がこのようにしたがるのは，彼らが若い頃に少しばかりものを習ったからである：彼らは，抵抗と直流のことしか知らないときに，抵抗に対して $V=RI$ が成り立つということを習った．今や彼らはもっと勉強して交流回路を取り扱うようになったのだが，前のことがあるので，方程式が同じような形をしていてもらいたいのである．そこで彼らは $\hat{V}=\hat{Z}\hat{I}$ と書くのだが，唯一の違いは，抵抗がもう少し複雑なもの，すなわちある複素量でおきかえられたということである．というわけで，彼らは，世界中の他の人たちがみな虚数に使っている符号 i は使えない，それには j を使うのだと強情を張る；Z という字も R にするのだと強情を張らないのはまさに奇跡である！（それでも電流密度を扱うときには，それにも j を使うので，彼らもいささか困るのである．科学の難しさは，記号や単位やその他，人間によって考案された人工的なものによる難しさだという場合が多く，自然そのものによるものではない.）

23-4　自然における共鳴

電気的なものについてくわしく論じたが，いろいろな分野における場合を次々にあげて，それらの共鳴の方程式がいかに同じものであるかを示すことができる．自然には何かが“振動”していて，そこに共鳴現象がおこるようなことが多い．このことは前の方の章でもすでに述べておいた；その実例を示してみよう．いま我々が書斎の中をぐるぐると歩き回って，棚から本をとり出して目を通し，図 23-2 に対応する曲線で同じ方程式からきているものを探したとすると何が見つかるであろうか？　できるだけ少数の本で，共鳴という問題がいかに広汎であるかを示そうというならば，5, 6 冊の本があれば十分で，共鳴現象はたくさんでてくる．

まずはじめの二つは力学である．そのうち第1のはスケールの大きい問題，すなわち地球全体の大気である．地球の全面を一様に覆っている大気が，月によって片側に引っぱられる，というよりはむしろ1日に2回の潮汐がおこるように扁平につぶされたとし，そしてそれをはなして自由にすることができたとすれば，それはパチャンパチャンと上下にゆれるであろう；これは振動子である．この振動子は月によって**駆動され**，月は地球のまわりを回っているといってよい；そこでどの方向の力の成分，例えば x 方向の成分をとってみても，余弦成分がある．したがって潮汐をおこさせる月の引力に対する地球の大気の応答は，振動子としての応答である．大気の応答は図 23-6 の曲線 b に示すようなものであるはずである．(曲線 a はここに引用したもとの文献中で論じられている別の理論曲線で前後の説明なしにのせた.)

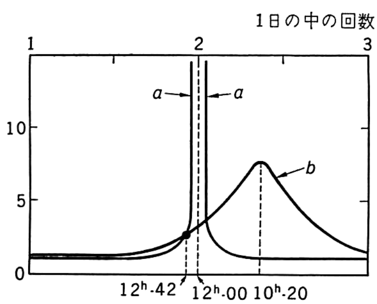


図 23-6　外界からの影響に対する大気の応答
aは大気の S_2 潮汐が引力によるものであるとしたときに起こるはずの応答　極大の倍率は 100:1 になる
bは M_2 潮汐の観測倍率と位相とから求められたものである［ムンク，マクドナルド“地球の回転”ケンブリッジ大学出版局(1960)］

地球は月の下で 12.42 時間――地球の 12時間(潮汐は1日に2回ある)に，月が運動していることによる余分をたしたもの――に相当した振動数が一つしかないのだから，この共鳴曲線にも点が一つしかないはずだと考える人もいるかも知れない．しかし大気潮汐の**大きさ**と遅れの量すなわちその**位相**とから，ρ と θ の両方とも求めることができる．そしてこれらから ω_0 と γ とが求まり，曲線全部を描くことができるのである！　しかしこれは非常にデータに乏しい科学の例である．二つの数から二つの数を求め，その二つの数から見事な曲線を描く．もちろんこの曲線は曲線の位置をきめる例の1点を通る！　せっかくこの曲線が求められても**何か他のものを測定することができなければ**，これは無意味である．地球物理学の場合には，それは非常に難しいということが多い．しかし，この大気潮汐の場合には，理論的にいって固有振動数 ω_0 に歩調をあわせて起こるはずの現象が他にもある：すなわち，もしもだれかが大気に擾乱を与えたとすると，大気は振動数 ω_0 で振動するはずである．そのような鋭い擾乱が 1883 年に実際に**あった**のである；クラカトア火山が爆発して島の半分が吹き飛ばされた．大気中でものすごい爆発をしたので，大気の振動の周期を測定することができたのである．その周期は，10 時間半であった．図 23-6 から得られる ω_0 は 10 時間 20 分である．したがって大気潮汐に関する我

々の解釈が正しいということに対して少なくとも一つの証拠が得られたことになる．

次は，もっとスケールの小さい力学的振動である．今度は塩化ナトリウムの結晶についての話であるが，前に述べたように，この結晶はナトリウムイオンと塩素イオンとが隣りあって並んでいる．これらのイオンは電荷をもっていて，かわるがわるプラスとマイナスになっている．さてこれに面白い振動がおこる可能性がある．いますべてのプラスの電荷を右へ，そしてマイナスの電荷を左へおしやって，それから自由に放してやることができたとしよう；そうするとナトリウム格子と塩素格子とが互いに前後に振動する．どうすればそんなふうにもっていくことができるか？ わけないことである．結晶に電場をかければ，プラスの電荷は片方へ，そしてマイナスの電荷は他方へおしやられるだろう！ こうして外界から電場があれば，結晶を振動させることができるであろう．しかし，電場の振動数は非常に高いものが必要で，それは**赤外線**に相応する！ そこで，我々は塩化ナトリウムの結晶の赤外線吸収を測定して共鳴曲線を求めることができる．その曲線を図 23-7 に示す．横軸は振動数ではなく波長で与えられているが，もちろん，それはちょっとしたテクニック上の問題である．一つの波については，振動数と波長との間にははっきりした関係がある．したがって波長で与えても，実際には振動数目盛で与えられているのと同じであり，ある一つの振動数が共鳴振動数にあたるのである．

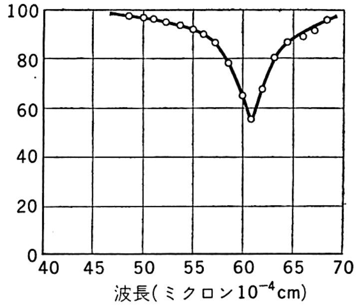


図 23-7 薄い(0.17μ)の塩化ナトリウムの膜を透過する赤外線〔バーネス *Z. Physik* 75, 723 (1923) による．キッテル"物性論序説"ウィリイ社, 1956〕

しかし，その幅についてはどうだろうか？ その幅は何によってきまるのだろうか？ 曲線上にあらわれている幅が，理論的に得られる固有の幅，γ ではないという場合も少なくない．理論曲線よりも幅の広い曲線が得られるという理由は二つある．第1に結晶のいろいろな部分の振動数がみな同じではないということである．例えばいろいろの部分が何らかの歪を受けているとすると，振動数は各部分で違って，たくさんの共鳴曲線を重ねたようなものが得られることになる．そして幅の広い曲線になる．幅がひろがる第2の理由は，単に次のようなものである：我々は振動数を十分正確には測定できない．——もし分光器のスリットを広めに開けたとすると，一つの振動数だけをとり出したつもりでも，実際にはある幅 $\Delta\omega$ を持っているのだから，鋭い曲線をみるのに必要なだけの分解能がなかったのかも知れないのである．図 23-7 の幅が固有のものであるか，あるいは結晶の中の不均質性によるものであるか，それとも分光器のスリットの幅が有限であったことによるものであるか，すぐには何もいえない．

さて，次にもう少し深奥な例に移ろう．それは磁石のゆれについての問題である．N極とS極のある磁石を一様な磁場の中におくと，そのN極は一方にひかれ，S極は他方に引かれる．したがって，一般にはそれにトルクがはたらいて，方向磁石の針のように，平衡位置のまわりに振動する．しかし，いま我々が論じようという磁石は**原子**である．これらの原子は角運動量を持っているから，トルクによっておこ

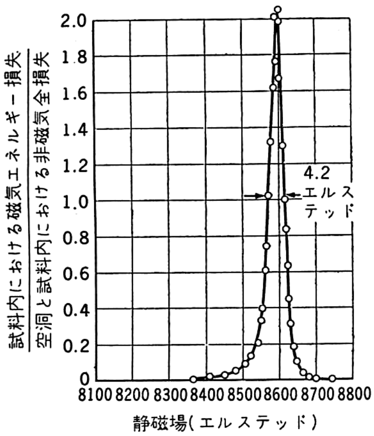


図 23-8　有機常磁性物質における磁気エネルギー損失と加えた磁場の強さとの関係〔オールドンその他 *Phys. Rev.* 75, 1614(1949)〕

る運動は磁場の方向に生ずる単純なものではなくて，その代り**歳差運動**であることはいうまでもない．さて，この運動を側面からみると，どの一つの成分をとってみても，それは"揺れ"ている．そして我々はこの揺れを乱したり，あるいはおこしたりして，吸収を測定することができる．図 23-8 の曲線はそのようなものの典型的なものである．もっとも，実際にここでやったことはテクニックが少し違う．ちょっと考えると，この揺れをおこすのには，研究者たちは横方向に与える磁場の振動数を変えて曲線を描くだろうと想像されるが，実はそうではなくて，この振動数は一定なのである．振動数を変えてやることも不可能ではないが，振動数 ω を固定して磁場の強さを変える方が技術的にはやさしいからである．磁場の強さを変えることは我々の公式の ω_0 を変えることに相当する．彼らは共鳴曲線を ω_0 の関数としてかいたものである．いずれにしてもこれはある ω_0 と γ とに関する代表的な共鳴である．

もっと先に進もう．次の例は原子核に関するものである．原子核の中における陽子と中性子の運動はある意味で振動的であり，このことは次のような実験によって実際に示すことができる．リチウム原子に陽子を衝突させると，γ 線を出す反応が起こるが，それには共鳴に特有な非常に鋭い最大値があるのである．しかし図 23-9 でわかるように，一つだけ他の場合と違うところがある：横軸が振動数ではなくて**エネルギー**なのである！ その理由は，古典的には我々がエネルギーであると考えていたものが，量子力学では実はある振幅の波動の周波数に関係しているようになっているからである．簡単な巨視的の物理学で，我々が振動数と関連して取り扱うようなものでも，原子的なものについて量子力学的な実験を取り扱うとなると，それに対応する曲線は，エネルギーの関数ということになるのである．事実，ここに示した曲線はある意味においてはそのことを如実に示しているのである．

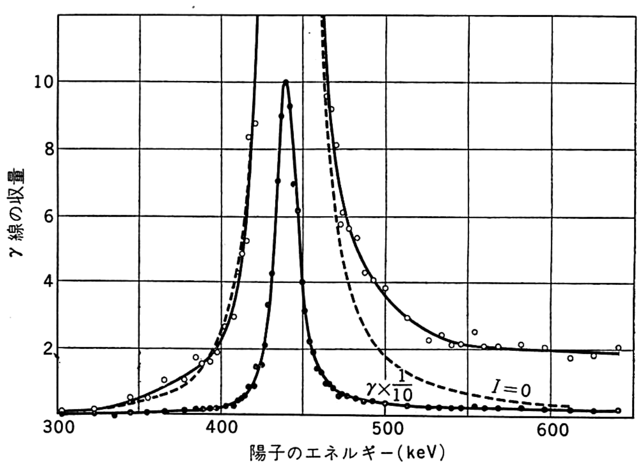


図 23-9　リチウムから出るガンマ線の強さと衝突する陽子のエネルギーとの関係

破線は角運動量 $l=0$ の陽子に対する理論曲線〔ボナー，エバンス *Phys. Rev.* 73, 666(1948)〕

これは振動数とエネルギーがある深い関係にあることを示しているのであり，また事実，そのとおりなのである．

さてもう一つの例に移ろう．これもまた原子核のエネルギーレベルに関するものであるが，こんどのはずっとずっと幅が狭い．図 23-10 の ω_0 は 100,000 電子ボルトに対応するのであるが，一方幅 γ の方はほぼ 10^{-5} 電子ボルトである；いいかえれば，ここの Q は 10^{10} である！これが測定されたときには，それまでに測定された振動子の Q のうちで最大のものであった．これを測ったのはメスバウア博士であって，これが彼のノーベル賞受賞のもとになった．この図で横軸は速度であるが，それはごくわずかしか違わない振動数を得るのに吸収体に対して陽子の源を動かして，ドップラー効果を利用するというテクニックを使ったからである．この実験に用いた速さが毎秒 2, 3 cm であることを思えば，いかにこの実験がデリケートなものであるかがわかるだろう．図に示したスケールではかると，周波数ゼロの点は 10^{10} cm ほど左にある——ちょっと紙面からはみ出したところである！

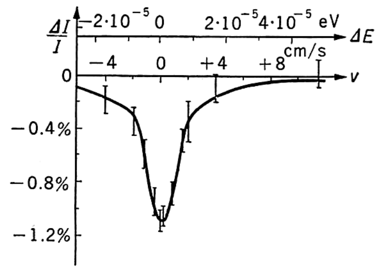


図 23-10　〔メスバウア博士の好意による〕

さて最後に，*Physical Review* のどれか，例えば 1962 年の 1 月 1 日号をみたとしよう．共鳴曲線がのっているだろうか？　どの号をみても共鳴曲線がでている．図 23-11 はこの号にでているものである．この共鳴曲線は非常に面白い．これはいわゆる奇妙な粒子間に起こる反応にあらわれる共鳴である．そのうちの K^- と陽子とが作用しあう反応である．この共鳴を検出するのには，ある種の粒子が何個出てくるかをみればよい．そして，何がどれだけ出てくるかによってそれぞれ違った曲線が得られるが，同じエネルギーのところに同じ形のピークがある．そこで，**K^- 中間子はあるエネルギーのところに共鳴がある**と結論する．このことはおそらく，この共鳴に対応してある種の状態があり，そしてそれは K^- 1 個と陽子 1 個とをいっしょにすることによって発生することを意味するのであろう．これは新しい粒子，あるいは共鳴である．いまのところ，このようなものを“粒子”と呼ぶべきか，あるいは単に共鳴と呼ぶべきなのかよくわからない．非常に**鋭い**共鳴があるときには，それは非常に**はっきりしたエネルギー**に対応し，自然界にそのエネルギーの粒子が存在するようにみえる．共鳴が鋭くなくなると，あまり寿命の長くない粒子が存在するというべきなのか，あるいは単にその反応確率の共鳴であるというべきなのかよくわからない．このことは第 2 章で粒子について論じたとき述べておいたが，第 2 章を書いたときには，この問題の共鳴はまだ知られていなかったのである．したがって，いまとなっては我々の表にもう一つ粒子を書き加えなければならない！

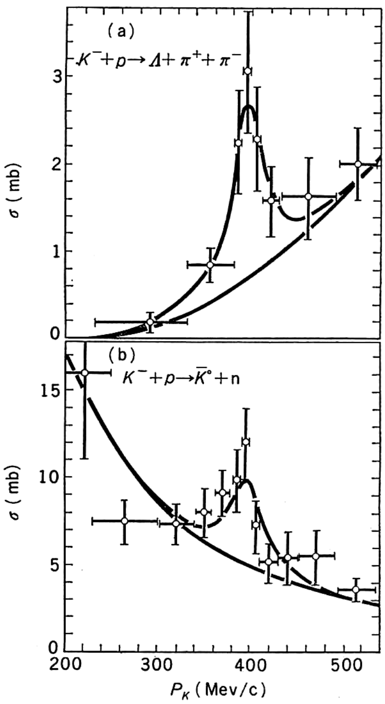


図 23-11
(a) $K^-+p\rightarrow\Lambda+\pi^++\pi^-$
(b) $K^-+p\rightarrow\bar{K}^0+n$
の反応における断面積と運動量との関係
(a)と(b)の下の曲線は仮定した非共鳴バックグラウンドで上の曲線にはそれに共鳴が重なっている
〔フェロールッチその他 *Phys. Rev. Letter* 8, 28(1962)〕

第24章 過渡現象

24-1 振動子のエネルギー

この章は“過渡現象”という題になっているが，その一部分は前章の強制振動のつづきである．強制振動に関してまだ述べていなかった重要な事柄があるが，その一つは振動の**エネルギー**である．そこでこのエネルギーについて考えよう．

力学的な振動子には，どれだけの運動エネルギーがあるだろうか？それは速度の自乗に比例する．ここで我々は重要な点にくる．いまある任意の量 A を考え，これは速度であってもよいし，あるいはこれから論じようとする何か他のものであってもよいとする．複素数の形で $A=\hat{A}e^{i\omega t}$ と書くと，物理的に意味のある，本当のまともな A は，その**実数部分**だけである；したがって，なんらかの理由で，A の**自乗**がほしいとすると，複素数を自乗してその実数部分をとるというのでは正しくない．というのは，複素数の自乗の実数部分は実数部分の自乗に等しくはなく，**虚数部分**も入ってくるからである．したがって，エネルギーを求めようとするときには，しばらく複素数の記号から離れて実際にはどうなっているのかを考えなければならない．

さて，真に物理的意味をもっている A は，$A_0e^{i(\omega t+\Delta)}$ の実数部分，すなわち $A=A_0\cos(\omega t+\Delta)$ である．ただしここで複素数 $\hat{A}$ は $A_0e^{i\Delta}$ と書いた．この実際の物理的量の自乗は，$A^2=A_0^2\cos^2(\omega t+\Delta)$ である．そうすると，この自乗の量は最大値とゼロの間をコサインの自乗のように上がったり下がったりする．コサインの自乗は極大値が1で極小値が0，そして平均値は $\frac{1}{2}$ である．

多くの場合，振動中のある特定の瞬間のエネルギーというものは大した問題ではない．大半の利用面では，単に A^2 の平均値，すなわち振動周期にくらべて長い時間における A の自乗の平均がほしいだけである．このような場合には，コサインの自乗の平均値を使うことができ，したがって次の定理が成り立つ：もし A が複素数であらわされていれば，A^2 の平均は $\frac{1}{2}A_0^2$ である．さて A_0^2 は複素数 $\hat{A}$ の絶対値の自乗である．（これの書き方にはいろいろある——$|\hat{A}|^2$ と書くのが好きな人もあるし，$\hat{A}\hat{A}^*$，すなわち $\hat{A}$ かけるその共役，と書く人もある．）この定理はこれから何回も使う．

さて，強制振動子のエネルギーを考えよう．強制振動子の方程式は

$$\frac{md^2x}{dt^2}+\frac{\gamma m\,dx}{dt}+m\omega_0^2x=F(t) \tag{24.1}$$

である．我々の問題では $F(t)$ はもちろん t のコサイン関数である．

さて次のことをしらべてみよう：外力 F によってどれだけの仕事がなされるか？　この力によって毎秒なされる仕事，すなわち仕事率は，力かける速度の積である．（すでに知っているように，時間 dt の間になされる微分的仕事は Fdx であり，仕事率は $\dfrac{Fdx}{dt}$ である.）したがって

$$P = F\frac{dx}{dt} = m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \omega_0{}^2x\left(\frac{dx}{dt}\right)\right] + \gamma m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad (24.2)$$

である．ところが右辺の第1項と第2項は $\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \dfrac{1}{2}m\omega_0{}^2x^2\right]$ と書くこともできる．このことは微分してみればすぐにわかる．ということは，角括弧［　］の中は，容易に理解できる二つの項——一つは運動の運動エネルギーであり，他はバネの位置のエネルギー——の単なる微分であるということである．この量を**蓄積エネルギー**すなわち振動中に蓄えられたエネルギーと名付けることにしよう．そこで，振動が強制されて長時間運動しているとき，何周期にもわたった仕事率の平均を求めたいとしよう．長期的にみると，蓄積エネルギーは変化しない——その微分からくる影響は平均ゼロである．いいかえれば，長時間にわたって仕事率の平均をとると，**すべてのエネルギーは結局は摩擦項 $\gamma m\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$ に吸収される**．振動内に蓄積されるエネルギーも**少し**はあるが，多くの周期にわたって平均をとると，それは時間と共に変化しない．したがって平均仕事率 $\langle P\rangle$ は

$$\langle P\rangle = \left\langle \gamma m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\rangle \qquad (24.3)$$

である．

複素数の書き方と，$\langle A^2\rangle = \dfrac{1}{2}A_0{}^2$ という定理を使うと，この平均仕事率を求めることができる．すなわち，もし $x = \hat{x}e^{i\omega t}$ であるならば，$\dfrac{dx}{dt} = i\omega\hat{x}e^{i\omega t}$ である．したがって，このようなときには，平均仕事率は次のように書ける．

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2}\gamma m\omega^2 x_0{}^2. \qquad (24.4)$$

電気回路の記号では，$\dfrac{dx}{dt}$ は電流 I でおきかえられ（I は $\dfrac{dq}{dt}$，q は x に対応する)，$m\gamma$ は抵抗 R に対応する．よって，エネルギー損失の割合——強制力関数によって費される仕事率——は回路中の抵抗と電流の自乗平均の積である：

$$\langle P\rangle = R\langle I^2\rangle = R\cdot\frac{1}{2}I_0{}^2. \qquad (24.5)$$

このエネルギーが抵抗を熱するのに使われることはいうまでもない；それでこれは熱損失，あるいはジュール熱と呼ばれることがある．

もう一つ述べておきたいと思う面白いことは，どれだけのエネルギーが**蓄積される**かということである．これは仕事率と同じではない．なぜならば仕事率ははじめはエネルギーを蓄えるのに使われるが，その後は熱(抵抗)損失がある限り，仕事率を吸収し続けるからである．

どんな瞬間をとっても，幾分かの量のエネルギーが蓄えられているのだから，平均蓄積エネルギー$\langle E\rangle$を計算してみよう．$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$の平均値はすでに計算済みであるから，

$$\begin{aligned}\langle E\rangle &= \frac{1}{2}m\left\langle\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\rangle+\frac{1}{2}m{\omega_0}^2\langle x^2\rangle\\ &= \frac{1}{2}m(\omega^2+{\omega_0}^2)\frac{1}{2}{x_0}^2 \qquad (24.6)\end{aligned}$$

となる．さて振動子の効率が非常によく，またωがω_0に近くて，$|\hat{x}|$が大きいときには蓄積エネルギーは非常に大きい，――比較的小さな力から大量の蓄積エネルギーを得ることができる．力は振動を起こさせるために，大きな仕事をするが，それを定常的に維持するためには，摩擦とたたかえばよいだけである．摩擦が非常に小さければ，振動子は大きなエネルギーを持つことになり，大きく振動してはいてもエネルギーはあまりたくさん失われない．1サイクル当りになされる仕事とくらべて，どれだけのエネルギーが蓄えられるかによって振動子の効率を測ることができる．

蓄積されたエネルギーと1サイクル中になされる仕事とをくらべるのには，どうすればよいか？　これはこの系のQと呼ばれるものである．Qの定義は，平均蓄積エネルギーに2πをかけたものを，1サイクルあたりになされる仕事でわったものである．（サイクルあたりの仕事ではなくて**ラジアン**あたりの仕事についていうならば，2πはなくなる．）

$$Q = 2\pi\frac{m(\omega^2+{\omega_0}^2)/2\cdot\langle x^2\rangle}{\gamma m\omega^2\langle x^2\rangle\cdot 2\pi/\omega} = \frac{\omega^2+{\omega_0}^2}{2\gamma\omega}. \qquad (24.7)$$

Qの値が非常に大きくないときには，これはあまり有用な数ではない．その値が比較的大きいときには，Qの値は振動子がどのくらいよいものであるかという目安になる．いろいろな人がQを最も簡単で，最も有用な形に定義することを試みている；いろいろの定義があって，互いに少しずつ異なるが，Qが大きいときにはすべての定義は一致するのである．最も広く採用されている定義は，方程式(24.7)であって，ωに関係する．よい振動子で共鳴に近い場合には，$\omega=\omega_0$とおいて，(24.7)を少し簡単にすることができて$Q=\dfrac{\omega_0}{\gamma}$となる．これが前に我々が使った$Q$の定義である．

電気回路のQとは何であろうか？　それを知るには，mをL, $m\gamma$をR, $m{\omega_0}^2$は$\dfrac{1}{C}$とよみかえさえすればよい（表23-1参照）．共鳴のところのQは$\dfrac{L\omega}{R}$であり，ここではωは共鳴振動数である．Qが大きい回路というのは，その振動を駆動する機械によって1周期毎になされる仕事の量にくらべて振動として蓄積されるエネルギーが非常に大きいということを意味する．

24-2　減衰振動

さて本論の過渡現象にもどろう．**過渡現象**というのは外力が働いていないときの微分方程式の解で，系が静止しているのではないもので

ある．(もちろん，力が働いていなくて原点に静止しているということであれば，それも立派な問題である——それはそのままそこにじっとしていつづける！) 振動が何かほかのはじまり方をしたという場合を考えてみよう：例えば，しばらくは外力で駆動された後に，その力をとり除いたとしよう．そうすると，どんなことが起こるか？ まずQが非常に大きい系においてはどんなことが起こるか，その大まかな傾向を考えてみよう．力がはたらいている間は，蓄えられたエネルギーには変化がなく，それを維持するために何らかの仕事がなされている．さてそこで力をとり除いたとすると，もう仕事はなされていない；そうするとこれまで供給エネルギーを食っていた損失は，もはやそのエネルギーを食わなくなる——もう駆動源は**ない**のである．損失は蓄積されたエネルギーをいわば消費しなければならないであろう．そこで $\dfrac{Q}{2\pi}=1000$ であるとしよう．サイクル毎になされる仕事は，蓄積されたエネルギーの $\dfrac{1}{1000}$ である．そうすると，これは駆動力なしで振動しているのだから，1サイクルの間にはその系が普通なら外部から供給されていたであろうエネルギーの量，すなわちそのエネルギーEの $\dfrac{1}{1000}$ を失うであろう．そしてサイクル毎にそのエネルギーの $\dfrac{1}{1000}$ を失いながら振動し続けるであろう．こう考えるのは理屈にあっていないであろうか？ そこであて推量に，比較的Qの高い系に対しては，次の式がだいたい成立するとしよう(後で厳密な取扱いをするが，この式は**正しかった**ということになる！)：

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{\omega E}{Q}. \tag{24.8}$$

これは大きなQに対してのみ正しいのだから，大まかなものである．各ラジアン毎にこの系は蓄積エネルギーEの $\dfrac{1}{Q}$ を失う．したがって，時間dtのうちにエネルギーは $\dfrac{\omega dt}{Q}$ だけ変化する．というのは時間dtに対応するラジアン数はωdtだからである．その振動数とは何か？この系は力がほとんどはたらいていなくても，うまく動くとし，したがって放っておけばほとんど同じ振動数で自分で振動するとしよう．そこでそのωが共鳴振動数ω_0であるとする．そうすると方程式(24.8)から，蓄積されたエネルギーは次のように変化するということになる．

$$E=E_0e^{-\omega_0t/Q}=E_0e^{-\gamma t}. \tag{24.9}$$

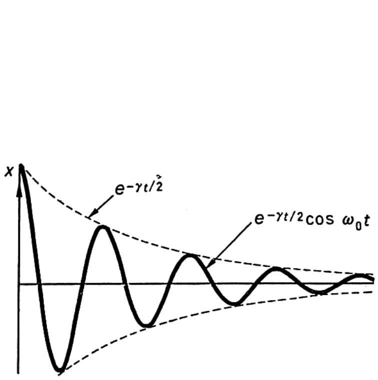


図 24-1 減衰コサイン振動

これから任意の瞬間の**エネルギー**の値が求められる．おおまかにいって，時間の関数としての振動振幅の公式はどうなるか？ 同じになるか？ ノー！ たとえばバネ中のエネルギーは変位の**自乗**に従って変化する；運動エネルギーは速度の**自乗**に従って変化する；したがって全エネルギーは変位の**自乗**に従って変化する．だから変位すなわち振動の振幅は，自乗の半分の速さで減少するであろう．いいかえれば，減衰過渡振動の解は，振動数が共鳴振動数ω_0に近く，正弦波運動の振幅が$e^{-\gamma t/2}$に従って減少するようなものであろうと推定される：

$$x=A_0e^{-\gamma t/2}\cos\omega_0t. \tag{24.10}$$

この方程式と図 24-1 とから，どんなことになろうかという予想はつく；そこで運動の微分方程式自体を解くことによって，この運動を**厳密に**調べてみよう．

方程式(24.1)式の外力のない場合から出発するとして，どのようにして解いたらよいのであろうか？ 我々は物理屋であるから，解が**何であるか**ということの方が大切で，その**方法**については，あまりこだわる必要はない．すでに得た知識という武器を活用して，指数曲線，$x=Ae^{i\alpha t}$ という解を試みてみよう．(何故これを試してみるのかって？これがいちばん微分しやすいものだからである！) これを(24.1)に代入し($F(t)=0$ とする)，x を時間で微分するごとに $i\alpha$ をかけるという規則を使う．そうするとわけなく代入ができて，方程式は次のようになる：

$$(-\alpha^2+i\gamma\alpha+\omega_0{}^2)Ae^{i\alpha t}=0. \qquad (24.11)$$

この全体は**常に**ゼロでなければならないのであるが，これは次の(a)，(b)以外にはありえない．(a) $A=0$，これは全然解といえるようなものではない——静止している，あるいは(b)

$$-\alpha^2+i\alpha\gamma+\omega_0{}^2=0. \qquad (24.12)$$

もしこれを解くことができて，一つの α が求まれば，A がゼロでない解になる！

$$\alpha=\frac{i\gamma}{2}\pm\sqrt{\omega_0{}^2-\frac{\gamma^2}{4}}. \qquad (24.13)$$

しばらくの間，γ の値は ω_0 にくらべてかなり小さくて，$\omega_0{}^2-\dfrac{\gamma^2}{4}$ はたしかに正であり，したがって平方根をとるのに何の問題もないものとしよう．一つ困ることがあるのは，解が**二つ**得られるということである！ すなわち

$$\alpha_1=\frac{i\gamma}{2}+\sqrt{\omega_0{}^2-\frac{\gamma^2}{4}}=\frac{i\gamma}{2}+\omega_\gamma \qquad (24.14)$$

および

$$\alpha_2=\frac{i\gamma}{2}-\sqrt{\omega_0{}^2-\frac{\gamma^2}{4}}=\frac{i\gamma}{2}-\omega_\gamma \qquad (24.15)$$

である．まず，平方根が二つの値をとり得ることに気がつかなかったことにして，最初の解について考えてみよう．そうすると x の解は，$x_1=Ae^{i\alpha_1 t}$ であることになる．ただしここで A はある定数である．ところで α_1 を代入するにあたって，これはこれからもしばしば出てくるし，また書くのにも長いから，$\sqrt{\omega_0{}^2-\gamma^2/4}=\omega_\gamma$ と書くことにする．そうすると $i\alpha_1=-\dfrac{\gamma}{2}+i\omega_\gamma$ となり，$x=Ae^{(-\gamma/2+i\omega_\gamma)t}$ を得る．あるいはこれと同じことであるが，指数の素晴らしい性質を利用すれば，

$$x_1=Ae^{-\gamma t/2}e^{i\omega_\gamma t} \qquad (24.16)$$

である．

まずわかるのは，これが振動であることである．その振動数 ω_γ は ω_0 に**厳密に**等しくはないが，よい振動系ならば ω_0 に近い．次に振動の振幅は指数的に減少している！ 例えば(24.16)の実数部分をとれ

ば

$$x_1 = Ae^{-\gamma t/2}\cos\omega_\gamma t \qquad (24.17)$$

である．これは我々が(24.10)で推測した解に非常によく似ている．ただ違うところは振動数が実際には ω_γ になっているだけである．これだけが誤差であるから，まあ同じものであるといえる——我々の考え方は正しかった．しかし，すべてがうまくいって**いるのではない**！うまくいっていないのは，**もう一つ解がある**ということである．

もう一つの解は α_2 であって，ω_γ の符号が逆になっているところだけちがう：

$$x_2 = Be^{-\gamma t/2}e^{-i\omega_\gamma t}. \qquad (24.18)$$

これは何を意味するか？ 間もなく証明するが，もしも x_1 と x_2 とがそれぞれ $F=0$ とした場合の方程式(24.1)の解であるならば，x_1+x_2 もまたこの方程式の解である！ したがって x の一般解は数学的に次のような形になる．

$$x = e^{-\gamma t/2}(Ae^{i\omega_\gamma t}+Be^{-i\omega_\gamma t}). \qquad (24.19)$$

我々は最初の解だけで十分満足していたのに，どうしてこの別の解を与えるような余計な心配をするのだろうかと不思議に思われるかもしれない．この余分な解は何のためのものだろうか？ それは実数部分だけをとらなければならないからである．実数部分をとらなければならないということを**我々は**知っているが，どうして**数学**がそのことを知っていたのだろうか？ ゼロでない駆動力 $F(t)$ があるときに，それに**人工的**な力をつけ加えれば，方程式の虚数部分は，あるきまった方式で駆動されるといってよい．しかし $F(t)\equiv 0$ とおいたときには，どんな形で書いたものでも，x はその実数部分だけであるという約束は，あくまでも我々だけのものであり，数学の式の方はまだそれを知っていないはずである．物理現象は実数の解を**もっている**が，はじめにしごく満足だと思われた解は，実数ではなく，**複素数**である．我々は適当に実数部分だけをとろうとしているのだが，そのことを**方程式**は知らないので，式は共役複素数型の解を我々にいわば提供してくれたのであって，両者をいっしょにして，はじめて**真の実解を作る**ことができるようにしているわけである；これがすなわち α_2 が我々にしてくれていることなのである．x が実数であるためには，$Be^{-i\omega_\gamma t}$ は $Ae^{i\omega_\gamma t}$ の共役複素数であって，虚数部分が消えるようになっていなければならない．それで B は A の共役複素数になっていて，我々の実数解は次のようになる．

$$x = e^{-\gamma t/2}(Ae^{i\omega_\gamma t}+A^*e^{-i\omega_\gamma t}). \qquad (24.20)$$

したがって，実数解は**位相のずれ**と減衰をともなった振動ということになる——看板にいつわりはなかった．

24-3 電気的の過渡現象

さて，上に述べたことがほんとにうまくいくかどうかを調べてみよう．図 24-2 に示した電気回路を組んで，スイッチ S を閉じて突然電

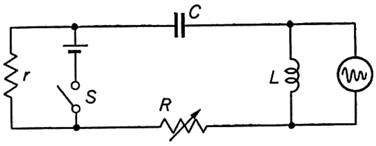


図 24-2 過渡現象をみせるための電気回路

圧をかけ，インダクタンスLの両端にかかる電圧をオッシロスコープにいれる．この回路は振動回路であるから，何らかの形の過渡現象が生ずる．それはちょうど，急激に力を加えられた系が振動をはじめるのに対応する．これは力学的な減衰振動の電気的な対応であって，オッシロスコープに現われる振動を観察すると，そこには我々が解析しようとしている曲線がみられる筈である．(オッシロスコープの水平運動は等速で動かされる一方，上下方向の動きはインダクターにかかる電圧である．回路の他のところは単に技術的なこまかいことである．我々の視覚の持続時間は短く，スクリーンの曲線1本の軌跡をみただけでわかるほどのものではないから，実験は何度も何度もくり返した方がよい．そこで1秒間に60回スイッチを閉じて実験をくり返す；スイッチを閉じるたび毎に，オッシロスコープの水平掃引をはじめることにすると，何度も何度も曲線を重ねて描く.) 図24-3から図24-6に示したのは，実際に減衰振動をオッシロスコープでうつした例である．図24-3はQが大きくγが小さい回路における減衰振動を示す．振動はすぐには消えてしまわない；何回も振動する．

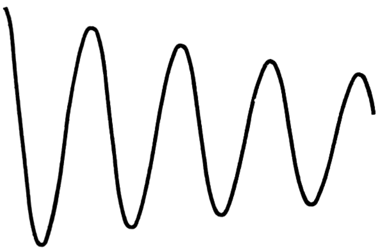


図 24-3

しかし，Qを減らして振動がより速く減衰する場合には，どんなことになるか調べてみよう．Qを減らすには回路の抵抗Rを増せばよい．回路の抵抗を増すと，減衰は速くなる(図24-4)．そこで回路の抵抗をさらに増すと，減衰はもっと速くなる(図24-5)．しかしある値以上にすると，振動は全くみえなくなる！ そこで問題になるのは，それは我々の目が十分によくないからであるか，ということである．そこでもっと抵抗を増すと，図24-6に示すような曲線が得られるが，これは全く振動がない．あったとしても一つとしか思えない．さて，どうしたらそれを数学的に説明できるだろうか？

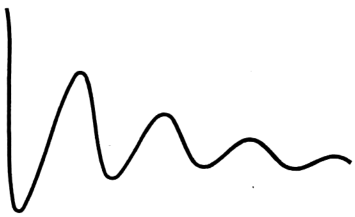


図 24-4

抵抗はγの項に比例することはいうまでもない．具体的にいえば，γは$\dfrac{R}{L}$である．さて，以前十分満足していた(24-14)および(24-15)の解の中で，もしγを増して，$\dfrac{\gamma}{2}$がω_0をこえると大混乱が勃発する；我々は次のような別の形に書きあらわさなければならない：

$$\frac{i\gamma}{2}+i\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}\quad および\quad \frac{i\gamma}{2}-i\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}.$$

これらが二つの解であるが，前に述べたものと同様な数学的推論によって，また二つの解$e^{i\alpha_1 t}$と$e^{i\alpha_2 t}$とが得られる．α_1に代入すると

$$x=Ae^{-(\gamma/2+\sqrt{\gamma^2/4-\omega_0^2})t}$$

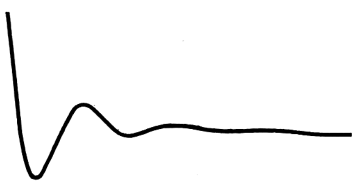


図 24-5

となるが，これは振動のないきれいな指数減衰である．同様にしてもう一方の解は

$$x=Be^{-(\gamma/2-\sqrt{\gamma^2/4-\omega_0^2})t}$$

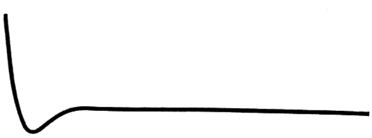


図 24-6

となる．この平方根の値は$\dfrac{\gamma}{2}$をこえられないことに注意したまえ．$\omega_0=0$のときでも根号内の項が等しくなるだけである．また一般には$\dfrac{\gamma^2}{4}$からω_0^2をひくのだから，平方根は$\dfrac{\gamma}{2}$よりも小さく，したがって括弧内の項の値は常に正数である．これでよかった！ 何故かって？ それはもしもそれが負であったら，eを正数係数かける時間乗

することになって，それは暴走していくことを意味する！ 回路中に抵抗をたくさん入れれば，暴走しないことを我々はちゃんと知っている——全く暴走の逆である．そこでここに2個の解があるわけだ．その両方とも指数的の減衰であるが，そのうちの一方は他の解より“減衰率”が大きい．一般解はもちろん両者の和である；和をとるときの係数は，運動がどのようにして始められたか——問題の初期条件が何であったかによってきまる．図はとくに始め方によってAが負でBが正であった場合であって，二つの指数曲線の差をとることになる．

さて，運動がどのようにして始められたかがわかっているときに，どうやって二つの係数AおよびB(あるいはAおよびA^*)を求めるか，その方法について述べよう．

$t=0$ において $x=x_0$, $\dfrac{dx}{dt}=v_0$ であったとしよう．$t=0, x=x_0$, $\dfrac{dx}{dt}=v_0$ を

$$x = e^{-\gamma t/2}(Ae^{i\omega_\gamma t}+A^*e^{-i\omega_\gamma t}),$$

$$\frac{dx}{dt} = e^{-\gamma t/2}\left[\left(-\frac{\gamma}{2}+i\omega_\gamma\right)Ae^{i\omega_\gamma t}+\left(-\frac{\gamma}{2}-i\omega_\gamma\right)A^*e^{-i\omega_\gamma t}\right]$$

に代入すると，$e^0=e^{i0}=1$ であるから

$$x_0 = A+A^* = 2A_R,$$

$$v_0 =\left(-\frac{\gamma}{2}\right)(A+A^*)+i\omega_\gamma(A-A^*)$$

$$= -\frac{\gamma x_0}{2}+i\omega_\gamma(2iA_I)$$

となる．ここで $A=A_R+iA_I, A^*=A_R-iA_I$ である．したがって

$$A_R = \frac{x_0}{2}$$

および

$$A_I = -\frac{v_0+\gamma x_0/2}{2\omega_\gamma} \tag{24.21}$$

である．これでAとA^*とが完全にきまり，したがってそれぞれの始まり方に応じて過渡現象解の曲線も完全にきまる．ところで

$$e^{i\theta}+e^{-i\theta} = 2\cos\theta \quad \text{および} \quad e^{i\theta}-e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

ということを考えに入れると，この解は別の形に書くことができる．この完全解は次のようになる：

$$x = e^{-\gamma t/2}\left[x_0\cos\omega_\gamma t+\frac{v_0+\gamma x_0/2}{\omega_\gamma}\sin\omega_\gamma t\right]. \tag{24.22}$$

ここで $\omega_\gamma=+\sqrt{\omega_0{}^2-\gamma^2/4}$ である．これが振動が減衰する様子をあらわす数学的表現である．また直接使うわけではないが，より一般的な場合にも成立するいくつかの点を強調しておきたい．

まず外力のない場合のこのような系のすべてのふるまいは，時間に関する指数関数(我々はそれを $e^{i\alpha t}$ と書いた)の和，あるいは重ね合せによってあらわされるということである．これは外力がない場合に試みてみるにはよい解である．α の値はふつうは複素数であって，実数

部分は減衰をあらわす．なお，最後に，第22章にサイン関数と指数関数との間に密接な数学的関係があることを述べたが，これは，物理的にいえば，ある物理的パラメーター（この場合には抵抗γ）が臨界値をこえたときに，振動的なものから指数的なものへ変化するということに現われる．

第25章
線型の系とまとめ

25-1　線型微分方程式

この章で述べるのは振動系の一面であって，今まで論じてきたような特別な系だけにかぎらず，もう少し一般的にみられる性質である．今までの特別な系の場合には，次の方程式を解いてきた．

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma m\frac{dx}{dt}+m{\omega_0}^2x=F(t). \tag{25.1}$$

さて，変数 x に関する“演算”のこの組合せには面白い性質がある．x の代りに $x+y$ を代入すると，x と y に関する同じ演算の和が得られる；あるいは，x に a をかけると，同じ組合せを a 倍したものが得られる．これを証明するのはわけない．ところで，(25.1)式の字を全部書くのはめんどうだから“符牒”として $\underline{L}(x)$ という記号で代用することにする．この記号が出てきたら，それは(25.1)式の左辺の式中に x を代入したものを意味する．この書き方にしたがえば，$\underline{L}(x+y)$ は次のことを意味する．

$$\underline{L}(x+y)=m\frac{d^2(x+y)}{dt^2}+\gamma m\frac{d(x+y)}{dt}+m{\omega_0}^2(x+y). \tag{25.2}$$

($\underline{L}$ のようにアンダーラインをつけるのは，ふつうの関数と区別するためである.) これを**演算子記号**ということもあるが，そんなことはどうでもよいのであって，要するに“符牒”なのである．

さて，最初に述べたことは

$$\underline{L}(x+y)=\underline{L}(x)+\underline{L}(y) \tag{25.3}$$

ということであって，これはもちろん $a(x+y)=ax+ay$, $\dfrac{d(x+y)}{dt}=\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}$ 等々から出てくることである．

二番目に述べたことは，定数 a に対して

$$\underline{L}(ax)=a\underline{L}(x) \tag{25.4}$$

ということである．(実際には(25.3)と(25.4)との間には，密接な関係がある．というのは(25.3)に $x+x$ を代入すると，これは(25.4)で $a=2$ とおいた場合に等しくなる，等々だからである.)

もっと複雑な問題では，$\underline{L}$ の中に微分や項がもっとたくさんあるかもしれない；そのとき問題となることは，(25.3)と(25.4)の二つの方程式が成り立つかどうかということである．もし成り立つならば，そのような問題を線型問題と名付ける．この章で述べるのは，系が線型であるためにもっているという性質であって，いままでは，ある特別な方程式をある特別な方法で求めたのであるが，その結果のあるもの

には，一般性があるということについて認識を新たにすることにしよう．(25.1)という特定の方程式についてはくわしく取り扱ってきたが，そのときすでにふれておいたような線型微分方程式の若干の性質について，これから勉強しよう．まず最初の大切な性質は，次のようなものである：いま，過渡振動，いいかえれば駆動力のはたらいていない自由振動の微分方程式を解くものとしよう．すなわち

$$\underline{L}(x)=0 \tag{25.5}$$

を解くものとする．そこで，何かひねりまわして一つの特解が得られたとし，それを x_1 と呼ぶことにしよう．すなわち $\underline{L}(x_1)=0$ となるような x_1 が求められたとしよう．ところで ax_1 もまたこの同じ方程式の解である；この特解に任意の定数をかければ，新しい解が得られる．いいかえれば，ある“大きさ”の運動が解であったとすれば，その2倍の“大きさ”の運動もまた解である．

証明：$\underline{L}(ax_1)=a\underline{L}(x_1)=a\cdot 0=0$.

次にまた，いろいろとひねくりまわして x_1 という**一つの**解の他に，もう一つの解 x_2 もみつけられたとしよう．(過渡現象の解を求めるために $x=e^{i\alpha t}$ を代入したとき，α の値が**二つ**，すなわち x_1 と x_2 という二つの解が得られたことを思い出してほしい．) そのときに x_1+x_2 という組合せもまたその解であることを証明しよう．いいかえると，$x=x_1+x_2$ とおくと x もまたこの方程式の解だということである．何故だろうか？　それは，もしも $\underline{L}(x_1)=0$ および $\underline{L}(x_2)=0$ であれば，$\underline{L}(x_1+x_2)=\underline{L}(x_1)+\underline{L}(x_2)=0+0=0$ だからである．したがって，もし線型系の運動の解がいくつかみつかれば，それらをみな加え合わせたものもまた解である．

これらの二つの考え方をまとめると，一方の解を6倍したものと他方の解を2倍したものの和もまた，もちろん解であることがわかる．というのは，x_1 が解であれば，αx_1 も解であるからである．したがってこれらの二つの解のどんな組合せ，例えば $\alpha x_1+\beta x_2$ もまた解である．たまたま解を三つみつけることができたとすると，それを勝手に組み合わせたものも解である等々．しかし，いまの振動の問題に対して得られた**独立解***の数はわずかに**2個**である．一般の場合には，得られる独立解の数は，**自由度**と呼ばれる数によってきまる．このことについては，ここではあまりくわしく論じないが，2階の微分方程式に対しては独立解が2個だけであって，その両方をすでに見出したわけなのである．だから，いまの場合は，もっとも一般的な解が得られているといえる．

さてここで次の定理に移ろう．この定理は，系が外力の影響を受けているような場合にあてはまる．いま方程式が

$$\underline{L}(x)=F(t) \tag{25.6}$$

であるとし，その一つの特解が得られたとしよう．例えば太郎の得た

* 他の解の1次組合せであらわされない解を，独立であるという．

解が $x_{太}$ であり，$\underline{L}(x_{太})=F(t)$ であるとする．そしてさらにまた別の解を求めるとしよう．そこで太郎の解に，自由振動の方程式(25.5)の解の一つ，例えば x_1 を加えるとしよう．そうすると(25.3)から

$$\underline{L}(x_{太}+x_1)=\underline{L}(x_{太})+\underline{L}(x_1)=F(t)+0=F(t) \qquad (25.7)$$

となることがわかる．したがって“強制”解にどんな“自由”解を加えても，やはり解である．この自由解を**過渡解**と名付ける．

外力が全くはたらいていない系に外力を突然加えると，前に解いたような正弦波の形の定常解にすぐなるわけではなく，しばらくの間は，過渡的なものになり，それは時間が十分長くたつと減衰してしまう．“強制”解は，外力によって駆動されているから減衰しない．非常に長い時間がたった後には，最終的に解は唯一であるが，初期においては異なる条件に対して異なる運動が起こる．それは系の運動がどのように始められたかということによってきまる．

25-2 解の重ね合わせ

さてここで，また別の面白い定理について述べる．まず，ある特定の強制力 F_a を考え(例えば，ある $\omega=\omega_a$ をもった振動的なものとしてもよいが，得られる結論は F_a がどんな形の関数であっても成立する)，そしてこの強制運動の解が得られたものとしよう(過渡振動があってもなくてもよい)．さて次に，何か別の力，例えば F_b がはたらいていると考えて，同じ問題をこの別の強制力に対して解く．そこへ誰かがやってきて，“新しい問題があるんだけれどなあ，F_a+F_b という力がはたらいている場合なんだ”といったとする．さて，この問題は解けるか？ もちろん解ける．というのは，それぞれの強制力を別々に考えてたときの二つの解，x_a と x_b との和が解となるからである．――何とも実に素晴らしいことである．(25.3)式を使えば，次のようになる．

$$\underline{L}(x_a+x_b)=\underline{L}(x_a)+\underline{L}(x_b)=F_a(t)+F_b(t). \qquad (25.8)$$

これが，線型な系に対するいわゆる**重ね合わせの原理**と呼ばれるものの例であって，これは非常に重要なものである．これは次のような意味をもっている．いま何か複雑な力が働いているときに，その力が，どんな方法でもいいが，都合のいいようにいくつかの別々の力にわけて，その和としてあらわすことができ，そしてそのおのおのの力に対しては方程式がとけるという具合に単純なものだとすると，**全体の**力に対する解が求められる．すなわちそれぞれの力を加え合わせて，もとの**力**を合成するのと同様にして，それぞれの**解**を加え合わせてやれば，それでよいのである(図 25-1)．

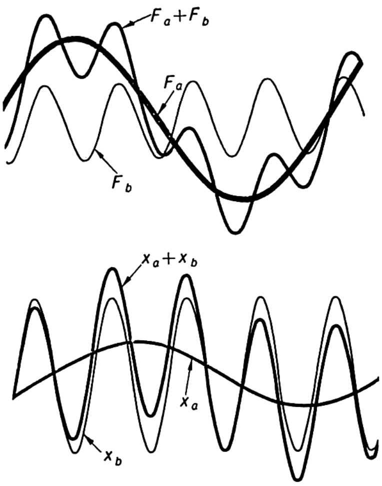


図 25-1 線型系の重ね合わせの原理の例

重ね合わせの原理の別の例を考えよう．第 12 章で，電気学の法則の重要な事実の一つとして，次のようなことを述べた．すなわち，いまある電荷 q_a の分布があったとして，これらの電荷によって点 P に生ずる電場 E_a を計算したとする．一方，また別の電荷 q_b の分布があって，これらの電荷によって同じ点に生ずる電場 E_b も計算したとする．

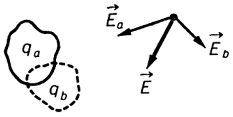


図 25-2　静電気における重ね合わせの原理

そのとき，もしも両方の電荷分布が同時に存在したとすれば，点 P における電場は，一方の分布による E_a と他方のものによる E_b との**和**である．いいかえれば，ある一つの電荷による電場がわかっているとすれば，電荷がたくさんある場合の電場は，それぞれの電荷について個別に得られる電場の単なるベクトル和にすぎない．これは上に述べた定理，すなわち，いま二つの力が同時にはたらいたときの結果がわかっているならば，これらの力がまとまって一つの力としてはたらいたと考えたとき，その力に対する応答は，それぞれに対する応答の和であるということと全く同等なものである．

このことが何故電気について成り立つかといえば，電場をきめる電気の大法則であるマクスウェルの方程式が**線型**の微分方程式であって，(25.3)のような性質をもっているからである．外力に対応するものは電場を生ずる**電荷**であり，電荷の関数として電場をきめる方程式は線型である．

この定理のまた別の面白い例として，いくつもの放送局がみな放送をしているのに，ある特定の放送局に“同調”することがどうしてできるのかという問題を考えてみよう．放送局というものは，要するに，非常に周波数の高い振動電場を発信し，それが我々の受信機のアンテナにはたらくのである．もちろん音声の信号を搬送するために，この電場の振動の振幅は変えられている．すなわち変調されているのであるが，その音声の周波数は非常に低いから，そのことについては問題にしないことにする．いま“この放送局は 780 キロサイクルで放送しております”というのをきけば，それはその局のアンテナの電場が毎秒 780,000 回振動し，そしてそれが我々のアンテナの中の電子を同じ周波数で上げ下げしているという意味である．そこで，これと同時に同じ町のもう一つの放送局では，別の周波数，例えば毎秒 550 キロサイクルで放送しているとする．そうすると，我々のアンテナの中の電子はその周波数によっても動かされるのである．そこで問題になるのは，同じラジオに入ってくる 780 キロサイクルの信号と，550 キロサイクルではいってくるものとをどうして区別できるのかということである．たしかに二つの放送が同時に聞こえたりはしない．

ラジオの電気回路の最初の部分は線型回路であるが，F_a+F_b という電場によって生ずる力に対する応答は，重ね合わせの原理によって，x_a+x_b である．したがって一見したところでは，これらの信号をときほぐすことは不可能であるようにみえる．実際のところ，重ね合わせの原理という定理そのものが，我々の系のなかに両者が同時に存在することを**避けることができない**ということを要請しているかにみえる．しかしここで，**共鳴**回路においては，応答曲線，すなわち，単位 F 当りの x の大きさを，周波数の関数としてあらわしたものは，図 25-3 のようであることを思いだしてほしい．もしも Q が非常に大きいような回路であれば，応答には非常に鋭い極大があるはずである．さてそこで，二つの放送局の強さがほぼ等しくて，二つの**力**の大きさがほぼ

等しいとしよう．そうすると実際におこる応答は，x_a と x_b との和である．しかし図 25-3 では，x_a は非常に大きいのに x_b は小さい．したがって，二つの信号の強さが等しいにもかかわらず，一方の局の送信周波数 ω_a に同調された受信機の鋭い共鳴回路を通り抜けると，その局に対する応答が，もう一方の局に対するものよりもはるかに大きくなる．したがって，両方の信号がはたらいている場合の全応答は，大部分 ω_a から成り立っており，結局我々の欲している局をえらび出したことになる．

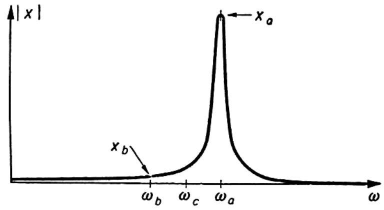


図 25-3 同調の鋭い共鳴曲線

ところで同調というのは何か？ どうやって同調をするか？ 我々は回路の L あるいは C を変えることによって ω_0 を変えるのである．というのは，回路の周波数は，L と C との組合せに関係しているからである．特にたいていのラジオは，キャパシタンスを変えられるようにできている．いま，ラジオの同調をやりなおし，ダイヤルを新しい目盛のところにおいて回路の自然周波数をかえ，例えば ω_c にしたとする．このようなときには，どちらの局もきこえない．周波数 ω_c のまた別の局がないかぎり，音はしない．さらにキャパシタンスを変えつづけていって，共鳴曲線が ω_b のところにくるようにすれば，もちろんもう一方の局が聞える．これがラジオの同調である；これもまた重ね合わせの原理であって，それに共鳴応答* が結びついたものである．

この議論のしめくくりとして，非常に複雑な外力がはたらいている場合に，線型問題についてさらに解析を進めると，どのようなことになるか，定性的に述べてみよう．その取り扱い方はいろいろあるが，それらのうちで，問題を解くのに特に有効な一般的な方法が二つある．そのうちの一つはこうである：それは，ある特殊な，よくわかっている力，例えばいろいろ違った周波数の正弦波などについては問題を解くことができるものとする．外力が正弦波の場合には，子供でも解けるような問題である．いわゆる“子供の遊び”的な問題である．さてそこで問題は，その非常に複雑な力が二つ，あるいはそれ以上の数の“子供の遊び”力の和としてあらわせるかどうかということである．すでに図 25-1 に示したものは，かなり複雑な曲線であるが，正弦波をもっと加えれば，もちろんもっと複雑なものにすることができる．すなわち，このようにして非常に複雑な曲線をつくることも当然可能である．そしてまた，その逆もまた真なのである：ほとんどあらゆる曲線は，波長(あるいは周波数)の異なる正弦波を**無限個**加え合せれば，つくりだすことができ，それぞれの正弦波については解はわかっているのである．そこで，我々にとって必要なのは，与えられた F を作るのには，それぞれの正弦波がどれだけずつあればよいかということだ

* 最近のスーパー・ヘテロダイン受信機の実際の動作はもっと複雑である．増幅器はすべて一定の周波数(IF 周波数という)に同調されていて，可変な同調周波数を持った発振器と入力信号とを非線型回路中で結びつけ，IF 周波数に等しい新しい周波数(信号の周波数と発振器の周波数の差)を作り出し，そしてそれを増幅するのである．このことについては第 50 章で述べる．

けである．そうすれば我々の問題の解 x は，F を構成しているそれぞれの正弦波に，x と F の倍率をかけてその和をとったものである．この解法を**フーリエ変換**あるいは**フーリエ解析**という．いまここでは，このような解法を実際に使うというのではない；そこに含まれている考え方を述べておくだけにとどめておく．

複雑な問題を解くもう一つの方法は次のような実に面白い方法である．まず，何らか大変な頭脳力によって，ある特殊な力，すなわち**衝撃**に対してこの複雑な問題が解けたと仮定しよう．この力は急に加えられ，そしてやまる；それでおしまいである．実際には，単位の強さの衝撃について解きさえすればよいのであって，他の強さについては適当な数をかけてやればよい．我々にわかっているとおり，衝撃に対する応答 x は減衰振動である．そこで，他の力，例えば図25-4のような力についてはどのようなことになるであろうか？

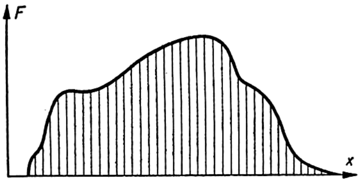


図25-4　複雑な力も鋭い衝撃の連続として取り扱うことができる

このような力は，続けざまに金槌で叩くようなものだと考えることができる．はじめには力は加わっていないが，突然そこにきれめのない力——衝撃，衝撃，衝撃，衝撃，……がはたらき，そしてやまる．いいかえれば，連続的な力を非常に間隔の短い衝撃のつながりであると想定するのである．そこで，衝撃が一つ加わったときの結果はわかっているから，衝撃の全つながりに対する結果は減衰振動の全つながりになる：まず最初の衝撃に対する曲線があって，それに(わずかに遅れて)次の衝撃に対する曲線を加え，それにさらに3番目の衝撃の曲線を加え，というようなものになる．したがって，数学的には，衝撃に対する答がわかっていれば，任意の関数に対する完全な解を書きあらわすことができる．どんな他の力に対しても，単に積分しさえすれば答が得られる．この方法は**グリーン関数法**と呼ばれる．グリーン関数は衝撃に対する応答なのであって，衝撃に対する応答を加え合わせることによってどんな力でも解析してしまおうという方法をグリーン関数法というのである．

これらの二つの手法にもりこまれている物理的原理は，線型方程式だけに関係した非常に簡単なものであって，わかりやすい．しかしそこに入ってくる数学，複雑な積分などは，いまここで取り扱うにはいささか高級すぎる．諸君が将来もっと数学を勉強すれば，おそらくいつかはいずれこの問題のところに帰ってくるであろう．しかし，**考え方**そのものは実に単純なものなのである．

終りに，線型系がなぜそれほど重要であるのかということについて若干述べておこう．答は簡単である：それは解くことができるからである！　したがって，たいていの場合，我々は線型の問題を解く．第2の(そして最も重要な)理由は，**物理の基本法則**は線型である場合が多いということである．例えば，電気の法則に関するマクスウェル方程式は線型である．量子力学の偉大な法則は，我々の知るところでは線型である．**これが，**我々が線型方程式に多くの時間をかける理由である：もし線型方程式を理解することができれば，原理的にいって，

たくさんの事柄を理解する準備ができたことになる．

線型方程式がでてくるもう一つの場合について述べておこう．それは，変位が小さいときには，多くの関数は線型で近似できるということである．例えば，単振子を考えると，この運動の正確な方程式は次のようになる．

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{g}{L}\right)\sin\theta. \tag{25.9}$$

この方程式は楕円関数で解くことができるが，いちばん簡単な解法は，第9章のニュートンの運動法則のところで述べたように，数値的に解くことである．非線型方程式を解くには，数値解法以外にはうまいものがないのがふつうである．ところでθが小さいときには，$\sin\theta$はほとんどθに等しい．したがって線型の方程式になる．実際小さな現象は線型であることが多い：いまの例でいえば，振子が小さな弧にそってふれることである．バネを少しひっぱると，力はバネの延びに比例するというのももう一つの例である．ひどく引っぱるとバネはだめになる．そうすれば，力は距離の全く別な関数になってしまう！ 線型方程式は重要である．全く重要で，実際のところ，物理学や工学では，その時間の半分は線型方程式を解いているであろう．

25-3 線型系における振動

ここで，今までの二，三の章で述べてきたことをふりかえってみよう．振動子の物理は，数学の陰にかくれてしまいがちである．その物理は，実際非常に単純なものであって，しばらく数学を忘れることにすれば，振動系でおこることは殆どみな理解できることがわかる．まず，バネとおもりだけを考えてみると，何故その系が振動するかはすぐにわかる——それは慣性があるためである．おもりを引き下げると，力はそれをもとに引きもどす；おもりがつりあいの点，ゼロにきたときには，急にとまるわけにはいかない；運動量があるからおもりは動き続けて反対側に振れる，そしてまたそこからもどったり，行ったりする．したがって，摩擦がなければ，振動になることが**当然期待され**，また実際そうなるのである．しかしごくわずかでも，摩擦があると，次の周期では振れは前のときと全く同じ大きさにはならない．

ところで，周期を重ねていくごとにどんなことが起こるか？ それは摩擦の種類と強さによる．そこでいま，振幅が変化すると共に，慣性やバネの力などの他の力といつでも同じ割合の大きさになるように変化する摩擦力をでっちあげることができたとしよう．いいかえれば，小さい振動の場合には，大きい振動の場合よりも弱くなるような摩擦力である．ふつうの摩擦力はこのような性質を持っていないので，速度に比例するような——したがってそれは大きな振動では強く，小さい振動では弱い——摩擦を生じさせるためには特殊な摩擦をうまい具合に考え出さなければならない．もしそのような摩擦をつくることができたとすると，次々の周期の終りの点では，系は振幅がちょっと小

さくなったという違いがあるだけで，他は最初と全く同じ条件にある．すべての力は同じ割合だけ小さくなっている：バネの力は小さくなっているし，加速度が弱くなっているから，慣性の影響も低くなっているし，また摩擦も巧妙な設計で小さくなっている．実際にこのような摩擦があったとすると，振幅が減少するということを除いては，各振動は最初のものと全く同じものになることがわかる．最初の周期で，例えば振幅がはじめの90%に落ちたとすれば，次の周期ではその90%のまた90%に落ちるということが続く：**振動の大きさは各周期ごとに同じ割合だけずつ小さくなる**．指数関数は，まさにこのような曲線である．それは同じ時間の間に，同じ割合で変化する．すなわち，前の周期のときの振幅に対するいまの振幅の割合を a とすれば，この次のときには a^2 であり，その次のときには a^3 になる．したがって振幅はある定数を往復した回数だけ冪乗したものになる：

$$A = A_0 a^n. \qquad (25.10)$$

しかし，もちろん n は t に比例するから，一般解は何らかの形の振動になるのはまったく明らかであり，ωt のサイン，あるいはコサインに，b^t といったように変化する振幅をかけたものになるであろう．ところが b が正で1よりも小さければ，b は e^{-c} と書ける．これが，解が $e^{-ct}\cos\omega t$ というような形になる理由である．簡単な話である．

摩擦がそれほど人工的なうまいものではないときにはどうなるであろうか；例えばふつうにテーブルをこするときのように，摩擦力がある一定の値で，半周期ごとに方向の変わる振動の大きさとは無関係というような場合である．この場合には方程式はもはや線型ではない．それを解くことは難しくなり，第2章で述べた数値解法で解くか，あるいは半周期ごとに別々に考えて解くかするより他はない．数値解法はすべての方法のうちで最も強力であって，どんな問題でも解くことができる．我々が数学的解析を用いることができるのは，問題が簡単なときに限るのである．

数学的解析は一般にいわれているほど素晴らしいものではない；それはごく簡単な方程式しか解くことができない．方程式がちょっと複雑になると，ほんとにかすかに複雑になっただけでも——もう解析的に解くことはできない．これに対して数値解法は，この講義のはじめのところで宣伝したように，物理的に興味のあるどんな方程式をも取り扱うことができるのである．

次に，共鳴曲線についてはどうであろうか？　何故，共鳴があるのだろうか？　まず，ちょっとのあいだ摩擦はないものとして，自分自身で振動しているようなものを考えてみよう．振子がちょうど通りすぎるたびごとに後ろから軽くたたいてやると，振子を気が狂ったように振動させることができるのはいうまでもない．しかし目をつぶって振子を見ずに任意の等時間間隔で軽くたたいてやると，どんなことが起こるだろうか？　ときどきは反対方向に動いているときにたたいていることに気づくであろう．もちろん，タイミングがちょうどよくて，

それぞれちょうどうまいときに軽くたたくこともある．そのようなときには，振子はだんだんだんだん大きく振れる．したがって，摩擦がないときには，異なる頻度に対して，図 25-5 の実線のような曲線になる．これで共鳴が定性的に理解できた：曲線の正確な形を得るためには勘定をやった方がよいだろう．ω_0 を振動子の固有振動数とすると，$\omega\to\omega_0$ のとき曲線は無限大に近づく．

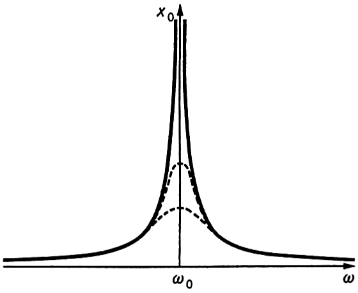


図 25-5　摩擦の程度がいろいろの場合の共鳴曲線

さて，次に摩擦が少しあるとしてみよう；そうすると，振動子の変位が小さいときには，摩擦はたいした影響を及ぼさないから，共鳴曲線は共鳴に近い部分を除いては前と変わらない．共鳴の近くで，曲線は無限大にならないで，我々が毎回軽くたたくことによってする仕事が，その周期の間の摩擦によるエネルギー損失をちょうど補うような高さになるだけである．したがって曲線の頂上は丸くなる．――無限大にはならない．摩擦がより大きければ，曲線の頂上はさらにもっと丸くなる．ところで“曲線の幅は摩擦に影響されると思っていた”という人があるかもしれない．これは曲線をひくときに，通常は曲線の最上部を単位高さであるとするからである．しかし，すべての曲線を同じ目盛で描いた方が，数学的表現を理解するのにより簡単である；そうしてみると，起こっていることは摩擦が頭をおし下げているということだけである！　摩擦が減れば，摩擦のためにつぶれない前のとんがりに更に近づくので，幅が比較的狭くみえる．すなわち曲線の頭が高ければ高いほど，最大の高さの半分になるところの幅は狭い．

おわりに，摩擦が非常に大きい場合について述べよう．摩擦が非常に大きければ，系は振動を全く起こさないことになる．バネの力は摩擦力に勝ってやっと動けるだけであり，つりあいの点にじりじりとゆっくり近付く．

25-4　物理学における類似

このまとめにおいて述べるべき次の点は，質量とバネだけが唯一の線型系ではないということである；他にもあるのである．なかでも線型回路と呼ばれる電気系があって，それは力学的な系と全く類似しているのである．電気回路の素子が**何故**それぞれの働きをするかについては，我々はまだはっきり学んでいない――いまのところそれはわかっていなくてもよろしい；それらの素子が上に述べたような働きをするのは，実験的にたしかめられる事実であるということにしておいてもよい．

もっとも簡単な例について考えてみよう．導線，これは単なる抵抗であるが，これを１本持ってきて，それに電位差 V を与えたとしよう．ところでこの V は次のようなことを意味する：ある電荷 q を導線の一端から他端まで運ぶとすると，そのときになされる仕事量は qV である．電位差が大きければ大きい程，電荷が高電位端から低電位端へいわば“落下”するときにする仕事は大きい．というわけで，一端から他端へ行くときに，電荷はエネルギーを出す．ところでこの電荷は端

から端まで単に真直ぐとんで行くわけではない；導線の中の原子は，その流れにある抵抗を及ぼすのであって，その抵抗の法則はほとんどすべての通常の物質について次のとおりである：いま電流 I が流れているとする．すなわち毎秒これこれの量の電荷がころがり落ちてゆくということであれば，導線を通じて毎秒ころがり出てくる個数は，我々がどれ程強く押しているかということに比例する——いいかえれば，どれだけの電圧があるかということに比例する：

$$V = IR = R\left(\frac{dq}{dt}\right). \tag{25.11}$$

この係数は**抵抗**と呼ばれ，この方程式はオームの法則といわれる．抵抗の単位はオームである：それは1アンペア当り1ボルトに等しい．力学系では，このように速度に比例した摩擦力を得ることは難しいが，電気系では非常に簡単であり，この法則は，大半の金属に対してきわめて正確に成りたつ．

毎秒どれだけの仕事がされたか，すなわち電力損失，あるいは電荷が導線中をころがり落ちる間にどれだけのエネルギーが放出されたかということに，我々は関心をもつのである．電圧 V の間を電荷 q を運べば，仕事は qV であるから，毎秒なされる仕事は $V\left(\dfrac{dq}{dt}\right)$ となるであろう．それは VI あるいはまた $IR\cdot I = I^2R$ に等しい．これは**熱損失**と呼ばれる——これはエネルギーの保存によって，どれだけの熱が毎秒抵抗の中で発生するかということである．普通の白熱電球を光らせているのはこの熱である．

もちろん力学系には，他にも面白い性質がある．例えば質量(慣性)もそうであるが，この慣性に対応する電気的なものもまた存在するのである．すなわち，インダクターと呼ばれるものを作ることができるのであって，電流がいったんそれに流れはじめると**止まりたがらない**という性質，つまりインダクタンスと呼ばれる性質をもっている．電流を変えるためには電圧が必要である！　電流が一定であれば，インダクタンスに電圧はかからない．直流回路はインダクタンスに何の関係もない；インダクタンスの影響があらわれるのは，電流を**変えた**ときだけである．その方程式は

$$V = L\left(\frac{dI}{dt}\right) = L\left(\frac{d^2q}{dt^2}\right) \tag{25.12}$$

である．インダクタンスの単位は**ヘンリー**であって，1ヘンリーのインダクタンスに1ボルトの電圧が加えられると電流に毎秒1アンペアの変化が起こるようなものである．考えようによっては(25.12)式はニュートンの法則の電気的類似である；V は F に対応し，L は m に対応し，I は速度に対応する！　これらの2種類の系に対してこのようにして導かれる方程式はすべて同じものになる．というのは，すべての方程式において，どの文字でもそれに対応する相手の文字に変えて同じ方程式を得ることができるからである！　二つの系においては我々が導き出すすべてのものが対応をもっている．

さてそれでは，のびに比例した力がはたらく力学的なバネには，どんな電気的なものが対応するであろうか？ もし$F=kx$という式から出発して$F\to V, x\to q$というおきかえをすると，$V=\alpha q$を得る．こういうものが実際に**ある**のである．実際それは3種の基本的回路素子のうちで我々が本当に理解できる唯一のものである．というのは，我々は1組の平行板についてすでに勉強した．それぞれの平板に符号が反対で，量の等しい電荷があるとき，それらの平板の間の電場は，電荷の大きさに比例することを知った．したがって，単位電荷を一方の平板から他方の平板まで，すきまをよこぎって動かすときになされる仕事は，正確に電荷に比例する．この仕事が電位差の**定義**であり，それは一方の平板から他方への電場の線積分に等しい．この比例定数は，歴史的な理由から，Cではなくて $\frac{1}{C}$ と呼ばれることになっている．Cと呼んでもよかったのだけれども，そうはならなかった．そこで

$$V=\frac{q}{C} \tag{25.13}$$

となる．容量Cの単位はファラッドである；1ファラッドの蓄電器の各平板に1クーロンの電荷があると1ボルトの電位差が生じる．

ここで，アナロジーが成り立つのだが，振動回路に対応する方程式はmの代りにLを，xにはq，…，等々を代入することによって，次のようになる．

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\gamma m\left(\frac{dx}{dt}\right)+kx=F, \tag{25.14}$$

$$L\left(\frac{d^2q}{dt^2}\right)+R\left(\frac{dq}{dt}\right)+\frac{q}{C}=V. \tag{25.15}$$

さて，(25.14)について学んだことは，すべて(25.15)に適用するように変換することができる．**得られる結果**はすべて同じである；全くよく一致するので，それを利用して素晴らしいことができるのである．

いま，非常に複雑な力学系があるとしよう；一つのバネに一つのおもりがついているだけというようなものではなく，いくつかのバネにいくつかのおもりがついていて，それらが互いに連結されているものとしたら，いったいどうすればいいだろうか？ 解く？ それもいいかもしれない；しかし，まあ考えてもみたまえ．我々が取り扱おうとしているものと同じ方程式を持つ**電気回路**を組むことができるのだ！ 例えば，バネにおもりがついている場合を取り扱おうとするならば，電気回路を適当に組んでインダクタンスがおもりの質量に比例するようにし，抵抗はそれに対応する$m\gamma$に比例し，$\frac{1}{C}$ はkに比例するようにし，それらの比がすべて等しくなるようなものにした方がよいのではないか？ そうすれば，当然この電気回路は，Vに対応して(Vもまたはたらいている力に対応するようにしてある)，qがどのように変わるにしても，xもまさにそのとおりに力に応答して変わるであろう．こういう意味で二つのものは全く同等である！ したがってたくさんの素子がいろいろな具合に連結された複雑な代物のときには，抵

抗やインダクターやキャパシターをたくさんつなぎあわせて，力学的に複雑な系を真似すればよい．こうすると，どんな利点があるのだろうか？ 互いに全く同等であるから，どちらの問題も同程度に難しい(あるいはやさしい)筈である．電気回路が使えることをみつけたことによる利点は，**数学的な方程式**を解くのが少しでも容易になったというようなものではない(もっとも電気技術者たちは**そうしている**のだが)．この等価性に注意していた本当の理由は，電気回路の方が**組むこと**もやさしく，また系の中で何かを**変えること**もやさしいからである．

いま，我々が自動車を設計したとして，それがどこかのデコボコ道を走るとき，どのくらいゆれるかを知りたいものとする．そこで，電気回路を組んで，インダクタンスで車輪の慣性を代表させ，車輪のバネをあらわすのにはバネ定数をキャパシタンスで代表させ，また，ショック・アブソーバーは抵抗で代表させる．自動車の他の部分もこのように代表させる．次に，デコボコ道がいる．よろしい．それでは発電機から電圧をかけて，それでこういったデコボコをあらわすことにしよう．そしてどれか適当なキャパシターの電荷を測定して，左側の車輪がどんなふうにガタガタするかをみてみよう．そこで測定してみたら(これは容易なことである)，すこしデコボコがひどすぎることがわかったとする．さて，ショック・アブソーバーをもっとつけるべきなのだろうか，あるいは減らすべきなのだろうか？ 自動車のような複雑な代物を取り扱っているときに，アブソーバーをとりかえて，また方程式をはじめから解きなおすのだろうか？ とんでもない！ ダイヤルをまわすだけでよい；たとえば10番目のダイヤルは3番目のアブソーバーに対応している．そこでアブソーバーをふやしてみる．ガタガタは一層ひどくなった．――よろしい．それでは減らしてみよう．まだわるい；それではバネの硬さを変えてみよう(例えば17番目のダイヤル)．というようにしてこういったものを**電気的**にみな変えてみるのだが，それにはツマミをまわすだけでよい．

これはアナログ計算機というものである．これは解きたい問題を，他の問題に真似て解こうというもので，そのものは同じ方程式に従うけれども，別な自然現象に属し，作るのも，測定するのも，調節するのも，こわすのも(！)容易なようなものである．

25–5　直列および並列インピーダンス

最後に，まとめとはいえないかもしれないが，重要なことを述べておこう．これは，要素が2個以上あるような電気回路に関するものである．例えばインダクターとレジスターとキャパシターとを図24-2のように結合したとすると，電荷はみな三つの要素のすべての中を通る．したがって，このように単一に並べたものの中における電流は導線中のどこででも等しい．それぞれの中での電流が等しいから，Rの両端の電圧はIR, Lの両端の電圧は$L\left(\frac{dI}{dt}\right)$等々である．したがって

全電圧低下量はこれらの和であり，(25.15)式のようになる．すでに学んだように，正弦波状の力に対する定常的応答を求める方程式は，複素数を用いて解くことができる．そしてそうすれば，$\hat{V}=\hat{Z}\hat{I}$ となる．この $\hat{Z}$ はこの回路の**インピーダンス**である．これは正弦波状の電圧 $\hat{V}$ を加えると電流 $\hat{I}$ が得られることを示している．

さてここで，もっと複雑な回路について考えてみよう．その回路は二つの部分から成り，それぞれインピーダンス $\hat{Z}_1, \hat{Z}_2$ をもっているものとして，それらを**直列**(図 25-6a)につないで，電圧をかけたとしよう．どんなことが起こるか？ こんどはちょっと複雑であるが，$\hat{Z}_1$ を流れる電流が $\hat{I}$ であるとすると，$\hat{Z}_1$ の両端にかかる電圧は $\hat{V}_1=\hat{I}\hat{Z}_1$ である．同様にして $\hat{Z}_2$ の両端にかかる電圧は $\hat{V}_2=\hat{I}\hat{Z}_2$ である．**両方を同じ電流が流れる**．したがって全電圧は二つの部分の電圧の和になり，$\hat{V}=\hat{V}_1+\hat{V}_2=(\hat{Z}_1+\hat{Z}_2)\hat{I}$ に等しい．これは，全回路の電圧は $\hat{V}=\hat{I}\hat{Z}_s$ と書くことができることを意味する．ここで，直列に結合された系の $\hat{Z}_s$ は別々の部分の二つの $\hat{Z}$ の和である．

$$\hat{Z}_s=\hat{Z}_1+\hat{Z}_2. \tag{25.16}$$

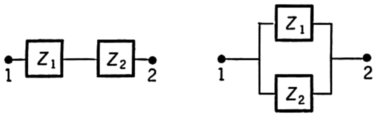


図 25-6 二つのインピーダンスを直列につないだ場合と並列につないだ場合

ものを結合する方法はこれだけしかないわけではない．他のつなぎ方，すなわち**並列**結合をしてもよい(図 25-6b)．そうすると，もしも結線用の導線が完全な導体であるならば，端子間の電圧がそのまま両方のインピーダンスにかかり，それぞれの電流は独立に流れることがわかる．したがって $\hat{Z}_1$ を流れる電流は $\hat{I}_1=\dfrac{\hat{V}}{\hat{Z}_1}$ に等しい．$\hat{Z}_2$ の電流は $\hat{I}_2=\dfrac{\hat{V}}{\hat{Z}_2}$ である．**電圧は同じ**である．さて，端子に供給される全電流は二つの部分に流れる電流の**和**：$\hat{I}=\dfrac{\hat{V}}{\hat{Z}_1}+\dfrac{\hat{V}}{\hat{Z}_2}$ である．これは次のように書ける．

$$\hat{V}=\frac{\hat{I}}{(1/\hat{Z}_1)+(1/\hat{Z}_2)}=\hat{I}\hat{Z}_p.$$

したがって

$$\frac{1}{\hat{Z}_p}=\frac{1}{\hat{Z}_1}+\frac{1}{\hat{Z}_2}. \tag{25.17}$$

もっと複雑な回路も，場合によっては，それぞれの部分からはじめることによって簡略化することができる．すなわち，上に述べた方法に従って，連続した部分のインピーダンスを計算し，それらの回路を順々に結合していくのである．多くのインピーダンスがいろいろな具合に結合されている任意の回路があったとし，インピーダンスを持たない小さな発電機(発電機は電荷が通過すると電圧 V だけ高める)によって電圧を与えたとすると，次の原理が成り立つ：(1) どの分岐点においても分岐点に流れ込む電流の和はゼロである．というのは流れ込んでくる電流はすべて流れ出てこなければならないということである．(2) ある電荷をある任意の回路中を一巡させて，もとの出発点まで運んだときにする仕事はゼロである．これらの法則を，電気回路に関する**キルヒホッフの法則**という．これらの法則を適当に使うと，複雑な回路の解析を容易にすることができることが多い．すでに諸君は実験

のときにこのような回路を取り扱う必要に出くわしたかも知れないので，(25.16)および(25.17)式と関連づけて，ここで述べたのだが，これらについては来年またくわしく述べることにする．

演　　習 (1964 年)

ここに掲げるのは，ファインマン物理学講義に附随して行なう演習として，適切な練習問題を工夫して集めた最初のものである．1962-63 年には，ほとんどこの形で使った．問題の数はすでにだいぶ多く，優秀な学生でもこれをすっかり解くことができるとは思われない．しかしそれでも問題をもっとふやす必要がある．特に，数値的あるいは数学的には簡単であるが，その内容が核心にふれ啓発的であるようなものをふやす必要がある．そのような問題が毎年少しずつできてくるので，それに応じてこの問題集に加えるつもりである．

問題の番号のところに星じるしをつけたものがあるが，これは F. ストロング教授が集めたものの中からとったものである．それを使うことを許された同教授の好意に厚く感謝する．

1963 年 12 月 5 日

R. B. レイトン

第 1 章

この章に述べた考えと，諸君の経験や推量とをいっしょにして，次の演習問題をやってみ給え．精確な数値は**いらない**．

1-1　空気の密度は普通の状態ではおよそ 0.001 $\mathrm{g\,cm^{-3}}$，また液体空気では 1.0 $\mathrm{g\,cm^{-3}}$ である．

a) 1 $\mathrm{cm^3}$ あたりの空気分子の数は，普通の空気，液体空気でどのくらいか．

b) 空気 1 分子の質量はどのくらいか．

c) 標準温度，標準圧力 (NTP) の下で，一つの空気分子は，衝突と衝突との間に平均としてどのくらいの距離を進むか．この距離を**平均自由行程**という．

d) 普通の空気で，平均自由行程をおよそ 1 m にするためには，圧力をどこまで低くしなければならないか．

1-2　ある古生代の午後，雷雨があって，雨滴が 1 粒，平らな泥層に落ちてそこに痕を残した．それが化石となったものを，地質の学生が後になってほり出した．あつくて喉のかわいていたこの学生は水筒の水をグイと飲んだあと，ふと，この大昔の雨粒の水の分子をいまいくつ飲んだことになるだろうかと考えた．諸君が知っていることだけを使って，この分子の数を求め給え．(必要なことで諸君の知らないものについては適当に仮定し給え.)

1-3　グラスに水をいっぱい入れ，カリフォルニアでふつうの窓わくのところにおいたままにした．

a) すっかり蒸発してしまうには時間がどのくらいかかるか．

b) グラスの水からは $\mathrm{cm^{-2}s^{-1}}$ で分子がいくつ出ていくか．

c) a) に対する諸君の答と，全地球の平均降水量との間に関係があるならば，簡単にそれを論ぜよ．

1-4　すべての物体で原子が振動しているというならば，痕跡化石のように，時がたっても形の変わらないものがあるのは何故か．

1-5　正五角形の形をした結晶は存在しない理由を説明することができるか．(三角形，四角形，六角形は結晶形にふつうである.)

1-6　気体の圧力 P は，単位体積あたりのアトムの数 n，アトムの平均の速さ $\langle v\rangle$ と，どんな関係にあるべきであるか．(P は n とか $\langle v\rangle$ に比例すべきで

あるか，それとも直線関係よりももっとはげしく変わるべきであるか，ゆるく変わるべきであるか.)

1-7 熱というものが分子の運動だというならば，野球のタマの温度を高くして静止させておいたのと，温度を下げて速く動かしたのと，どこがちがうか.

1-8 機械が動いていると，摩擦によって，何故，またどのようにして熱が出るかを定性的に説明せよ．できれば，さらに，逆に熱から運動をつくって利用することはできないという理由を説明せよ.

1-9 化学者によれば，ゴムは原子が十文字に長くつながっている鎖からできているという．ゴムバンドをのばすとあたたかくなる理由を説明せよ.

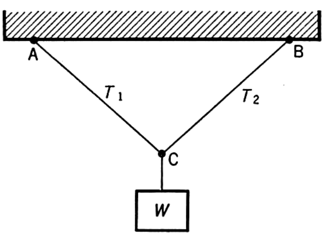
1-10 ゴムバンドにおもりをつるして，熱したらどうなるはずか．(答を出すには実際にやってみ給え.)

1-11 直径 d の同じ大きさの鋼のタマがたくさんあり，また容積 v の容器がある．容器の縦も横も深さもタマの直径よりはずっと大きい．容器にはタマは何個まで入るか，その最大の数を求めよ.

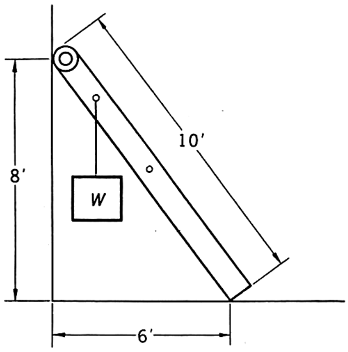
第4章

エネルギー保存の原理，または，仮想仕事の原理を使って，次の問題を解け.

4-1 下図のように，針金 ACB のまんなかから，$W=50$ lb のおもりが下がっている．$AC=CB=5$ ft. $AB=5\sqrt{2}$ ft. 針金にはたらく張力を求めよ.



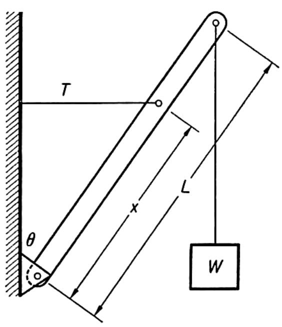
4-2 長さ 10 ft の一様な梯子がある．そのてっぺんにローラーがあって，これが滑らかな鉛直の壁にたてかけてある．梯子の目方は 30 lb である．てっぺんから 2.5 ft のところにある横棒から $W=60$ lb のおもりが下がっている．次の a), b) を求めよ.



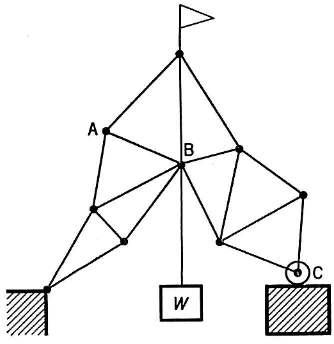
a) ローラーが壁を押す力.

b) 梯子が地面を押す力の水平成分，鉛直成分.

4-3 起重機がある．長さ L の一様な棒の根元は軸で止まっており，重さは w である．棒の下端の軸から距離 x のところから，針金が水平にはってあって，棒は鉛直から角度 θ だけ傾いている．そして重さ W が棒の上端から下がっている．水平の針金の張力を求めよ.



4-4 図の桁組は，軽いアルミニウムの柱でき

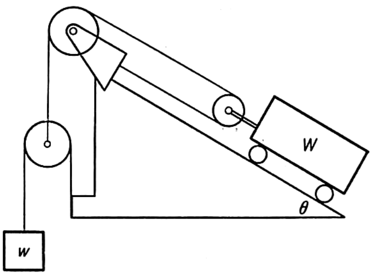


ていて，柱の端のところはみな自由にまわれるようになっている．Cにはローラーがあって，滑らかな板の上をころがる．さて職工が熔接焰で柱ABを熱したらその長さがxだけのび，おもりWは上下方向にyだけ動いた．

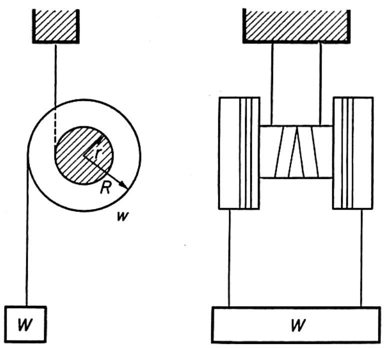
a) Wは上に動いたか，下に動いたか．

b) 柱ABの内部にはたらく力はどれだけか．(張力か圧縮力か，むきも求めよ．)

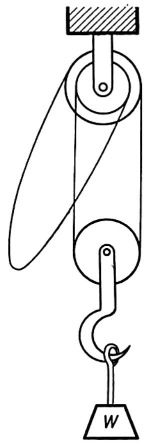
4-5　斜面の上に車がのっていて，おもりwでつりあっている．すべての部分の摩擦は無視してよい．車の重さWを求めよ．



4-6　重さwの糸巻き車の二つの半径はrとRとである．小さい方の半径にはひもが2本まきついていて，上の固定した支えから下がっている．大きい方の半径にもひもがまきついていて，図のようにおもりWが下がっている．Wが適当にえらんであって，ちょうど糸巻き車がつりあっている．Wを求めよ．



4-7　図の差動滑車の鎖には，1 ftあたりに輪がN個ある．上の滑車には，鎖の輪がきちんとはまるきざみがあって，大きい方の車の周囲にはn個，小さい方の車の周囲には$(n-1)$個のきざみがついている．(このきざみは，鎖の輪の二つ分にあたる．) 方々に摩擦があるので，おもりWを上げるのに要する力と下げるのに要する力との比がRになっている．どちらに動かしても摩擦は同じであるとして，Wを上げるのに要する力，下げるのに要する力を求めよ．



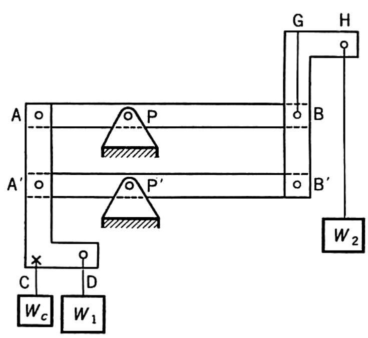
4-8　全体の重さがWで，自由に曲がる鎖の輪があって，それが滑らかな摩擦のない直円錐にはまっている．円錐の底面の半径はrで高さはhである．円錐の軸は鉛直で，鎖はこれにはまって水平な円になっている．鎖にはたらく張力を求めよ．

4-9　平行四辺形の枠$AA'BB'$がある．各頂点はジョイントになっていてPP'で軸に支えられている(鉛直面内に)．A, A', B, B', P, P'のところの摩擦は無視してよい．$AA'CD$と$BB'GH$は共に剛体であって，大きさは同じである．

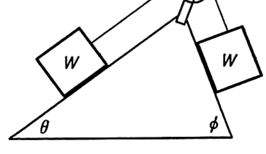
$$AP = A'P' = \frac{1}{2}PB = \frac{1}{2}P'B',$$

$$CD = GH = \frac{1}{2}AP.$$

W_1とW_2とがないときには，おもりW_Cがあるので，枠はつりあっている．0.50 kgのおもりW_1をDから下げたときには，どれだけのおもりW_2をHに下げたらつりあうか．

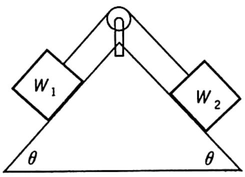


4-10　図で二つのおもりは等しく，摩擦はない．静止しているところから放したとする

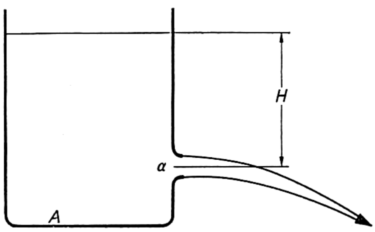


と，距離Dだけ動いた後に，おもりはどんな速さで運動しているか．

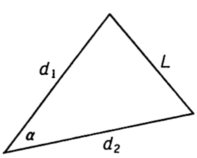
4-11　摩擦がないとして，おもりW_1とW_2とを静止しているところから放したとすると，距離Dだけ動いた後に，おもりはどんな速さで動いているか($W_1 > W_2$)．



4-12　断面積Aのタンクに，密度ρの液体が入っている．上面から距離Hだけ下のところに面積αの小さい穴があって，液体はそこから自由に流れ出る．液体に内部摩擦(粘性)がないとすれば，液体が流れ出る速さは何程か．



4-13　ここまでの問題を解いて，次のことがわかったはずである．すなわち，摩擦のない，静止つりあいが出てくる問題は，仮想仕事の原理を使えば，単なる幾何学の問題になってしまう：ある1点が少し動くと，他の1点はどう動くか．三角形の次の性質を使うと，この問題が容易に解ける場合が多い．



a)　辺d_1, d_2の長さは一定で，角αが$\Delta\alpha$だけ少し変わると，対辺の長さの変化は次のとおりである．

$$\Delta L = \frac{d_1 d_2}{L} \sin\alpha \Delta\alpha.$$

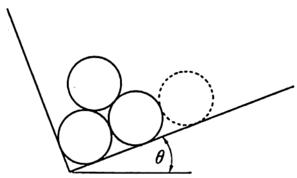
b)　直角三角形の3辺a, b, cの長さが，それぞれ$\Delta a, \Delta b, \Delta c$だけ少し変わると

$$a\Delta a + b\Delta b = c\Delta c \quad (c\text{は斜辺})$$

である．

これらの式を証明できるか．

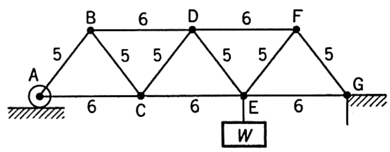
4-14*　同じ大きさの滑らかな丸太がトラックにつんである．トラックが道から飛び出した．長さの方向は水平だが横に角度θだけ傾いて止まった．トラックから荷を下ろしていって，図に点線で示したのをどけると，残りの3本がまさにすべり出すようになっていた．すなわちθがちょっとでも小さかったら，丸太は落ちるところであったという．θの値を求めよ．



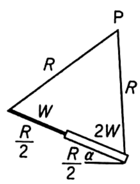
4-15　図のようなトラスで，対角線の支柱はみな5の長さ，水平の支柱はみな6の長さである．つなぎめは蝶番でみな自由に動く．トラスの重さは無視できる．

a)　図のように荷をかけたとき，支柱のどれとどれは，針金で代用できるか．

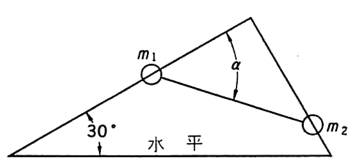
b)　支柱BD，DEの内部にはたらく力を求めよ．



4-16*　長さRの棒がある．それはそれぞれ長さ$R/2$の片からできていて，一方の片の重さは他方の重さの2倍である．この棒の両端には長さRのひもがついていて，ひもの他端はPの釘に結んである．全体が静止したとき，棒と水平との角度αは何程か．



4-17*　曲がらない針金で直角三角形の枠ができている．そして図のように鉛直に立っている．$m_1 = 100$ g, $m_2 = 300$ gのタマがあって，摩擦なしで針金をすべる．タマの間には糸がはってある．これが静的につりあっているとき，糸の張力は何程か．また，ひもと第1の針金との間の角αは何程か．



第6章

6-1 25°C, 圧力 760 mm のとき, 空気分子は相次ぐ衝突の間に約 7×10^{-6} cm 動き, 平均の速さは約 450 m s^{-1} である. 空気が**全体として**動くということはないとして, 一つの空気分子が現在の位置から 1 cm 動くのには, どのくらい時間がかかるか.

6-2 ある子供が袋をもっていて, その中に赤い大理石が二つ, 緑のが三つ, 白いのが一つ入っている. この子供が袋から, 勝手に三つとりだすとき,

a) みな色がちがう確率,

b) みな色が同じである確率

は何程か.

6-3 おもちゃの鉄砲のタマの半径が a であるとして, これがたくさん勝手に半径 b の固定球にあたる. 衝突は完全弾性的であるとし, 衝突の入射角と反射角(タマが接触したとき, それぞれのタマの中心を結ぶ直線から測る)は等しいとする. タマがいろいろの角度だけふれる相対数を与える式を導け. またこの結果を断面積として表わせ. ふれがゼロに対しては君たちの式は $\pi(a+b)^2$ になるはずだが, それを確かめよ.

第7章

附記 楕円の諸性質: 楕円の大きさと形は, 次の値のどれか二つを指定すればきまる:

a: 長半径,

b: 短半径,

c: 中心から焦点の一つまでの距離,

e: 離心率,

r_p: 近点距離(焦点の一つから楕円までの最小距離),

r_a: 遠点距離(焦点の一つから楕円までの最大距離).

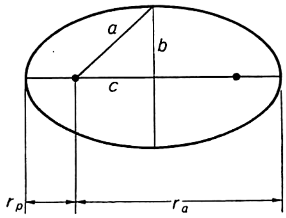
これらのいろいろの量の間には次の関係がある:

$$a^2 = b^2+c^2,$$

$$e = \frac{c}{a} \quad (e\text{ の定義}),$$

$$r_p = a-c = a(1-e),$$

$$r_a = a+c = a(1+e).$$



7-1 地球の中心から月までの距離は, 近地点で 363,300 km, 遠地点で 405,500 km で, その間を周期 27.322 日で変化する. ある人工衛星は, 近地点 225 km, 遠地点 710 km の軌道で飛んでいる. 地球の平均直径は 12,756 km である. この人工衛星の絶対周期は何程か.

7-2 質量 m の衛星が, それよりもずっと大きい質量 M の天体の引力を受けて, 円形軌道に沿って運動している.

a) $s=\frac{1}{2}at^2$ という関係とこの章で述べたところとを使って, その(円形)軌道を運動している衛星が軌道の中心に向かって受ける加速度の式を導け. また軌道上の速さと軌道の半径とを使って, この加速度をあらわせ.

b) $ma=G\frac{Mm}{R^2}$ であるとして, ケプラーの第3法則を導け.

7-3 a) 太陽のまわりの地球の軌道運動の諸要素と, 地球のまわりの月の軌道運動の諸要素とを比較して, 太陽の質量と地球の質量との比を求めよ. (前の問題で求めた関係を使え.)

b) 木星の月の一つであるイオの公転の周期は, 1.769 日で軌道の半径は 421,800 km である. 地球の質量を 1 として, 木星の質量を求めよ.

7-4 引力を及ぼしあっている二つの物体は, それぞれ相手の方に "落ちている" のであって, 一つの共通の定点(二つの物体の重心)のまわりにまわっていると考えてよい. この考えを使って, 次のことを証明せよ. 二つの物体はいつも一定の距離 R だけ離れて軌道運動をするが, その周期は, 二つの質量の和に関係するだけで, 両者の比には関係しない. またこのことは楕円軌道についても真である. これを証明してみよ.

7-5　二つの星 a, b が，互いの引力によって相手のまわりをまわっている．その相対的軌道の長半径が，天文単位(A.U.)で測って R であり，また回転の周期が T 年である．太陽の質量と和 (m_a+m_b) との関係式を求めよ．

7-6　シリウスの年周視差(地球の軌道の半径がシリウスのところでなす角)は 0.378″ である．このことと，図 7-7 にある値とを使って，次の二つの場合について太陽の質量とシリウス系の質量との比をできるだけくわしく求めよ．

a) 軌道面が視線に垂直であるとした場合，

b) 軌道面の実際の傾きを考えに入れた場合．

b)の答は最大値か最小値か(それともどちらでもありうるか)．

7-7　地球の軌道の離心率は 0.0167 である．軌道における最大の速さと最小の速さとの比を求めよ．

7-8　ハレー彗星は 1456 年にみえて，人々を大いに恐怖させた．彼らは教会に行って，“神よ，悪魔から救い給え，トルコ族から救い給え，彗星から救い給え”と祈った．1986 年には，それ以来 7 度目に太陽のまわりをまわってやってくるはずである．1910 年 4 月 19 日の最近の近日点では，太陽からの距離は 0.60 A.U. であった．

a) 軌道の反対側では，太陽からどれだけ遠くなるか．

b) 軌道上の最大の速さと最小の速さとの比はいくらか．

7-9　月の質量を求めるには，どうすればよいか．

7-10　地球の半径と月の半径はそれぞれ 6378 km と 1738 km であり，また質量の比は 81.3 : 1.000 である．月の表面における重力の加速度をいくらか．$g_\oplus=9.80\ \mathrm{cm\ s^{-2}}$．

7-11　実験室内で g の測定をするとき，月の引力によって g が 1 日のなかで変化するのを検出するためには，どれだけ精密にしなければならないか．簡単のために，月は実験室の真上と真下をとおるとする．また地球潮汐は無視する．

第 8 章

8-1　一つの物体が一定の加速度 a で直線の上を動く．$t=0$ では，$x=x_0$ にあり，その速度は $v_x=v_{x0}$ である．時刻 t におけるその位置と速度は

$$x(t) = x_0+v_{x0}t+\frac{1}{2}at^2,$$

$$v_x(t) = v_{x0}+at$$

であることを証明せよ．

8-2　前の方程式から t を消去し，任意の時刻に対して

$$v_x^2 = v_{x0}^2+2a(x-x_0)$$

であることを証明せよ．

8-3　前の問題を，三つの座標軸に沿って一定の加速度成分 a_x, a_y, a_z がある 3 次元運動に拡張せよ．

8-4　平らな土地で，水平に対して角度 θ，初速 V で放物体が打ち出された．(空気の抵抗は無視する．) 最高点の高さはいくらか，また届く距離はいくらか．

8-5　上の放物体の届く距離を最大にするためには，どんな角度で打ち出したらよいか．

8-6*　カルテクのある新入生が，郊外交通巡査のことをまだよく知らないで，スピード違反でつかまった．その後，ハイウェイの平らなところにある“スピードメーター試験区”に来たとき，スピードメーターの読みをしらべようと考えた．試験区の出発点の“0”をとおるとき，アクセルをふみこみ，試験中，車に一定の加速度を与えた．彼の車は，出発後 16 秒で 0.10 マイルのしるしをとおった．それから 8.0 秒後，0.20 マイルのしるしをとおった．

a) 0.2 マイルのしるしのところでは，スピードメーターの読みはいくらのはずか．

b) 加速度はいくらか．

8-7*　あるロケットが，エンジンが燃焼している間，50 秒にわたって $2g$ の上向きの一定の加速度を

受けた．空気の抵抗を無視し，また高さによって重力が変化することを無視したとき，

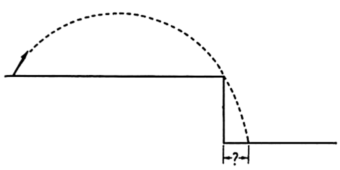
a) ロケットの全飛翔中の v-t の図を書け．

b) ロケットの達する最高の高さを計算せよ．

c) ロケットが打ち出されてから地球に戻るまでの全時間の長さを計算せよ．

8-8* エドワーズ空軍基地の長い水平試験路では，ロケットもジェットモーターも試験することができる．ある日の試験で，ロケットモーターがはじめ静止から一定の加速度で加速され，燃料がなくなってからは，一定の速さで走っていった．ロケットの燃料がなくなったのは，この試験路のまんなかであった．試験路の長さはわかっている．そこでこんどはジェットモーターが静止から出発して，試験区の全長を一定の加速度で進んだ．ロケットとジェットモーターとが全長を進んだ時間はきっちり同じであった．ジェットモーターの加速度と，ロケットモーターの加速度との比はいくらだったか．

8-9* 崖のふちから水平に 27,000 ft のところに大砲の発射台がある．崖は大砲のレベルから 350 ft 下がっている．崖の裏にかくしてある物品を砲撃したい．タマが砲口を出るときの速さが 1000 ft/s であったとすれば，タマは崖の下端からどれだけ近くのところに届くか．



8-10 円の中心を頂点にしてある角があるとき，その角のひらきが円をきる弧の長さによって，その角の大きさをあらわすことができる．s が弧の長さで R が円の半径であるとき，中心角 θ は，ラジアンで測って

$$\theta = \frac{s}{R}$$

である．

a) $\theta \ll 1$ ラジアンならば，$\sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1$ であることを証明せよ．

b) 上の結果と，和の角のサイン，コサインの公式とを使い，次の基本公式

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

によって $\sin x, \cos x$ の導関数を求めよ．

8-11 ある物体が半径 R の円の上を一様な速さ V で，反時計まわりにまわっている．円の中心はまた直角座標 (x, y) の原点であって，$t=0$ にはこの物体は $(R, 0)$ にある．

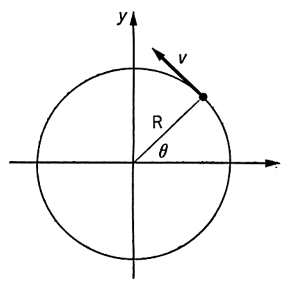
a) x, y, v_x, v_y, a_x, a_y を時間の関数としてあらわせ．

b) $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

および

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

であることを証明せよ．ただし $\omega = V/R$ である．



8-12 半径 R のタイヤに小石がはまった．タイヤは，滑ることなく速さ V で水平の道をころがっていく．小石の座標 x, y を時間の関数としてあらわす式をつくれ．$t=0$ のとき，小石は道に接しているとする．また速度成分，加速度成分をも時間の関数としてあらわせ．

第9章

9-1 質量 m の粒子が，ある空間を運動している．そしてこの粒子はその速度に比例する力を受けている．力のむきは，速度にも直角，またあるきまった線，例えば z 軸にも直角である．はじめにこの粒子が，速さ V で x-y 面で運動したとすると，この粒子は円形の途を運動することを証明せよ．またこの円の半径を求めよ．力の比例定数を β として，$F = \beta v$ とおけ．

9-2　図 9-6 の軌道の曲率半径は，$t=0, t=0.82$，および $t=2.086$ s のとき，いくらか．

9-3　少年が水平から 70° の角度の方向へボールを投げ上げる．そしてそのボールは彼の肩よりも 32 ft 高いところにあって開いている窓をうまく水平にとおった．

a)　少年の手から放れたとき，ボールの速さはいくらであったか．

b)　窓をとおったとき，ボールの途の曲率半径はいくらであったか．

任意の時刻におけるボールの途の曲率半径は求められるか．

9-4　太郎と次郎は，ちがう惑星に育った惑星人(物理学者)である．この二人が惑星連合度量衡シンポジウムで顔を合わせた．このシンポジウムの目的は，統一単位系を定めることである．次郎は MKSA 系が地球上の文明諸国で使われていて，いろいろ利点のあることを得意気に報告した．太郎もやはり同じように得意気になって，地球以外のところで使われている M′K′S′A′ 系の美しさについて報告した．この 2 系における基本的の質量，長さ，時間の単位を結ぶ定数が，μ, λ, τ であって

$$m' = \mu m,\quad l' = \lambda l,\quad t' = \tau t$$

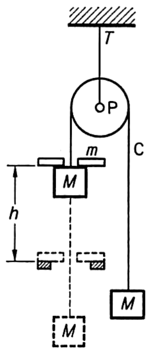
であるとすれば，2 系間で速度，加速度，力，エネルギーを変換するにはどんな定数になるか．

9-5　前の問題で述べた 2 系で測ると，万有引力の定数の数値の関係はどうなるか．

9-6　距離を A.U. で，時間を年で測れば，$GM_\odot$ の数値はいくらか．

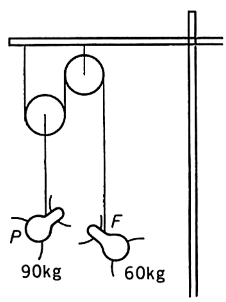
9-7　太陽系の模型を作る．太陽や各惑星はそれぞれ実物と平均密度が同じである物質で作る．ただし寸法はすべてスケールファクター k で小さくする．惑星の公転周期は k によってどう変わるか．

9-8　昔，重力の加速度を測るのにアトウッドの器械というものがあった．それは図に示したようなものである．滑車 P とひも C とは，質量も摩擦も無



視してよい．等質量 M が両端についていてつりあっている．次に小さな駒 m を一方の側にのせる．ある距離 h の間は加速されるが，その後は輪のところでこの駒が把えられて，それからは両方の M は一定の速さ v で運動をつづける．m, M, h, v の測定値から g の値を求めよ．

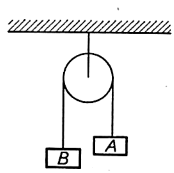
9-9　パオロとフランチェスカという 2 匹の仲よしのカンガルーが火星の運河リミニを渡ろうとしている．渡し舟はみな大きさが同じだが，どれも小さくて 2 匹をいっしょにした目方は乗せられない．しかしこの 2 匹は別々の渡し舟で渡るのはいやだという．そこで渡し守のジウセピは渡し銭をとり，図のようにマストから 2 匹をつるした．つなには目方はなく，また滑車には目方も摩擦もない．これは火星



特有の仕掛である．そしてカンガルーがマストにぶつかったり，甲板にぶつかったりする前に，ジウセピは手早く 2 匹を渡してやることができた．渡し守は，舟にかかる 2 匹の目方をどれだけ減らしたことになるか．

ヒント：目方も摩擦もない滑車に，目方のないひもがかかっているときには，ひもの張力は滑車の両側で相等しい．

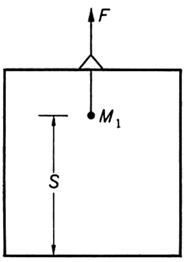
9-10　宇宙旅行者が月に向かって出発しようとしている．彼はバネばかりと質量 1 lb のもの A をもっている．これを地上でバネばかりに下げれば，力 1 lb の目盛を指す．月に着いたが，その地点の重力は正確には解らないが，地表の重力のおよそ 1/6 である．そこで，ある石 B をひろってバネばかりにかけたら，力 1 lb を指した．次に図のように，A と B とを滑車につるしたら，B は 4.0 ft/s² の加速度で下に下がった．石 B の質量はいくらか．



9-11* 質量 M_2 のエレベーターの天井から，質量 M_1 が下がっている．エレベーターは一定の力 F（F は $(M_1+M_2)g$ よりも大きい）で上むきの加速度を受けている．M_1 は，はじめ，エレベーターの床から上方，距離 S のところにあった．

a) エレベーターの加速度を求めよ．

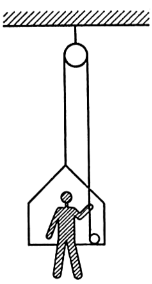
b) エレベーターから質量 M_1 をつるしているひもにはたらく張力はいくらか．



c) このひもが突然きれたとすると，その直後のエレベーターの加速度はいくらか．また質量 M_1 の加速度はいくらか．

d) M_1 がエレベーターの床にあたるのは，どれだけ時間がたった後か．

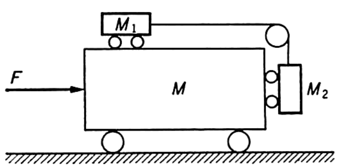
9-12* 重さ 180 lb のペンキ工が，高い建物の側に下がっている籠に乗ってはたらいている．そして急いで上下したい．ひもをゆるめて下がってくるが，それによって椅子にかかる力が 100 lb にしかならない．椅子自身の目方は，30.0 lb である．



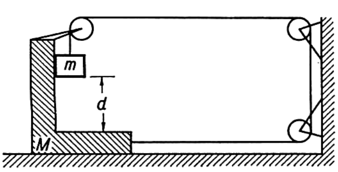
a) このペンキ工，椅子の加速度はいくらか．

b) 滑車にかかる力は全体でいくらか．

9-13* M_1 と M_2 とが M に対して相対的に運動しないようにするためには，M にどれだけの水平力 F を加えなければならないか．



9-14* 図に示した系で，表面にはすべて摩擦がない．M=1650 g の台から d=4.0 ft の高さに m=150 g のものがある．これを放した後，どれだけ時間がたったら，m は台 M にあたるか．



9-15 バネにおもりが下がっていて静止している．このおもりを上むきにたたいて，単位速度で運動しはじめるようにした．おもりとバネの定数の関係で，運動方程式は $\ddot{x}=-x$ になっている．運動方程式を数値的に解いて，おもりがいちばん高くなる高さを求めよ．

9-16 質量 m の粒子が直線に沿って運動している．その運動には，速度に比例した抵抗の力がはたらく，$F=-kv$．$x=0, t=0$ で $v=v_0$ の速さで動き始めたとして，数値積分によって，x を t の関数として表わせ．速さが半分になるまでの時間 $t_{1/2}$，また止まるまでの距離 x_m を求めよ．

注意 a) x と t のスケールを適当にとって，運動方程式の数値係数が簡単になるようにせよ．

b) 教科書で述べた方法のように，Δt の間隔が比較的粗くても，高い精度が得られるような方式を工夫せよ．

c) 次元解析を使って，$t_{1/2}$ や x_m が，v_0, k, m のどういう関数でなければならないかを求めよ．例えば $v_0=1.00$ (a)のように x, t の単位をかえて）のように v_0 については簡単な便利な値をえらんで，実際の運動を求めよ．

9-17 ある荷電粒子が，次の方程式に従って電磁場のなかを運動する．

$$\frac{dv_x}{dt}=-2v_y,$$

$$\frac{dv_y}{dt}=1+2v_x.$$

$t=0$ では，粒子は (0,0) から速度 $v_x=1.00, v_y=0$ で動きはじめる．数値積分によってこの運動の性質を求めよ．前問の注意 b) を見よ．

9-18 発射速度 1000 ft s^{-1}，水平との角 45° で大砲のタマが打ち出される．タマは，その速度の 3 乗に比例する抵抗力を受ける（$F=-kv^3$）．係数 k は，v=1000 ft s^{-1} のときには，抵抗力はタマの重さの

2倍であるようになっている．数値積分によって最高の高さ，水平到達距離の近似値を求めよ．そして抵抗がないとした場合の値と比較せよ．

第10章

10-1　滑体が二つあって，水平の空気溝を自由に運動できるようになっている．滑体の一方は静止していて，他方がこれに完全弾性的に衝突した．そして滑体は等速度で反対むきに反撥した．二つの質量の比はいくらか．

10-2　質量の等しい二つの滑体が，等しい速さで反対むきに，v と $-v$ で水平な空気溝を運動して，ほとんど完全弾性的に衝突し，少し小さい速さになって反撥する．運動エネルギーは衝突によって，$f \ll 1$ の割合だけ失われる．もしもこの二つの滑体の一方がはじめは静止しているところで衝突したとすると，もう一方の滑体は衝突後どんな速さで運動するか．(はじめ静止していた滑体の最終の速さ v を測れば，この小さな速度減少 Δv はたやすく求められる．バネバンパーの弾性もこうして求められる．)

注意　もしも $x \ll 1$ ならば，$\sqrt{1-x} \approx 1-\dfrac{1}{2}x$ である．

10-3　質量 10 kg，平均断面積 0.50 $\mathrm{m^2}$ の人工衛星が，200 km の高さで円軌道を描いて運動している．この高さでは分子の平均自由行程は，数 m で，空気の密度はおよそ $1.6\times10^{-10}\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ である．分子が衛星にあたるのは，非弾性衝突であるとみなしていいという荒っぽい仮説をしたとき，(分子が衛星に文字どおりくっつくというのでなく，小さな相対速度で衛星から離れる)空気の摩擦によって衛星の受ける減速力を計算せよ．このような摩擦力は，速度によってどのように変わるはずか．衛星の速度は，それにはたらく力の結果として小さくなるか．(衛星の円形軌道の速さと，高さとの関係をしらべよ.)

10-4　ロケットのはじめの質量は M_0 kg であって，$dm/dt=-r_0\ \mathrm{kg\,s^{-1}}$ という一定の割合でもえた燃料を吹き出す．吹き出す速度は V_0(ロケットに相対的に)である．

a) ロケットの最初の加速度を求めよ(重力は無視する.)

b) もしも $V_0=2.0\ \mathrm{km\,s^{-1}}$ であるとすれば，推力 10^5 kg 重を得るためには，1秒に何 kg の燃料を吹き出さなければならないか．

c) ロケットの速さと，その時々の質量とを結び付ける微分方程式を書け．できればこの方程式を解け．

10-5　二つの物体が直線に沿って運動しているとき，ある特別な座標系をとってその系からみると，一方の運動量と他方の運動量とが大きさが等しく，むきが反対である．すなわち，2物体の全運動量はゼロである．この系を質量中心系という(CM と略す)．物体の質量が m_1, m_2，速度が v_1, v_2 であるとき，CM 系は

$$V_{\mathrm{CM}}=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$$

の速度で運動していることを証明せよ．

10-6　問題 10-5 を，任意の数の物体が一直線上を運動している場合に一般化せよ．すなわち，全運動量がゼロになるような座標系の速度を求めよ．

10-7　問題 10-5 の二つの物体の全運動エネルギーは T で，CM 系からみれば全運動エネルギーは T_{CM} である．

$$T=T_{\mathrm{CM}}+\frac{1}{2}(m_1+m_2)V_{\mathrm{CM}}{}^2$$

であることを証明せよ．

10-8　問題 10-7 の結果を，任意の数の物体の場合に一般化できるか．

10-9　C^{12} の原子核が静止しているところへ運動エネルギー E の中性子が，正面衝突する．そしてやってきた方向へ完全弾性的に反撥する．その運動エネルギーはいくらになるか．

10-10　小銃のタマの速さはバリスティック振子で測ることができる．タマの質量 m はわかっているが，速さ V はわかっていない．質量 M の木片がつってあって，長さ L の振子になっている．タマはこの木片にあたってもぐりこみ，振動がはじまる．振動

の振幅xを測り，エネルギー保存を使えば，衝突直後の木片の速度が求められる．タマの速さを，m, M, L, xであらわす式をつくれ．

第11章

11-1　$\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+3\vec{j}$ であるとき，次の値を求めよ．

a）$\vec{a}+\vec{b}$,

b）$\vec{a}-\vec{b}$,

c）a_x,

d）$\vec{a}\cdot\vec{i}$,

e）$\vec{a}\cdot\vec{b}$,

f）$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$.

11-2*　サイクリストが 10 mi/h で真北へ走っている．そして，彼にとっては風は N 15°E からくるように感じる．（風は 6 mi/h で北と東の間から吹いている．）

a）風の真の方向を求めよ．

b）彼が帰り途も同じ速さで走るとすれば風はどの方向から吹いてくるように見えるか．

11-3*　君が船に乗っていて，その船は 15 ノットで東に進んでいるとする．君からみて真南 6.0 mi のところに他の船がみえ，それは一定のコースを動いている．その速さは 26 ノットであることがわかっている．その後その船は君の後を通ったが，いちばん近かったときの距離は 3.0 mi であった．

a）その船の航路の方向は何か．

b）その船が君の南にみえた時刻と，いちばん近かった時刻との間の時間はいくらか．

11-4*　半径Rの剛体の円輪がすべることなく水平面をころがっていく．円輪の面は鉛直で，その軸は水平面に対して速さVで水平に動く．円輪の縁の任意の点の瞬間速度（速さとむき）を計算せよ．

11-5*　あるモーターボートが水に相対的に一定の速さVでまっすぐな運河を走る．運河の水の流れの速さは一定でRである．モーターボートはまず，出発点からまっすぐ上流へdの距離にある点へ往復する．次に出発点から流れをよぎって直角にdの距離にある点へ往復する．簡単のために，モーターボートは，どの場合も全速力で全距離を走り，往路の終りでコースを逆にするのにも時間はかからないとする．モーターボートが流れを上下する往復に要する時間をt_V，流れをよぎる往復に要する時間をt_A，また静水のところで$2d$の距離を進むのに要する時間をt_Lとすれば

a）比t_V/t_Aは何程か．

b）比t_A/t_Lは何程か．

11-6*　幅 1.0 mi の川の岸にいる男が，対岸の真正面の点に行こうとしている．これには二通りの行き方がある．

(1) やや上流の方に向かって泳ぎ，合成速度がちょうどまっすぐに川をよぎるようにする．

(2) 対岸目がけて泳ぎ，少し下流のところに着いたら，そこから目的点へ歩いていく．

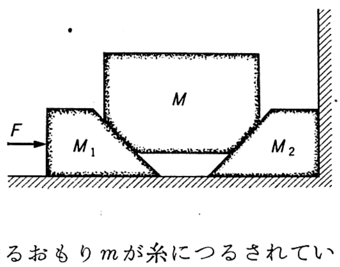
泳ぐ速さが 2.5 mi/h，歩く速さが 4.0 mi/h，川の流れの速さが 2.0 mi/h であるとすれば，(1), (2) のどちらがどれだけ早いか．

11-7*　同じ楔M_1, M_2がある．角度は 45°，面は滑らかで，$M_1=M_2=8.0$ kg である．そしてこれを使って$M=384$ kg のものを動かす．その面も滑らかである．二つの楔は滑らかな水平面に乗っている．一方の楔は鉛直の壁におしついている．もう一方の楔には水平に 592 kg重 の力を加える．

a）動く方の楔の加速度の大きさと方向は何か．

b）大きいMの加速度の大きさと方向は何か．

c）止まっている楔M_2は，重いMにどれだけの力を及ぼすか．



11-8　あるおもりmが糸につるされている．糸の上端のところは摩擦がなく自由に動く．また糸の長さは何でもよい．この振子をふりまわして，糸の上端から距離Hだけ下がったところで，おもりが水平な円の途を描くとする．その途におけるおもりの回

転周期を求めよ．

11-9　問題 10-5 から問題 10-8 までを，ベクトル記号を使って 3 次元運動に拡張せよ．

$$M=\sum_{i=1}^{N} m_i$$

とせよ．

11-10　質量 $m_1=2\,\mathrm{kg}$ の "粒子" が $\vec{v}_1=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ $\mathrm{m\,s^{-1}}$ の速度で運動している．そして質量 $m_2=3\,\mathrm{kg}$, 速度 $\vec{v}_2=-2\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$ $\mathrm{m\,s^{-1}}$ の粒子と非弾性的に衝突する．二つの粒子がいっしょになったものの速度を求めよ．

11-11　前問で，粒子が衝突する前の CM 系の運動エネルギーを求めよ．

11-12　質量 1 kg の円板が $6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ の速さで真北に動いてきて，質量 2 kg で静止している円板に衝突する．衝突後，1 kg 円板ははじめの方向から 45° NE の方に動き，その速さは $2\sqrt{2}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ である．

a) 衝突後，2 kg 円板の速度は何か．

b) CM 系では運動エネルギーがどれだけ失われたか．

c) 1 kg 円板は CM 系からみて運動のむきの角度はどれだけ変わったか．

2 体衝突を取り扱うには，次のやり方が役に立つことが多い．

1) CM 系の速度 $\vec{V}_{\mathrm{CM}}$ を求める．

2) $\vec{V}_{\mathrm{CM}}$ を $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ (衝突前の物体 1, 2 の速度) からひいて，CM 速度，$\vec{V}_1{}'$ と $\vec{V}_2{}'$ とを求める．

3) こうすれば，1, 2 の運動量は大きさが等しく，むきが反対である．

4) 衝突が起これば，その結果，次のようなことになる：

a) 1 と 2 との相対運動の方向が変わる．

b) 衝突でエネルギーが出るか，吸収されるか，または変化しないかに従って，$\vec{V}_1$ と $\vec{V}_2$ の大きさは，ふえるか，へるか，または変化しないかである．

5) V_{CM} を，CM の最終速度 $\vec{U}_1{}', \vec{U}_2{}'$ にまた加えると，最終速度 $\vec{U}_1, \vec{U}_2$ が求められる．

11-13　ある粒子が運動していって，同じ目方で静止している粒子に完全弾性的に衝突する．衝突後，これらの粒子は互いに相対的に直角の方向に運動することを証明せよ．

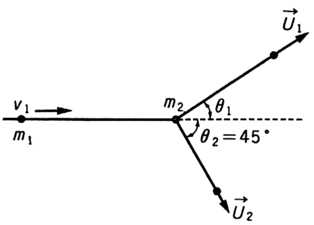
11-14　パテの小さなタマ A, B がある．質量はおのおの 1 グラムで重力の影響で $-9.8\vec{k}\,\mathrm{m/s^2}$ の加速度で運動している．初期条件は，$t=0$ で

$$\vec{r}_a(0)=7\vec{i}+4.9\vec{k}\quad(\mathrm{m}),$$
$$\vec{V}_a(0)=7\vec{i}+3\vec{j}\quad(\mathrm{m\,s^{-1}});$$
$$\vec{r}_b(0)=49\vec{i}+4.9\vec{k}\quad(\mathrm{m}),$$
$$\vec{V}_b(0)=-7\vec{i}+3\vec{j}\quad(\mathrm{m\,s^{-1}})$$

である．

$t>0$ の**すべて**の時刻に対する $\vec{r}_a(t), \vec{r}_b(t)$ を求めよ．

11-15　質量 m_1, 速度 $\vec{v}_1$ の粒子が，質量 $m_2=3m_1$ で静止している $(\vec{v}_2=0)$ 別の粒子に完全弾性的に衝突する．衝突後の m_2 の運動は，衝突前の m_1 の方向にくらべて，$\theta_2=45°$ である．m_1 の運動方向 θ_1 と，最終速度 $\vec{U}_1, \vec{U}_2$ を求めよ．



11-16　質量 M の粒子が運動していて，質量 $m<M$ で静止している粒子に完全弾性的に衝突する．M の粒子の運動の方向は，最大どれだけ変わりうるか．

11-17　質量 m の粒子が運動していて，質量 $M>m$ で静止している粒子に完全弾性的に衝突する．そして，m の粒子の運動の方向が 90° 変わった．m の粒子の衝突前の方向とくらべて，M の粒子が反跳する角 θ はいくらか．

11-18　前問の衝突において，CM 系のエネルギーの $(1-\alpha^2)$ が失われたとする．この場合には，M の粒子の反跳する角 θ はいくらか．

11-19 質量 1 kg の粒子が運動していて，その位置は次のベクトルであらわされる．

$$\vec{r}=t\vec{i}+\left(t+\frac{t^2}{2}\right)\vec{j}-\left(\frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi t}{2}\right)\vec{k}.$$

a) $t=0$ および $t=1$ s におけるこの粒子の位置，速度，加速度，運動エネルギーを求めよ．

b) この運動を起こす力を求めよ．

c) $t=1$ s におけるこの粒子の径路の曲率半径を求めよ．

11-20 ある一つの粒子が点 $\vec{r}_0$ にあって，重力の下で初速度 $\vec{v}_0$ で運動する．その後の運動を求めよ．

11-21 ベクトルを使って，地球上で緯度経度が (λ_1, ϕ_1), (λ_2, ϕ_2) である 2 点間の大圏距離を求めよ．

注意 地球の中心を原点とする直角座標をとり，その軸の一つを地軸に，第 2 の軸を $\lambda=0°, \phi=0°$ の方向に，第 3 の軸を $\lambda=0°, \phi=90°$ W の方向にとれ．(経度は 0° から西方へ 360° までとする.)

11-22 次のとき，月の加速度の大きさと方向はいくらか．

a) 新月.

b) 上弦.

c) 満月.

注意 $R_{\oplus\odot}=1.50\times10^8$ km,

$R_{\oplus D}=3.85\times10^5$ km,

$M_{\odot}=3.33\times10^5\,M_{\oplus}$.

第 12 章

12-1 質量 m のブロックが，水平との傾き θ の斜面をすべる．すべりの摩擦係数が $\mu<\tan\theta$ であるとすれば，このブロックが

a) 斜面の上向き，

b) 斜面の下向き，

c) 斜面にひいた水平線からはかって斜面上で角 ϕ をなす向き

に動くとき，加速度はいくらか．(斜面に xy 軸をとり，x を水平に，y を斜面の上向きにとれ.)

12-2 前の問題で，$m=1.00$ kg, $\mu=0.20$, $\theta=30°$ とする．ブロックをはじめの速さ 3.00 m s^{-1} で斜面の上向きに動かしたとすると，

a) 斜面の上をどこまで上がるか．

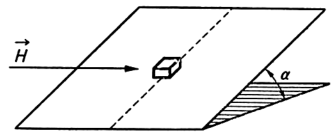
b) 上がってまたもとの出発点に戻るには，時間がどれだけかかるか．

c) この運動でどれだけのエネルギーが失われて熱になるか．

12-3 重さ w の粒子が粗い斜面の上にのっている．斜面と水平との間の角は α である．

a) 静止摩擦係数が $\mu=2\tan\alpha$ であるとき，粒子を横から押してこれを動かすには，最小どれだけの水平力 $H_{\min}$ を要するか．

b) 粒子が動くのはどちらの方向か．



12-4* 質量 1000 g のおもりに，長さ 5.0 ft のひもがついている．また輪があって，それは水平な棒にはまっていてすべることができる．ひもの一端はこの輪に結んである．輪と棒との間の静止摩擦係数は 0.75 である．もう 1 本ひもがあって，その一端はおもりに結んであって，他端は滑車にかかっている．滑車は，図のように輪から $8\frac{1}{3}$ ft のところに固定してある．このひもの端におもり W をつるして，輪がまさに滑り出そうとしている．

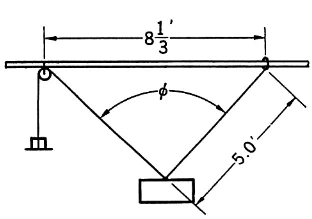
a) まさに滑り出すときの W の値，

b) 5 ft の方のひもの張力，

および

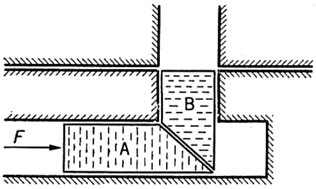
c) 角 ϕ

を求めよ．

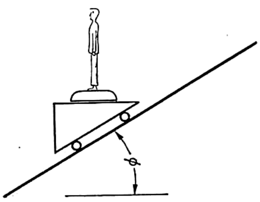


12-5* 図は上下掛け金の断面を簡単に書いたものである．下の方の A は，水平の穴のところを横におしこまれる．穴の側面は滑らかだが，A, B の接

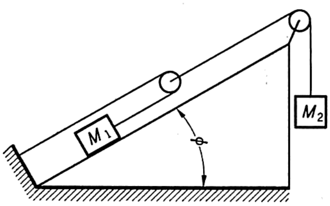
触面は水平と 45° で静止摩擦係数 μ がはたらいている．A に水平な力を及ぼして掛け金を動かすには，最小どれだけの力を要するか．ただし B の質量は m とする．



12-6　あるりこうな青年が次のような実験をした．はかりと木のブロックと小さい車とを図のようにしつらえて，図に示すように摩擦なしで斜面をころがり降りるようにした．彼ははかりの上に乗っていて，斜面を降りる間，はかりの目盛を読んでいる．ふつうのときは体重は 160 lb であるが，斜面を降りる最中は，はかりの目盛は 120 lb であった．斜面の傾きの角度はいくらか．



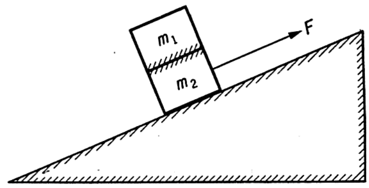
12-7*　図のような仕掛けで，M_1 は摩擦なしで斜面を滑る．$\phi=30°$, $M_1=400$ g, $M_2=200$ g である．M_2 の加速度と，ひもにはたらく張力とを求めよ．



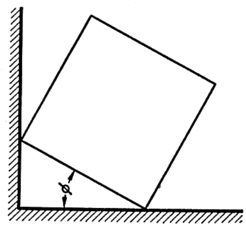
12-8*　図において，斜面の長さは 130 cm で，上端の高さは，下面から 50 cm である．ブロック m_2 は斜面に乗っていて，その質量は 60 g である．ブロック m_1 の質量は 200 g である．二つのブロックの間の静止摩擦係数は 0.50；m_2 と斜面との間の滑り摩擦係数は 0.33 である．上むきで斜面に平行な力が m_2 にはたらく．

a) m_1 が m_2 の上をまさに滑りはじめるとき，m_2 の加速度はいくらか．

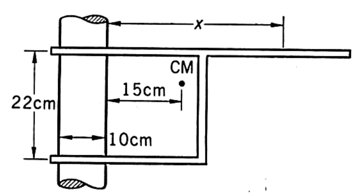
b) この滑りが起こらないとき，F の最大値はいくらか．



12-9*　質量 m の立方体が，図のように壁に斜めによりかかっている．立方体と壁との間には摩擦はないが，立方体と床との間には摩擦があって，ちょうど滑り出さない．$0°<\phi<45°$ のとき，滑り出さないための最小の摩擦係数を ϕ の関数として求めよ．$\phi\to0°$，$\phi\to45°$ のときの μ の値を調べ，あるいは $\mu=1$ に対する ϕ を計算して，君の答があっているかどうかを験せ．



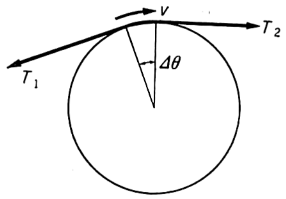
12-10*　鉛直の棒を上下に滑ることのできる可動台は非常に利用面が多い．図はその一例で主な寸法が示してある．棒と台との間の静止摩擦係数が 0.30 であって，台の目方の 50 倍の目方を x のところにのせるとき，台がすべり落ちないようにするためには，x の最小値はいくらか．



12-11　a) ひもが速さ v で丸い棒をゆっくりこすっていて，直線から $\Delta\theta\ll1$ ラジアンだけ曲がっている．棒の一方側の張力が $T+\Delta T$ で，他方の側の張力が T である．摩擦によって生ずる差 ΔT はいくらか．

b) ひもが丸い棒にまきついて，有限な角 α だけ曲がっていて，ひっぱって滑らせるとき，上の

式を積分してひもの両端における張力の比を求めよ．



12-12　長さが 1.00 m で 20° の傾斜の斜面の下端に物体がある．斜面を，水平面に沿って，加速度 4.00 m s^{-2} で加速すると，この物体が斜面を滑って頂上に達するのには，どれだけ時間がかかるか．

12-13　次の量のディメンションは何か．

a) 電場．

b) 磁場．

c) 引力場．

d) E/B.

12-14　荷電粒子が，磁場 $\vec{B}$ に直角な平面内で運動している．この粒子の軌道が円であることを証明し，その半径を求めよ．

12-15　前の問題で，粒子が軌道を一周するに要する時間を求めよ．この結果はサイクロトロンのはたらきに重要な関係がある．何故か．

12-16　電場 E_y と磁場 B_z とが同時にはたらいているところで，電荷 q，質量 m の粒子が運動している．(その他の場の成分はない．)

a) この粒子の運動方程式を書け．

b) 次の座標系にガリレイ変換を適用せよ．

$$x' = x - \left(\frac{E_y}{B_z}\right)t,$$

$$y' = y,$$

$$z' = z.$$

c) 電場と磁場とが直角方向にはたらいているとき，粒子の運動についてどんなことがいえるか．

第13章，第14章

14-1　$\vec{F} = 1.5\,y\vec{i} + 3x^2\vec{j} - 0.2\,(x^2+y^2)\vec{k}$ (Newton) の力が，質量 1.00 kg の粒子にはたらいている．$t=0$ では，粒子は $\vec{r} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ (m) にあり，その運動速度は $\vec{v} = 2\vec{j} + \vec{k}$ (m s^{-1}) である．$t=0$ で

a) 粒子にはたらく力，

b) 粒子の加速度，

c) 運動エネルギー，

d) 運動エネルギーが変化する割合

を求めよ．

14-2　前問の粒子が，$t=0.01$ s において有する，位置，速度，運動エネルギーの近似値を求めよ．

14-3　問題 14-1 の粒子が，点 $(0, -1, 0)$ から動き出し，力 $\vec{F}$(およびある束縛力)を受けて，摩擦のない途に沿って点 $(0, +1, 0)$ までいく．次の場合に，力 $\vec{F}$ がなす仕事はいくらか．

a) 途が y 軸に平行な直線である場合．

b) 途が z-y 平面内の円である場合．

この力は保存力であるか．

14-4　質量 6.0 kg の物体が x 軸に沿って摩擦のない途を運動する．次のおのおのの場合，物体は $x=0$，$t=0$ で静止から出発する．

a)　力 $F=(3+4x)$ N を受けて，3.00 m 動く．ただし x は m で測る．

1) 物体が得た速度はいくらか．

2) この点における加速度はいくらか．

3) この点で消費されている仕事率はいくらか．

b)　力 $F=(3+4t)$ N を受けて，3.00 秒動く．ただし t は秒で測る．

1) 物体が得た速度はいくらか．

2) そのときの加速度はいくらか．

3) この時刻に消費されている仕事率はいくらか．

14-5　半径 0.50 m の球殻がポテンシャル 10^6 V に一様に帯電している．球殻にある電荷を求めよ．

14-6　キャパシターには，二つの金属があって，それが等量で符号反対に帯電していることが多い．キャパシタンス C は，一方のものの電荷を，二つの

ものの間の電位差でわったものと定義される：

$$C=\frac{Q}{\phi_2-\phi_1}\quad（ファラッド）.$$

半径 A, B の共心球殻があるとき，そのキャパシタンスを求めよ．

14-7　地球が全体として 1.00 C の電荷を持っているとしたら，そのポテンシャルはいくらか．

14-8　重さ 1000 kg の自動車が，定格馬力 120 kW のエンジンで動く．60 km h^{-1} のとき，エンジンがこの馬力を出すとすれば，この自動車がこの速さで出しうる最大加速度はいくらか．

14-9　長さ L，重さ M kg m^{-1} の曲がりやすい針金が，質量も半径も摩擦もゼロの滑車にかかっている．はじめに，針金はちょうどつりあっていた．針金は軽くおされてつりあいをくずし，加速をつづけた．針金の一方のはじが滑車をはずれるときの速さを求めよ．

14-10*　水（密度 62.5 lb ft^{-3}）を滑らかなホースをとおして噴き出す．ホースの口の断面積は 5.5 平方インチである．ホースの口を水平から 30° 上に向けると，水流のてっぺんは口から 16 ft の高さにあった．ポンプの注入口は大きな水槽に入っていて，この水槽の水は，ホースの口よりも 8.0 ft 下にある．ポンプとモーターとをあわせて全体の効率が 60 パーセントであるとすれば，電源からモーターに入るのは何 kW の仕事率か．

14-11*　砲丸投，円盤投，槍投の世界記録（1960）は，それぞれ 63 ft 4 in, 196 ft $6\frac{1}{2}$ in, 282 ft $3\frac{1}{2}$ in である．また質量はそれぞれ 16 lb, 4.4 lb, 1.77 lb である．距離を四捨五入して ft にし，各チャンピオンがその記録を作ったときになした仕事を比較せよ．ただしおのおのの道すじは地上から 6 ft の高さから出発し，45° の方向に向いていたとする．空気の抵抗は無視する．

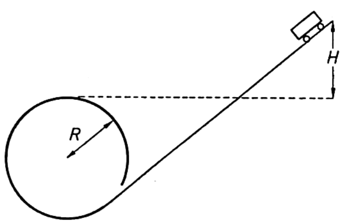
14-12*　質量 3000 lb の自動車に 85 馬力のエンジンがついている．水平なところを 30 mi h^{-1} の一定速度で走るのに，20 馬力を要する．摩擦の力は同じであるとして，この速さで登りうるいちばん急な坂はどのくらいか（坂が水平となす角，あるいは，角の関数を求めよ）．

14-13　半径 R，質量 M の球がある．その密度は一様である．引力ポテンシャルと引力の場の強さを，中心からの距離の関数として求めよ．結果をグラフに書け．

14-14　25 g のおもり皿が，質量ゼロのバネに下がっている．バネの定数は，$k=15.3$ N m^{-1} である．$m=50$ g の質量がおもり皿の上 $h=9.0$ cm のところから落ちてきて皿に非弾性的に衝突する．皿ははじめは静止していたとする．質量 m がいちばん低くなったとき，その出発点からどこまで下がるか．

14-15　あるバネがあって，その定数は k である．ある一定の力 F を加えて，フックの法則が成り立つ範囲でひきのばしてつりあわせたとき，このつりあいの位置から動かすときもバネの定数は同じであることを証明せよ．

14-16　摩擦のない小さな車が斜面をころがっていって，下の輪のところで宙返りをする．輪の半径は R である．輪のてっぺんからどれだけの高さ H のところから出発すれば，車は途をはずれないでグルリと宙返りするか．



14-17　ある粒子が半径 R の摩擦のない球のてっぺんに静止している．そこから重力をうけて滑りはじめる．出発点からどのくらい下のところに来るまで，球から離れないでいるか．

14-18　質量 m の小さい物体が，質量 M の大きい物体の引力を受けて，離心率 e，長半径 a の楕円軌

道に沿って，そのまわりをまわっている．(Mは静止していると考える.) mの全エネルギー(運動エネルギーと位置のエネルギーの和)を求めよ．(Eはeに関係しないことに注意せよ.)

14-19 a) 楕円の面積はπabであることを証明せよ．

b) 楕円軌道に関するケプラーの第3法則を導け．

c) 楕円軌道において単位質量あたりの全エネルギーが一定ならば，その公転周期はすべて一定であることを証明せよ．(簡単のために，$m \ll M$と仮定せよ.)

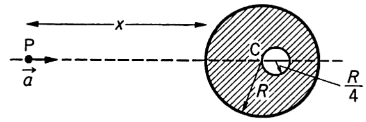
14-20 物体が地球の引力をふりきって飛び出すに要する速さは，(およそ) 7.0 mi s^{-1}である．宇宙ロケットが，大気のすぐ上で8.0 mi s^{-1}の初速が与えられたとすれば，地球から10^6 miの距離では，地球に対する速さはいくらか．

14-21 宇宙ロケットを打ち出して，結局，太陽に対して10 mi s^{-1}の速さで太陽系を脱出するためには，地表から最小どのくらいの速さで打ち出さなければならないか．地球の公転運動の速さは18.5 mi s^{-1}である．

14-22 前問において，宇宙ロケットが太陽から遠ざかる**方向を指定したとすれば**，発射の**最大**の速さはいくらでなければならないか．

14-23 太陽のまわりをまわる人工惑星を打ち出す．近日点0.010 A.U.の軌道にのせ，地球の公転周期と同じにして，その飛行中の観測資料を打ち出してから1年後に，地球に送ってくるようにしたい．地球から打ち出すときの速さはいくらか．また地球と太陽とを結ぶ線に対してどの方向に打ち出さなければならないか．地球の公転運動の速さは30 km s^{-1}である．

14-24 半径R，密度ρの球に，球形の穴があいている．穴の半径は$R/4$で，穴の中心は，直線PCの延長上にあってもとの球の中心Cからむこう側へ$R/4$の距離のところにある．大きな球の表面から距離xのところにある点Pにおける引力加速度$\vec{a}$を求めよ．



第15章

15-1 ローレンツ変換の式を解いて，x, y, z, tをx', y', z', t'で表わせ．

15-2 図15-3の“光時計”が，運動に平行な方向に向いているときのはたらきを考えよ．ローレンツ収縮を考慮に入れること．

15-3 大気の高いところでμ中間子がつくられて，$v=0.990c$の速さで5.00 kmの距離を飛んで崩壊した．

a) 我々からみたときにはこのμ中間子の“寿命”はいくらか．またその中間子自身の座標系からみたとしたらいくらか．

b) 中間子の座標からみれば，それが走り抜けた大気の厚さはいくらか．

15-4 アメリカ合衆国で1960年につくられた電気エネルギーの量は全体で7.53×10^{11} kWhである．

a) どれだけの質量がエネルギーに変換されたことになるか．

b) デューテリウムがヘリウムになるときの質量変換がすべてこの発電に利用できるものとすれば(ある部分はニュートリノとなって失われる)，所要のデューテリウムを供給するために，1秒あたりにどれだけの重水がいるか．

注意　$M_{H^2}=2.0147$ amu, $M_{He^4}=4.0039$ amu.

15-5 太陽からくるエネルギーの仕事率は，地球大気のてっぺんで1.4 kWm^{-2}である．もしも，このエネルギーが，普通の水素がヘリウムになる変換からくるものとすれば，太陽は1秒あたりに何トンの水素を“燃やして”いることになるか．(ニュートリノによる損失は無視する.)

15-6　静止質量 m_0 の粒子が，直線上を運動して，その位置は

$$x = \sqrt{b^2+c^2t^2}-b$$

で与えられるとする．この運動を生じさせるのには，どんな力をはたらかさなければならないか．

15-7　a) 重力の加速度を l.y. y^{-2}（光年・年$^{-2}$）で測ればその値はいくらか．

b) 他には何もないところに宇宙船だけがある．そしてそれに乗っている人が地表の重力と等しい一様な加速度を感じるような割合で，この宇宙船が加速されている．$t=0$ で宇宙船に対して静止していた静止（非加速）観測者からみて 5.00 年だけこのことがつづく．5.00 年後までに，この宇宙船はどれだけ飛んだか．またそのときの速さはいくらか．

第 16 章

16-1　ローレンツ変換を微分形式

$$dx = \gamma(dx'+\beta cdt')$$

等で書き表わせ．そして $dy/dt=v_x$ を v_x', V などで表わせ．また $dy/dt=v_y$ も同じように表わせ．

16-2　x 軸に沿って運動している粒子がある．その速度は v_x で加速度は a_x である．この系に対して速度 V で運動している S' 系では，速度と加速度はいくらにみえるか．

16-3　232 ページに述べた方法によって，式

$$m_w = m_v\sqrt{1-u^2/c^2}$$

の証明を完了せよ．

16-4　静止質量 m_0 で，$v=4c/5$ の速さで運動している粒子が，静止している同じ粒子に非弾性的に衝突する．

a) 粒子はいっしょになって，どんな速さになるか．

b) 静止質量はいくらになるか．

16-5　バークレイの“ビヴァトロン”は，陽子を加速して，充分高いエネルギーを与え

$$\text{p}+\text{p} \rightarrow \text{p}+\text{p}+(\text{p}+\bar{\text{p}})$$

という反応によって，陽子-反陽子の対を生じるように設計されている．この反応のいわゆる限界エネルギーというのは右辺の 4 粒子がいっしょになって，静止質量 $M=4m_\text{p}$ という 1 粒子として運動する状態に対応する．衝突前には，まとの陽子が静止していたとすると，これに衝突する方の陽子は，この限界に対してどれだけの運動エネルギーをもっていなければならないか．

第 17 章

17-1　陽子の静止質量は $m_\text{p}=938$ MeV である．宇宙線のなかには，間接な方法によって，約 10^{10} GeV のエネルギーをもっている陽子が発見されている．このエネルギーをもっている陽子が，直径約 10^5 l.y. の銀河系を横断するとする．陽子の座標系からみれば，それにはどれだけの時間がかかるか．

17-2　電子の静止質量は $m_\text{e}c^2=0.511$ MeV であることを示せ．

17-3　π 中間子（$m_\pi=273\,m_\text{e}$）が崩壊して，μ 中間子（$m_\mu=207m_\text{e}$）とニュートリノ（$m_\nu=0$）とになる．μ 中間子とニュートリノの運動エネルギーと運動量を MeV で求めよ．

17-4　電子の電荷を単位として q をあらわし，MeV で運動量 p をあらわし，ガウスで磁場 B をあらわしたとすると，p, B, R の間の関係はどうなるか．$q=Zq_e$ とせよ．

17-5　サイクロトロンを設計するのに，陽子を加速して 150 MeV の運動エネルギーをもたせるようにしたい．磁場の強さは 1.00×10^4 G とする．

a) 磁石の極の半径はいくらでなければならないか．

b) 加速電極の周波数はいくらでなければならないか．

c) 一つの粒子を加速するのに，相対論的効果を考えに入れると，加速周波数は割合としてどのくらい変化させなければならないか．

第18章

18-1　力 $\vec{F}=30\vec{i}+40\vec{j}$ N が，$\vec{r}=8\vec{i}+6\vec{j}$ m にある点にはたらいている．

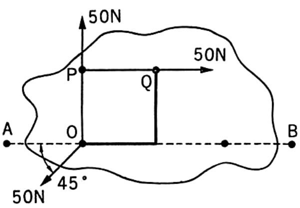
a）原点のまわりのトルクを求めよ．

b）力のうでの長さを求めよ．

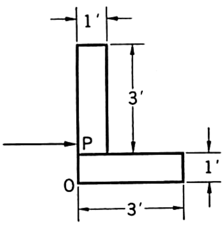
c）$\vec{r}$ に垂直な力の成分を求めよ．

18-2　地球の自転による接線方向の速さが，緯度 35° の地点におけるよりも 200 m s^{-1} だけ小さいのは，緯度いくらの点か．

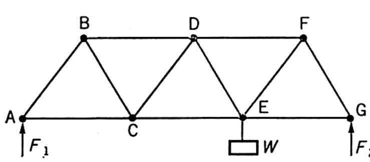
18-3　平らな鋼の板が水銀の上に浮いていて，図に示したように，一辺 0.100 m の正方形の三つのすみに，三つの力がはたらいている．第4の力を**一つ**はたらかせて，これをつりあわせたい．その力の大きさ，方向，線 AB 上の作用点を求めよ．



18-4　厚さが一様の板金で図のようにLの形をしたものがあって，滑らかな水平な面にのっている．図に示した向きに，撃力が与えられたところ，回転しないで動き出した．撃力が与えられたのは O からどれだけ離れたところか．



18-5　橋桁が図のように組んである．つなぎ目はみな摩擦がなく，またそこで自由に回りうる．桁材はすべて剛体で，重さはなく，長さは等しい．抗力 F_1, F_2 を求めよ．また桁材 DF の内部力を求めよ．



18-6　次の剛体の慣性モーメントを求めよ．質量はおのおの m であるとする．

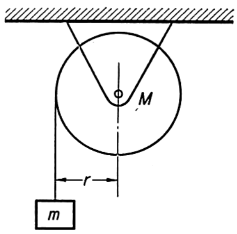
a）長さ L の細いまっすぐな棒，その一端をとおってこれに直角な軸のまわり．

b）長さ L の細いまっすぐな棒，その中心をとおってこれに直角な軸のまわり．

c）半径 r の壁のうすい丸い筒．その軸のまわり．

d）半径 r の円柱．その軸のまわり．

18-7　図のように質量 M, 半径 r の円柱が摩擦のない軸で支えられている．そのまわりにひもがまいてあり，それに質量 m が下がっている．m の加速度を求めよ．



18-8　質量 m が滑らかな水平の台の表面を動く．m にはひもがついている．台の板には小さな穴があいていて，ひもはその穴を下にとおっている．台の上のひもの長さははじめは r_1 で，質量 m は，半径 r_1，速さ v_1 で円運動をする．次にひもを下にひっぱり，台の上のひもの長さが r_2 になる．

a）そのときの質量 m の速さを求めよ．

b）穴をとおしてひもをひっぱって，その長さを r_1 から r_2 にするまでに要する仕事を求めよ．

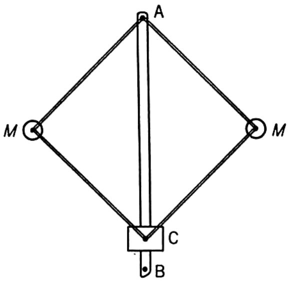
c）仮想仕事の原理を使って，運動の半径を一定の長さに保つために必要な力の大きさを求めよ．

18-9　質量 m の惑星が半径 R の円形軌道を描いて運動している．その角運動量を求めよ．地球の自転に及ぼす潮汐摩擦によって月と地球との間の距離は，長い間にはだんだん遠くなる．上の結果を使って，このことを導け．また，地球-月という系におけるエネルギー保存を論ぜよ．

18-10　物体がつりあって静止しているときには，力もトルクも差引きゼロであるということを使って，第4章の問題 4-9 を解け．

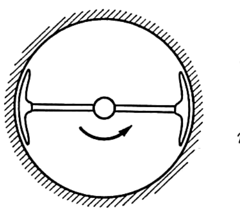
18-11*　図のような回転ガバナーがある．これが 120 rpm の速さになると，ガバナーが直結している

機械の動力をきるようになっている．滑輪Cの重さは 10.0 lb で上下軸ABに沿って摩擦なしで滑る．そしてACの距離が 1.41 ft になると動力がきれるようになっている．ガバナー枠の 4 本の棒の長さは



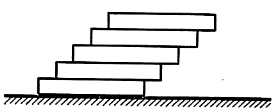
1.00 ft であって，重さは無視してよく，輪のところには摩擦がないとする．このガバナーを設計どおりにはたらかせるには，質量Mをいくらにしなければならないか．

18-12*　ある簡単なスピードガバナーの構造は原理的に図のようになっている．上下軸に水平な棒が対称的についていて，その水平棒にブレーキシューがはまっていて自由に滑べる．軸がまわると，ブレーキシューが，静止している円筒形のブレーキドラムの内壁を押す．ブレーキシューの質量がおのおのmであって，その厚さはブレーキドラムの内径に比して無視してよいとする．ブレーキシューとドラム



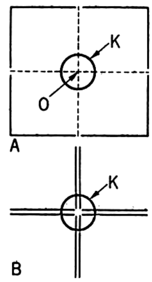
との間の滑り摩擦係数がμであるとしたとき，ガバナーをまわすに要する仕事率を，m, r, μ および軸の回転数fによってあらわせ．

18-13*　長さLの一様なレンガを滑らかな水平面の上におく．他のレンガを図のようにおいて，側面は一つづきの平面になっているが，おのおののレンガの端は一つ前のレンガの端から$\dfrac{L}{a}$の距離だけずれているようにする．aは整数である．レンガをいくつ積んだら，ひっくりかえるか．



第 19 章

19-1*　細い一様な棒が 8 本あって，おのおの長さはL，質量はmである．この 8 本を，図 19-1 A の点線で示した質量なしの枠で支えて正方形にしてある．Oをとおり，枠の面に直角な，摩擦のない軸のまわりにこの正方形をまわす．その角速度はω_0 ラジアン s^{-1} である．こういうふうにまわすと，枠についているKの内部に仕掛けがあって，この正方形の形をかえて，図 19-1 B のような十文字にする．この仕掛けの慣性モーメントはOのまわりに$\dfrac{40}{3}ML^2$であって一定である．この仕掛けが 8 本の棒を並べかえるに要する仕事はいくらか．



19-2　回転に対する吊り糸の弾性復元トルクは，ねじりの角に比例する：$\tau = -k\theta$.

a) このような糸をθだけねじったときの位置のエネルギーは $U=\dfrac{1}{2}k\theta^2$ であることを証明せよ．

b) 検流計のコイルにはたらくふれのトルクは次の式で与えられる．

$$\tau = nABi.$$

ここに

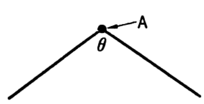
i = コイルを流れる電流，

n = コイルの針金の巻数，

B = 検流計の永久磁石による磁場．

タマの速さを実験室で求めるときに，あるキャパシターの電気量を測るが，そのときキャパシターに検流計コイルをつないで放電し，それによって生ずる最大のふれを読む．ここで $|i|=|dq/dt|$ であって，放電は非常に速くおこるので，電流が流れている間には，検流計のコイルははじめの$\theta=0$の位置からほとんど動かない．摩擦を無視することにして，検流計の最大の“ふれ”が，キャパシターがはじめもっていた電気量に比例することを証明せよ．

19-3*　まっすぐな一様な針金がある．長さはL，質量はMである．これを中点で折り曲げて角θをなすようにする．A点をとおり，針金で決定される平面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントを求めよ．

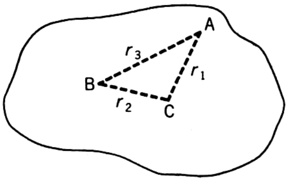


19-4　不規則の形をした金属板がある．厚さは一様で，質量はMである．その質量の中心はCにあり，Aをとおって板の面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントはI_aである．Bをとおって板の面に垂直な

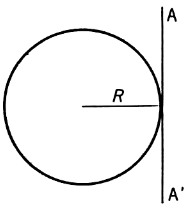
軸のまわりの慣性モーメントを I_b とするとき，

$$I_b = I_a + Mr_3{}^2$$

としてよいのは，r_1, r_2, r_3 の間にどのような条件がある場合か．

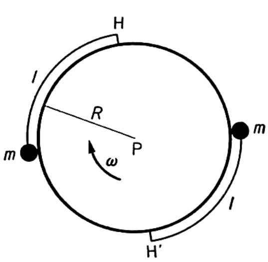


19-5　半径 R の円板が，半径に接する軸 AA' のまわりにまわる．このとき生ずる回転体の体積を求めよ．



19-6　長さ L の棒があって，その質量は無視してよい．この棒の両端に質量 M_1, M_2 がついている．M_1, M_2 の大きさは，L に対して無視してよい．この棒をそれに垂直な軸のまわりにまわす．この棒のどの点を軸がとおるようにすれば，棒をまわしはじめて角速度を ω_0 にするのに必要な仕事がいちばん小さいか．

19-7　半径 R，質量 M の一様な円板があって，その中心の軸 P のまわりに，角速度 ω で水平面内でまわるようになっている．二つの小さな質量 m が長さ l のひもにつながっていて，図のように円板の周囲をまいて，縁にとめてある．円板がまわっていると，この二つの質量は同時に自由になる．ただしこの系の角運動量は変化しない．そうすると，二つの



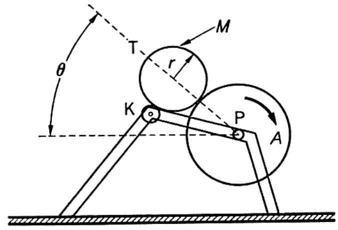
質量は円板の縁を離れる．そしてこれを結んでいるひもが，半径方向を向くようになると，フック H, H' からはずれる．こういうはたらきによって円板の回転が止まるようなひもの長さ l を求めよ．

注意　この仕掛けは，宇宙船のスピンを減らすのに使われた．

19-8　静止している太郎(座標 x, y)に対して，次郎(座標 x', y')が回転している．そのとき，次郎からみて，粒子にはたらいている見かけの力の成分の方程式を求めよ．そしてそれらの成分は，太郎からみる真の力 $\vec{F}$ と，二つの見かけの力，半径方向の求心力と速度に直角のコリオリの力，からなることを示せ．

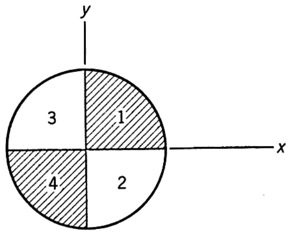
19-9　半径 R，質量 M の一様なボーリングのタマを投げる．まずはじめには，摩擦係数 μ の途を，ころがらずに速さ V_0 ですべる．タマがすべらずにころがりはじめるのは，どの距離からか．またそのときの速さはいくらか．

19-10　印刷機でインクをつけるところを少し書き直すと，図のようになる．K は，軸がしっかりきまっているが，からまわりのできるインクローラーで，その慣性モーメントは無視してよい；P は軸がしっかりきまっていて，これは動力によって外からまわされている．また T は，K と P との間に自由に乗っているローラーである．T は円柱で半径は r，質量は M であって，K と P の間ですべることなくころがっている．そして，中心を結ぶ直線 TP は，水平から θ だけ上がっている．T が K から離れないように P に角加速度 A を与えるとすれば，その値は最大いくらか．

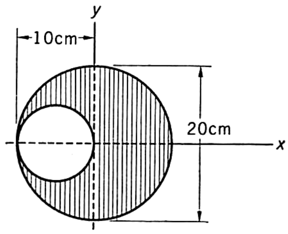


19-11*　ここに円柱がある．その密度は図のよう

に象限ごとに違っている．図の数字は，密度の割合を示している．x-y 軸を図のようにとったとき，原点と質量の中心とをとおる直線の方程式は何か．



19-12* 密度が一様の円板に，図のような穴があいている．質量の中心を求めよ．



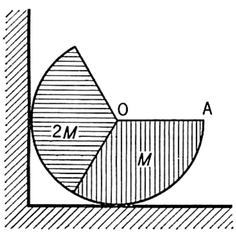
19-13 長さが L の細い一様な針金がある．これを半径 R の円弧に曲げ $(R>L/2\pi)$ たもののCMを求めよ．座標は，円の中心に原点をとり，針金の中心をとおって x 軸をとれ．

19-14 前問の結果を使うか，あるいはその他の方法によって，半径 R の一様な扇形で中心角が α であるもののCMを求めよ．

19-15* 半径が π cm，質量が 3 kg の円柱を 3 等分する．また半径が π cm，質量が 6 kg の円柱についても同じことをする．この二つを図のようにはりあわせて，半径 OA を水平にする．床は完全に粗く，壁は完全に滑らかである．

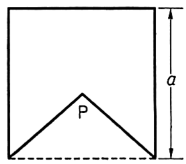
a) 柱が壁に及ぼす力はいくらか．

b) 半径 OA の上で中心からどのくらい離れたところに質点 M を置けば，壁をどけてもつりあっているか．

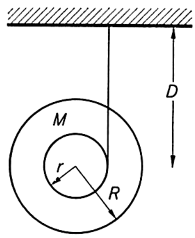


注意 扇形のCMの位置を求めるには，積分を使ってもいいし，ハンドブックをみてもよい．

19-16* 一様な正方形の板金から，図のように，一辺を底として二等辺三角形をきりとる．そのとき，頂点 P が板金の重心となるようにしたい．きりとるべき三角形の高さは何程か．



19-17 ヨーヨーのような糸巻き車がある．2枚の一様な円板は，おのおの質量 M，半径 R である．また軸の半径は r で質量は無視してよい．ひもは軸にまきつけ，その一端は天井についている．そして天井から D だけ下のところで，静止していた車を放す．

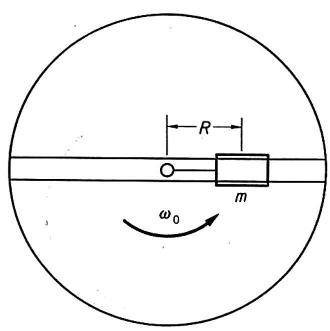


a) 振子的な振動が起こらないようにするためには，車を放すときにひもは鉛直方向とどれだけの角をなしていなければならないか．

b) 車の中心の下向きの加速度はいくらか．

19-18 慣性モーメントが I_0 のターンテイブルが，中空の鉛直軸のまわりに自由にまわっている．質量 m の車があって，ターンテイブルの直径に沿った途の上を摩擦なしで動く．車にはひもがついていて，小さな滑車にかかって，その先は軸の穴から下に下がっている．いちばん初めは，全体の回転の速さは ω_0 で，車は軸から R のところに静止していた．次にひもに力を加えて車をひっぱり，それが半径が r のところへ来たときに，そこに止めた．

a) 終りの角速度はいくらか．



b) この二つの状態におけるエネルギーの差が，求心力によってなされた仕事に等しいことをくわしく証明せよ．

c) ひもを放したとしたとき，車が半径Rのところを通りすぎるときの半径方向の速さ$\dot{r}$はいくらか．

第20章

20-1 ベクトルの各成分を書くか，あるいはまた他の方法によって，次の関係を証明せよ．

a) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$,

b) $(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\alpha(\vec{a}\times\vec{b})$,

c) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$,

d) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$,

e) $\vec{a}\times\vec{a}=0$,

f) $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$.

20-2 剛体がある軸のまわりに角速度$\vec{\omega}$で回転している．剛体の任意の1点Pの速度は$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$であることを証明せよ．ただし$\vec{r}$は，回転軸上の任意の点から点$P$にひいたベクトルである．

20-3 剛体がある軸のまわりに微小角$\Delta\theta_1$だけまわり，次にその軸と点Oで交わる別の軸のまわりに微小角$\Delta\theta_2$だけまわる．このとき，剛体の中の任意の1点の変位は，中間の軸のまわりに一つの微小回転があったときとけっきょく同じことになることを証明せよ．この軸の位置とそのまわりの回転角を求めるにはどうすればよいか．このことを使って次のことを証明せよ．一つの剛体が同時にいくつかの軸のまわりにいろいろの角速度でまわっているときには，この剛体の運動はおのおのの角速度ωに比例した長さでその回転軸の方を向いているベクトルを考えてそのベクトル和に相当する一つの角速度があるとしたときと同じである．

20-4 N個の粒子があり，それぞれ質量はm_i，位置は$\vec{r}_i$，速度は$\vec{v}_i$であるとする．その全体としての角運動量は

$$\vec{L}=\sum\vec{r}_i\times\vec{p}_i=\sum m_i\vec{r}_i\times\vec{v}_i$$

である．またこの系の質量の中心といっしょに運動している座標系からみて，角運動量は$\vec{L}_{\mathrm{CM}}$であるとする．CMの位置と速度がそれぞれ$\vec{R}_{\mathrm{CM}}, \vec{V}_{\mathrm{CM}}$であるとし，粒子の全質量が$M=\sum m_i$であるとすると，

$$\vec{L}=\vec{L}_{\mathrm{CM}}+M\vec{R}_{\mathrm{CM}}\times\vec{V}_{\mathrm{CM}}$$

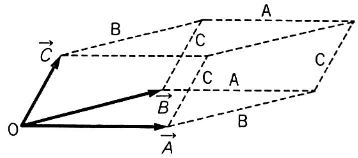
であることを証明せよ．この結果を問題11-9の結果と比較せよ．

20-5 a) 任意の三つのベクトル$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$をとると，これによって相対する面が平行な六面体――平行六面体がきめられると考えることができる．その六面体の体積は

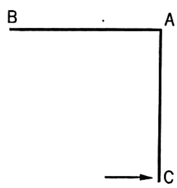
$$V=|\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})|$$

であることを証明せよ．

b) ある平行六面体で，一つの頂点は原点にあり，相隣る三つの頂点は，直角座標系(x, y, z)で$(10, -5, 3)$, $(3, -4, 7)$, $(-5, -6, 3)$にある．その体積はいくらか．

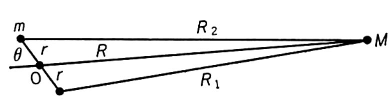


20-6 同じ長さの棒AB, ACが，Aで滑らかな蝶番でついている．そして$AC\perp AB$になるように，滑らかな台の上においてある．C点でACに直角に水平な撃力を与える．その直後，ABの質量の中心の線速度と，ACの質量の中心の線速度との比を求めよ．



20-7 薄い一様な円板形で質量10.0 kg，半径1.00 mのはずみ車がある．そのCMをとおり，円板の面に垂直な方向から1°はずれている軸にとりつけられている．このはずみ車がこの軸のまわりに角速度25.0ラジアンsec^{-1}で回転するとすると，ベアリングのところにはどれだけのトルクを与えなければならないか．

20-8 長さ$2r$で重さのない棒の両端に二つの等しい質量mがついている．そして棒の中心OからR



($R \gg r$)の距離にある質量Mから引力を受けている．棒とRとの間の角はθである．棒の中心のまわりのトルクは近似的にいくらか．

20-9　地球が扁平なので，月も太陽も地球にトルクを及ぼしている．どちらによるトルクの方が大きいか．またその割合はおよそどのくらいか．(前問をみよ.)

20-10　地球の赤道半径と極半径は，それぞれ 6378.388 km, 6356.912 km である．また地表からDの深さのところの密度ρは，表に示したとおりである．(* は不連続を示す.)

D(km)	ρ
0	2.60
30*	3.0 3.3
100	3.4
200	3.5
400	3.6
1000	4.7
2000	5.2
2900*	5.7 9.4
3500	10.2
5000*	11.5 16.8
6000	17.1

これらの値を使って，次の諸量の大きさを求めよ．

a) 地球の慣性モーメント．

b) 回転の角運動量．

c) 回転の運動エネルギー．

d) 月と太陽のトルクによって回転軸が，黄道の極のまわりに1回の歳差運動をするに要する時間．(地球の軸の傾きは 23.5° である.)

20-11　a) 対称的な物体が，静止から出発して，高さhの斜面を(滑ることなく)ころがる．質量の中心のまわりのこの物体の慣性モーメントはI，質量はM，また斜面に接するところで，ころがり面の半径はrである．斜面の麓に来たときには，質量の中心の線速度はいくらか．

b) a)の一般方程式を応用して，次の場合における質量の中心の速度を求めよ．物体が

i) 球であるとき，

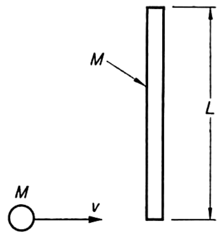
ii) 円板であるとき，

iii) 外径R_1，質量M_1の円板に，半径r_2，質量m_2の軸がついていて，それでころがるとき．

20-12　質量がMで長さがLの細い棒が，水平な摩擦のない表面に静止している．質量が同じくMの小さなパテのかたまりが，速度vで棒に直角に動いてきて，棒の一端にあたって，非常に短時間の非弾性衝突をしてこれにくっつく．

a) 衝突の前後における全体の系の質量の中心の速度はいくらか．

b) 衝突の直前には，全体の系の質量の中心は，棒の中心に対してどれだけの角運動量をもっているか．



c) 衝突の直後，棒の角速度(棒の質量の中心のまわりの)はいくらか．

d) 衝突によって失われた運動エネルギーはいくらか．

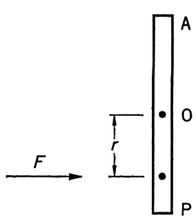
20-13　もしも地球上の氷が全部とけたとすると，平均海水面はおよそ 200 ft 上昇することになる．現在ある氷層の平均緯度が 80° であるとし，大洋の形が不規則であることを無視したとき，1日の長さは何秒長くなることになるか．地球は，半径 6370 km の球で，慣性モーメントは 8.11×10^{37} kg m^2 であるとして計算せよ．

20-14　長さがLで質量がMの一様な棒が，摩擦のない水平な面の上に静止している．$OP=r$のところにある点Pで棒に直角に非常に短時間の撃力$J=\int F dt$がはたらく．

a) 撃力がはたらいた直後，質量の中心Oの速度はいくらか．Oのまわりの角速度はいくらか．端点Aの瞬間速度はいくらか．

b) 撃力がはたらいた直後，点Aの速度がゼロになるような距離APを求めよ．

c) もしもこの棒がAのところの軸から下に下がっているとしたとき，その軸に横向きの力がはたらくことなく，Aのまわりに棒が回転するようにするためには，どこをたたけばよいか．



第21章

21-1　質量Mの剛体があって，CM からdの距離のところで摩擦のない水平な軸に支えられている．

この回転軸のまわりの慣性モーメントはIである.

a) 剛体のつりあいの位置から測った角度をθとするとき，時間に対するθの変化を与える微分方程式を書け.

b) この物体が$\sin\theta\approx\theta$であるような小振動をするとき，その周期はいくらか.

21-2 前の問題で，CMのまわりのこの剛体の慣性モーメントはI_cである．小振動の周期をd(およびI_c)の関数としてあらわせ．そして次のことを証明せよ.

a) ある一つの周期を与えるようなdの値にd_1とd_2との二つがあること，

b) その周期は$t_0=2\pi\sqrt{(d_1+d_2)/g}$であること，

c) $d=\sqrt{I_c/M}$であるときに周期がいちばん短いこと．またその最短の周期はいくらか.

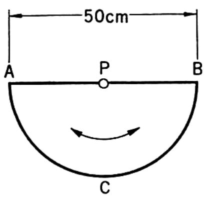
21-3 直線バネがあって，何もつるさないときにはその長さがDである．その一端に質量mをつるすと，長さが$D+A$になる．このmをつるして静止しているところへ，mからAの高さのところから，別のmが落ちてきて，非弾性的に衝突する．こうして生ずる運動の周期，振幅，(はじめのつりあいの位置から)いちばん高くなるところの高さを求めよ.

21-4 二つの粒子A, Bが，同じ直線上で同じ振幅(10 cm)で単振動をしている．粒子Aに対しては$\omega_A=20\ \mathrm{s}^{-1}$である；$B$に対しては，$\omega_B=21\ \mathrm{s}^{-1}$である．$t=0$で，粒子は両方とも$x=0$を正の方向に通る(すなわちそのとき“位相があっている”)とすれば，

a) $t=0.350$秒のときには，二つの粒子はどれだけ離れているか.

b) 0.350秒のとき，Aに対するBの相対速度はいくらか.

21-5 太さも密度も一様な固い針金で枠をつくる．枠は直径ABの半円弧になっている．これを，直径の中点のところにある穴で摩擦なしの軸Pでつるして，円の平面内で振子振動をさせる．枠の直径ABが50 cmであるとすると，小振動の周期はいくらか.



21-6 重さのない上下バネに重さ20 gのおもり皿がつるしてあって，その皿に5 gのおもりがのっている．つりあいの位置からひっぱり下げて放すと，周期$\pi/3$秒で単振動をする．5 gのおもりの代りに25 gのおもりにしてひっぱって放すとき，どれだけまでひっぱってもおもりは皿から飛び出さないか.

21-7 質量が$3M/4$とMの二つの粒子があって，これを，自分の長さL，力の定数kのバネでつないである．はじめこの二つの粒子は，水平の摩擦のない台の上でLの距離で静止している．質量$M/4$の別の粒子が，二つの粒子を結ぶ直線の方向に沿ってvの速さでやってきて，質量$3M/4$の粒子に衝突してくっつく．二つの質量をつなぐバネが振動する振幅と周期とを求めよ.

21-8 一様な球があるとき，その内部にある粒子にはたらくこの球の引力は，粒子と球の中心との間の距離の1乗に比例する．かりに地球がそのような球であって，両極を結ぶ直径に沿って細い穴をあけたとすると，物体を穴に落としたとき地球の反対側へ届くのにどれだけ時間がかかるか.

21-9 バクテリアの群体(菌塊)が大きくなる割合は，はじめのうちは，そこにあるバクテリアの数に比例する．この関係をあらわす微分方程式を書け.

21-10 自己周期が1.00秒の単振子をつっている支点が，振幅1.00 cm，周期1.10秒で横に単振動をする．定常振動になったとき，振子のおもりが振動する振幅はいくらになるか.

第22章

初等代数学の規則を満足する数のうちで，いちばん一般的なのは**複素数**である．複素数は，純実数(正または負)と純虚数との和の形に書ける.

$$(\text{複素数})u=(\text{実数})x+(\text{虚数})iy.$$

$i=\sqrt{-1}$を単位虚数という.

$1=\sqrt{+1}$を単位実数という.

どんな代数方程式でも，i の符号を全部反対にしてもそのまま成立する．これを**共役**をとるという．$u=x+iy$ であるとすれば，u の共役は u^* と書き，$u^*=x-iy$ である．

複素数に対する代数の規則は

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d),$$

$$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc).$$

$|u|=\sqrt{uu^*}=\sqrt{x^2+y^2}$ を u の**絶対値**という．

ある一つの実数を虚数乗すると絶対値1の複素数になる．その実数部分と虚数部分とは，虚数冪の絶対値が増加するにつれて，サイン，コサインのように振動する．特に

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

である．

22-1　方程式

$$u+iv=(a+ib)(c+id)$$

において，$b/a=\tan\alpha$, $d/c=\tan\beta$ であるとする．方程式(22.4)と三角法の諸公式とを使って

a)　$\sqrt{u^2+v^2}=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$,

b)　$\dfrac{v}{u}=\tan(\alpha+\beta)$

であることを証明せよ．

22-2　方程式(22.9)を使って上の問題をせよ．

22-3

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i},$$

であることを証明せよ．

22-4

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

であることを証明せよ．

22-5

$$\cosh\theta=\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2},$$

$$\sinh\theta=\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$$

によって定義される $\cosh\theta$, $\sinh\theta$ を θ の双曲線サイン，双曲線コサインという．

$$\cos i\theta=\cosh\theta,$$

$$\sin i\theta=i\sinh\theta,$$

$$\cosh^2\theta-\sinh^2\theta=1$$

であることを証明せよ．

22-6　微分の基本公式

$$\frac{df}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

を使って

$$\frac{d(e^{\alpha x})}{dx}=\alpha e^{\alpha x}$$

であることを証明せよ．

22-7　a)　逐次微分，あるいはその他の方法によって，e^x は

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

という無限級数であらわされることを証明せよ．

b)　$\cos x$, $\sin x$ は

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots,$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

という無限級数によってあらわされることを証明せよ．(これらの級数はすべての x に対して収束するが，$x\ll 1$ に対して e^x, $\cos x$, $\sin x$ を計算するときに，これらの級数は特に有用である.)

22-8　n が整数であるとき，方程式

$$y=\sqrt[n]{1}$$

の代数解を完全に求めよ．

22-9　$e^{in\theta}$ の性質と二項定理とを使って

$$\cos n\theta=\cos^n\theta-\frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+\cdots$$

であることを証明せよ．

22-10　a)　$e^{i(\theta+\phi)}=e^{i\theta}\cdot e^{i\phi}$ の関係を使って，2角の和のサインとコサインを与える三角法公式を証明せよ．

b)　一つの複素数 $Ae^{i\theta}$ に，他の複素数 $Be^{i\phi}$ をかけるということの結果を幾何学的に解釈せよ．

22-11　11の逐次平方根を与えるつぎの表から，$\log_{11}2, \log_{11}7$ を(小数3桁まで)求めよ．

乗根 r	$\sqrt[r]{N}$	$\log \sqrt[r]{N}$
1	11.000	1.00000
2	3.3167	0.50000
4	1.8212	0.25000
8	1.3495	0.12500
16	1.1617	0.06250
32	1.0778	0.03125
64	1.0382	0.01563
128	1.0195	0.00781

(a と b とを任意の底とするとき，$\log_a N = \log_a b \times \log_b N$ であることを使って，君の得た結果を験算せよ.)

第23章

23-1　角振動数 ω の正弦的電圧を

a) インダクタンス L,

b) キャパシタンス C

にかけたときに流れる定常電流を与える微分方程式を書いて，それを解け．こうして，インダクタンス L とキャパシタンス C の(複素)インピーダンスを求めよ．

23-2　インダクタンス L とキャパシタンス C とを

a) 直列,

b) 並列

につないだときのインピーダンス $\hat{Z}$ を，ω の関数としてあらわせ．君の得た答を定性的に論ずると，どういうことになるか.

23-3　a) バネ定数が k で，摩擦の力が $-m\gamma v$ のバネについている質量 m の運動微分方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\gamma dx}{dt}+\omega_0{}^2x = 0$$

であることを示せ．ここに $\omega_0{}^2=k/m$ である．

b) (複素変数を使い)，$x=e^{\alpha t}$ という形の解があるとしてこの方程式を解き，$\gamma<2\omega_0$ の場合には一般解が

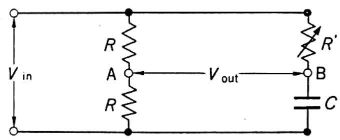
$$x = e^{-\gamma t/2}(A\cos\sqrt{\omega_0{}^2-\gamma^2/4}\,t + B\sin\sqrt{\omega_0{}^2-\gamma^2/4}\,t)$$

であることを証明せよ．

c) $\gamma>2\omega_0$ ならば，解はどうなるか.

23-4　前問の質量 m の位置と速度は，$t=0$ のとき，$x=x_0, \dot{x}=v_0$ である．A と B とを求めよ．

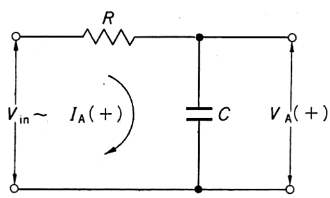
23-5　電気回路で，振幅一定，位相可変の正弦電圧を得たい場合がしばしばある．このことをする回路を**位相変換回路**という．その一例が図に示してある．ターミナル A, B の間にかかる電圧は，入力電圧の半分であって，抵抗 R' を変えることによってその位相は0°から180°まで変えられることを示せ.



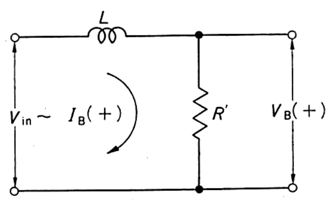
23-6　A, B 回路(図をみよ)の入力ターミナルは，$V_{\text{in}}=V_0\cos\omega t$ の入力電圧源につながっている．出力ターミナルに流れる電流はほとんどないとして，

a) 定常出力電圧 $V_A(t)$ と $V_B(t)$ とが等しいためには，R, C, R', L の間にはどんな関係がなければならないか.

b) 定常電流 $I_A(t)$ と $I_B(t)$ を求めよ．



(A)



(B)

第24章

24-1　直線空気溝で使う滑体の速さがおそくなるのは，主として，この滑体を支える薄い空気のフィルムの抵抗による．この粘性の力は速度に比例する．水平な空気溝にのっている滑体の運動微分方程式を書け．速度は

a) 時間,

b）距離

と共にどう変わるか.

24-2　キャパシタンス C のキャパシターが，はじめ電圧 V_0 に充電されている．そして $t=0$ のとき，抵抗 R のレジスターに結ばれる．t の関数として V をあらわす微分方程式を書き，指数的の解を仮定してこれを解け．

24-3　傾いている空気溝の滑体の中に磁石がうまっている．滑体が動くと，この磁石によって空気溝にうず電流が生じ，その反作用が磁石にはたらく．そしてその抵抗力がちょうど速度に比例することになるとする．滑体が静止から出発したとして，

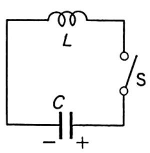
a）最終速度，

b）速度と時間との関係，

c）位置と時間との関係

を求めよ．（空気溝の勾配，磁石の抵抗係数 γ の関数として．）

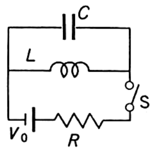
24-4　キャパシタンス C とインダクタンス L とが，図のように結んである．はじめ，キャパシターは電圧 V_0 に充電されていて，スイッチ S はきれている．$t=0$ でスイッチが閉じる．



a）時間の関数として C の電圧を求めよ．

b）時間の関数として $CV^2/2$ と $LI^2/2$ を求めよ．これらの量の意味は何だと考えるか．

24-5　ここに示した回路で，スイッチ S ははじめ閉じていて，$I=V_0/R$ の定常電流が流れている．$t=0$ で S を急にきる．そののちキャパシターにあらわれる最大電圧を求める方法を工夫せよ．



24-6　質量 5.0 kg の物体が減衰のほとんどないバネに下がっていて，10.0 秒間に 10 振動している．次にこれに運動速度に比例する磁気減衰が加えられ，振幅が 10 振動の間に 0.20 m から 0.10 m に減った．

a）d^2x/dt^2, dx/dt, x の係数を MKS 単位の数であらわして，運動方程式を書け．

b）減衰が入ってからの周期はいくらか．

c）（0.20 m の振幅から始めて）何回振動するうちに振幅が 0.05 m になるか，0.02 m になるか．

d）第 1 回目の振動の間で，減衰によるエネルギー損失の最大の割合はいくらか．

24-7　減衰調和振動子：質量 m が，減衰力 $-m\gamma\dfrac{dx}{dt}$ のはたらく媒質の中でバネ定数 k のバネにつられている．

a）臨界以下の減衰運動の場合で次の外力がはたらいているとき，$t\geqq 0$ のすべての時間に対する m の位置 $x=x(t)$ を求めよ．

1）
$$F=\begin{cases}0, & t<0,\\ F_0=\text{一定}, & t\geqq 0.\end{cases}$$

2）外力はないが $t=0$ で $J=J_x$ の撃力が m に与えられたとき．

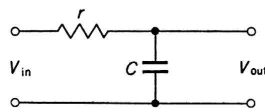
3）
$$F=\begin{cases}0, & t<0,\\ F_0\cos\omega_0 t, & t\geqq 0,\quad \omega_0=\sqrt{k/m}.\end{cases}$$

b）この振子が正弦的の力 $F=F_0\cos\omega t$ で駆動され，長い時間を問題にするとき，最大の振幅を与える振動数 ω^* はいくらか．

注意　完全解は定常解と過渡解とからなり，積分定数は初期条件によってきまることを思い出せ．

第 25 章

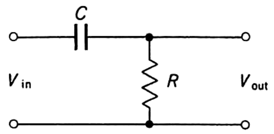
25-1　ある増幅器の電源整流器からくる 120 サイクル s^{-1} の“ハム”をおさえるために，“平滑フィルター”を使う．いちばん簡単なものでは，図のように抵抗とキャパシタンスとが直列になっている．入力電圧に直流成分 V_0 があり，また 120 サイクルの成分 V_2 があったとすると，キャパシターの両端ではこれらの成分はそれぞれいくらか．ただし $r=10^3\ \Omega$，$C=10\ \mu\mathrm{F}$ とする．



25-2　一つの関数を時間について“微分する”ような電気回路がほしい場合がしばしばある．これをする簡単な回路は図に示してある．この回路の出力電圧は（出力回路に微小電流が流れることを許せば）

$$V_{\text{out}}(t) = RC\frac{dV_{\text{in}}}{dt}$$

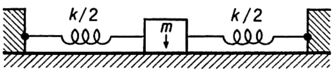
であることを証明せよ．ただし $|V_{\text{out}}| \ll |V_{\text{in}}|$ である．



25-3　上の回路で，$V_{\text{in}} = V_0 \cos \omega t$ である場合に V_{out} を求め，ω の関数とみて前問の結果でちょうどうまいことを験せ．

25-4　一つの関数を"積分する"簡単な回路を工夫し，その性質を論ぜよ．

25-5　質量 m に，バネ定数 $k/2$ の水平な相等しいバネが二つついていて，台の上を滑る．台の摩擦係数は μ で一定であるとする．質量を中心から A だけ横にひっぱって，静止の位置から放す．



a) 運動の微分方程式を書き，$0 < t < \pi\sqrt{m/k}$ であるような時間間隔についてこれを解け．(x の原点をある量だけ動かすと，力の項はなくなることに注意せよ.)

b) 質量が $x=0$ を $0, 1, 2, \cdots$ 回通過したあとで，中心から B の距離に止まってしまうためには，A の大きさはいくらでなければならないか．

演習解答

第4章

4-1 $T_1=T_2=50/\sqrt{2}$ lb

4-3 $T=\frac{L}{x}\left(\frac{w}{2}+W\right)\tan\theta$ **4-5** $W=4w/\sin\theta$

4-7 $力_上=WR/[n(R-1)+1]$,
$力_下=W/[n(R-1)+1]$

4-9 $W_2=0.25$ kg **4-11** $v^2=2gD\frac{W_1-W_2}{W_1+W_2}\sin\theta$

4-15 a) AC, CE, EG, EF, ED, BC
b) $BD=(4/5)W$; $DE=(5/12)W$

4-17 $T=265$ g重, $\alpha=79.1°$

第6章

6-1 約3秒 **6-2** a) 3/10 b) 1/20

第7章

7-3 a) $3.33\times10^5=m_{太陽}/m_{地球}$
b) $318.0=m_{木星}/m_{地球}$

7-5 $m_a+m_b=(R^3/T^2)m_{太陽}$ **7-7** 1.033

7-8 a) 約35.2 A.U. b) 約59

第8章

8-5 45° **8-7** b) 45 mi c) 2.7×10^2 s **8-9** 203 ft

8-10 $d(\sin x)/dx=\cos x$, $d(\cos x)/dx=-\sin x$

8-12 $x=Vt-R\sin(Vt/R)$, $y=R(1-\cos(Vt/R))$

第9章

9-1 $R=mV/\beta$ **9-3** a) $v\approx48$ ft s^{-1}
b) $R=8.6$ ft **9-4** $v'=(\lambda/\tau)v$; $f'=(\mu\lambda/\tau^2)f$

9-5 $G'=(\lambda^3/\mu\tau^2)G$ **9-8** $g=v^2(2M+m)/2mh$

9-10 5.6 lb **9-11** d) $(2M_2S/F)^{1/2}$

9-12 a) 上に $(1/3)g$ b) 280 lb

9-13 $M_2(M+M_1+M_2)g/M_1$ **9-14** 1.0 s

第10章

10-1 3 **10-2** $\Delta v\approx vf/4$ **10-4** a) $a=\frac{r_0v_0}{M_0}$
b) 50 kg s^{-1} c) $V=-V_0\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M}$

10-9 $E'=0.71E$ **10-10** $V=\frac{M+m}{m}x\sqrt{g/L}$

第11章

11-1 a) $5\vec{i}+\vec{j}$ b) $\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$
c) 3 d) 3 e) 3 f) $15\vec{i}-18\vec{j}+9\vec{k}$

11-2 a) N 40°30′E から b) S 35°40′ E から

11-3 a) 直北 b) 0.17時間 **11-6** 行き方(2)が4.0分早い **11-7** a) 右へ $2g$ c) 272 kg重

11-8 $T=2\pi\sqrt{H/g}$

11-9 $\vec{V}_{CM}=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$, $\vec{V}_{CM}=\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_i/M$,
$T=T_{CM}+\frac{1}{2}M\vec{V}_{CM}\cdot\vec{V}_{CM}$

11-10 $\vec{V}=2\vec{j}+2\vec{k}$ m s^{-1} **11-11** $T_{CM}=26$ J

11-12 a) $\sqrt{5}$ m s^{-1}; $\tan^{-1}\frac{1}{2}$NW b) 3/4 c) 90°

11-16 $\theta_{max}=\sin^{-1}(m/M)$

11-17 $\tan^{-1}\sqrt{\frac{M-m}{M+m}}$ **11-18** $\tan^{-1}\frac{\sqrt{\alpha^2M^2-m^2}}{M+m}$

11-20 $\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}_0t+\frac{1}{2}\vec{g}t^2$ **11-21**
$D=R\cos^{-1}[\sin\lambda_1\sin\lambda_2+\cos\lambda_1\cos\lambda_2\cos(\phi_1-\phi_2)]$

第12章

12-1 a) $a_y=-g(\sin\theta+\mu\cos\theta)$
b) $a_y=-g(\sin\theta-\mu\cos\theta)$
c) $a_x=-\mu g\cos\theta\cos\phi$,
$a_y=-g(\sin\theta+\mu\cos\theta\sin\phi)$

12-4 a) 6.0×10^2 g重 b) 8.0×10^2 g重
c) 90° **12-5** $\frac{1+\mu}{1-\mu}mg$ **12-6** 30°

12-7 a) 上に $(1/9)g$ b) 222 g重

12-8 a) 75 cm s^{-2} b) 2.0×10^2 g重

12-11 a) $\Delta T=\mu T\Delta\theta$ b) $T_2/T_1=e^{\mu\alpha}$

12-14 $R=mV/qB$

第13章, 第14章

14-1 d) $dT/dt=+21.4$ J sec^{-1}

14-2 $\vec{r}=2.00\vec{i}+3.02\vec{j}+0.01\vec{k}$ m,
$\vec{v}=0.045\vec{i}+2.12\vec{j}+0.97\vec{k}$ m sec^{-1}, $T=2.71$ J

14-3 a) 0 b) 0 **14-5** $Q=5.6\times10^{-5}$ C

14-6 $C=4\pi\varepsilon_0AB/(B-A)$ **14-7** 1.40×10^3 V

14-8 7.2 m s^{-2} **14-9** $v=\sqrt{gL/2}$

14-10 25 kW　**14-11** 460 ft lb重, 421 ft lb重, 245 ft lb重　**14-12** $\theta=\sin^{-1}0.27$

14-14 22.0 cm　**14-16** $H=\dfrac{1}{2}R$　**14-17** $\dfrac{1}{3}R$

14-18 $E=\dfrac{-GMm}{2a}$　**14-19** b) $T^2=4\pi^2a^3/GM$

c) $T^2=-\pi^2G^2M^2/2(E/m)^3$　**14-20** $v_\infty\approx3.9\ \text{mi s}^{-1}$

14-21 $v_0>11.8\ \text{mi s}^{-1}$　**14-22** $v_0<47.1\ \text{mi s}^{-1}$

14-23 $v_0=40.6\ \text{km s}^{-1}$, 黄道面で $\alpha=41°$ 太陽よりも前

第 15 章

15-1 $x=\gamma(x'+\beta ct')$, $y=y'$, $z=z'$, $t=\gamma(t'+\beta x'/c)$

15-3 a) $t=16.7\ \mu\text{s}$; $t=2.33\ \mu\text{s}$　b) $D=0.70$ km

15-4 a) 30 kg　b) $\sim1.3\ \text{cm}^3\ \text{s}^{-1}$

15-6 $F=m_0c^2/b$　**15-7** a) $g=1.03\ \text{l. y. y}^{-2}$

b) $x=4.15$ l. y., $v=0.982c$

第 16 章

16-1 方程式(16.6), (16.7)　**16-2** $v_{x'}=\dfrac{v_x-V}{1-v_xV/c^2}$, $a_{x'}=\dfrac{a_x(1-v^2/c^2)^{3/2}}{(1-v_xV/c^2)^3}$　**16-5** $T=6m_pc^2$

第 17 章

17-1 約 5 分

17-3 $T_\mu=4.1$ MeV, $p_\mu=p_\nu=E_\nu=29.8$ MeV

17-4 $p=3.00\times10^{-2}ZBR$

第 18 章

18-1 a) +140 N m　b) 2.8 m　c) 14 N

18-2 $\lambda'=66.6°$　**18-3** $F=20.7$ N, 45°, O 点の左 0.34 m のところ　**18-4** $OP=1.5$ ft

18-5 $F_1=W/3$, $F_2=2W/3$, $F_{DF}=4W/3\sqrt{3}$

18-6 a) $mL^2/3$　b) $mL^2/12$　c) mr^2　d) $mr^2/2$

18-7 $a=mg/(m+M/2)$

18-12 $P=16m\mu\pi^3f^3r^2$

第 19 章

19-1 $W=6ML^2\omega_0^2$　**19-5** 体積 $2\pi^2R^3$　**19-8**
$F_{x'}=m\ddot{x}'=F_x\cos\theta+F_y\sin\theta+2m\omega'\dot{y}'+m\omega^2x'$,
$F_{y'}=m\ddot{y}'=F_y\cos\theta-F_x\sin\theta-2m\omega\dot{x}'+m\omega^2y'$,
ここに $\theta=\omega t$　**19-9** $D=12V_0^2/49\mu g$, $V=5V_0/7$

19-13 $X=R(2R/L)\sin(L/2R)$

19-14 $X=(4R/3\alpha)\sin(\alpha/2)$

19-17 b) $a=g/(1+R^2/2r^2)$

第 20 章

20-5 $V=406$　**20-8** $\tau\approx2GmMr^2\sin(2\theta/R^3)$

20-10 現在採用されている値は次のとおりである. a) $8.11\times10^{37}\ \text{kg m}^2$　b) $5.91\times10^{33}\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-1}$　c) 2.16×10^{29} J　d) 25,725 y.　**20-14** a) J/M ; $12Jr/ML^2$; $\dfrac{J}{M}(1-6r/L)$　b) $2L/3$　c) $2L/3$

第 21 章

21-1 a) $I\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=-Mgd\sin\theta$　b) $t_0=2\pi\sqrt{I/Mgd}$

21-3 $T=2\pi\sqrt{2A/g}$; $a=A\sqrt{2}$, $h=A(\sqrt{2}-1)$

21-4 a) 2.68 cm　b) $V_{B/A}=-74.7$ cm/s

21-10 $a=5.76$ cm

第 22 章

22-8 $y=\cos(2k\pi/n)+i\sin(2k\pi/n)$, $k=0, 1, 2, \cdots, n-1$　**22-11** $\log_{11}2=0.289$, $\log_{11}7=0.811$

第 23 章

23-1 $\hat{Z}_L=i\omega L$; $\hat{Z}_C=1/i\omega C$

23-2 a) $\hat{Z}_S=i(\omega L-1/\omega C)$

第 24 章

24-4 a) $V=V_0\cos\omega t$; $\omega=1/\sqrt{LC}$
b) $\dfrac{1}{2}CV_0^2\cos^2\omega t$; $\dfrac{1}{2}CV_0^2\sin^2\omega t$

24-6 a) $5\,d^2x/dt^2+0.693\,dx/dt+20\pi^2x=0$
b) 1.006 s　c) 20 : 33 または 34
d) 約 1.1 W

第 25 章

25-1 $|V_2'|=|V_2|/7.6$, $V_0'=V_0$

25-5 $A_0=\begin{cases}B,\\2\mu mg/k-B;\end{cases}$　$A_1=\begin{cases}2\mu mg/k+B,\\4\mu mg/k-B;\end{cases}$
$A_2=\begin{cases}4\mu mg/k+B,\\6\mu mg/k-B,\end{cases}$ 等

索　　引

（例：1-3 は第 1 章第 3 節，12-4 は第 12 章第 4 節と読む）

ファインマン物理学 I（全5巻）

1967年6月12日　第1刷　発　行
1986年1月 8 日　新装第19刷発行
2002年9月13日　第43刷　発　行

訳　者　坪井忠二（つぼいちゅうじ）

発行者　大塚信一

発行所　株式会社 岩波書店
〒101-8002 東京都千代田区一ツ橋 2-5-5
電　話　案内 03-5210-4000
http://www.iwanami.co.jp/

印刷・精興社　製本・牧製本

ISBN 4-00-007711-2　Printed in Japan